Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 414, 2013 г.

С. Синчук

УЛУЧШЕННАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДЛЯ НЕЧЕТНОЙ ОРТОГОНАЛЬНОЙ ГРУППЫ

§1. Введение

Пусть R – коммутативное (ассоциативное) кольцо с единицей, I – его идеал, $\Phi_l = \mathrm{A}_l, \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l, \mathrm{D}_l$ – одна из классических систем корней, а

$$\mathrm{K}_1(\Phi_l, R) = \mathrm{G}_{sc}(\Phi_l, R)/\,\mathrm{E}(\Phi_l, R)$$

– факторгруппа односвязной группы Шевалле типа Φ_l по элементарной подгруппе. Следуя работе [15], мы называем такую факторгруппу значением на R K_1-функтора, промоделированного по группе Шевалле типа Φ_l. Естественное вложение систем корней $\Phi_{l-1} \hookrightarrow \Phi_l$ индуцирует отображение между соответствующими группами

$$\theta_{l-1} : \mathrm{K}_1(\Phi_{l-1}, R) \to \mathrm{K}_1(\Phi_l, R).$$

Вопрос о достаточных условиях на кольцо R, при выполнении которых, θ_{l-1} оказывается инъективным или сюръективным, был поставлен Бассом в работе [4]. Для случая $\Phi = A_l$ такие условия, формулируемые в терминах стабильного ранга, были найдены Л. Васерштейном в [1]. В работе [15] М. Стейн нашел такие условия для произвольной классической системы корней Φ. Например, для $\mathrm{SK}_1(l+1, R) := \mathrm{K}_1(A_l, R)$ отображение θ_{l-1} сюръективно при условии $\mathrm{sr}(R) \leqslant l$ и инъективно при $\mathrm{sr}(R) \leqslant l-1$.

Кажется естественным задать вопрос о степени неинъективности этого отображения в ситуации, когда условие на R достаточно лишь для наступления сюръективной стабилизации. В работе [10] для случая $\Phi_l = A_l$ и колец R, принадлежащих классу несингулярных аффинных алгебр конечной размерности Крулля $d \geqslant 2$ над совершенным C_1-полем, доказывается, что θ_{l-1} биективно уже при $l \geqslant d+1$, при том что стабильный ранг R может быть оценен лишь через $\mathrm{sr}(R) \leqslant d+1$, что недостаточно для применения теоремы 3.1 об инъективной стабилизации из работы [15].

Ключевые слова: K-функторы, стабильный ранг, расщепимые классические группы.

С другой стороны, можно пытаться явно вычислить ядро отображения θ_{l-1}. Сформулируем основной результат работы [7]. Обозначим через $\widetilde{\mathrm{E}}(n,R,I)$ нормальное замыкание подгруппы, порожденной элементарной подгруппой $\mathrm{E}(n,R,I)$, взаимным коммутантом

$$[\mathrm{E}(n,R,I),\mathrm{GL}(n,R,I)]$$

и образующими вида $(e_n+xy)(e_n+yx)^{-1}$, где $y=\mathrm{diag}(\xi,1,\dots,1)$, $\xi\in R$, а x – произвольная матрица из $\mathrm{M}(n,I)$, такая, что

$$e_n+xy\in\mathrm{GL}(n,R,I).$$

Теорема 1.1. *Пусть R – коммутативное кольцо, $I\lhd R$ – его идеал, $\mathrm{sr}(R,I)\leqslant n$, где $n\geqslant 2$. Тогда ядро отображения*

$$\mathrm{GL}(n,R,I)/\,\mathrm{E}(n,R,I)\to\mathrm{GL}(n+1,R,I)/\,\mathrm{E}(n+1,R,I)$$

совпадает с $\widetilde{\mathrm{E}}(n,R,I)/\,\mathrm{E}(n,R,I)$.

В работе [2] в контексте унитарных и ортогональных групп Васерштейн определил аналогичные $\widetilde{\mathrm{E}}(n,R,I)$ подгруппы $\widetilde{\mathrm{EO}}(2n,R,I)$, $\widetilde{\mathrm{EU}}(2n,R,I)$. Кроме того, для локальных колец R он доказал следующие равенства, аналогичные частному случаю $n=2$ теоремы 1.1:

$$\mathrm{KO}_1(R)=\mathrm{O}(2,R,I)/\widetilde{\mathrm{EO}}(2,R,I),\quad \mathrm{KU}_1(R)=\mathrm{U}(2,R,I)/\widetilde{\mathrm{EU}}(2n,R,I).$$

Основной целью настоящей работы является получение следующего аналогичного теореме 1.1 результата для расщепимых групп типов B_n и C_n (то есть нечетной ортогональной и симплектической групп).

Теорема 1.2. *Пусть R – коммутативное кольцо, $\Phi_n=\mathrm{C}_n,\mathrm{B}_n$, а $\max(\mathrm{sr}(R),2)\leqslant n$. Допустим, кроме того, что отображение*

$$\theta_n:\mathrm{K}_1(\Phi_n,R)\to\mathrm{K}_1(\Phi_{n+1},R)$$

сюръективно. Тогда его ядро порождается образом $\widetilde{\mathrm{E}}(n,R)$ при отображении, индуцированном вложением систем корней $\mathrm{A}_{n-1}\to\Phi_n$.

Из данной теоремы, теоремы 1.1 и основного результата работы [10] немедленно вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.3. *Пусть R – регулярная аффинная алгебра над совершенным C_1-полем размерности $d\geqslant 2$, тогда отображение*

$$\mathrm{K}_1(\mathrm{B}_{d+1},R)\to\mathrm{K}_1(\mathrm{B}_{d+2},R)$$

является изоморфизмом.

Определение C_1-поля можно найти в [12, 3.2 гл. 11]. В действительности, основная теорема [10] (а значит и сформулированное нами утверждение) выполнены при некоторых более слабых предположениях на R (см. [10, Предложение 3.1]).

Отметим, что для четной ортогональной группы Басу, Рао и Джоуз привели контрпример к аналогичному утверждению. Более точно, в [11] был доказан следующий отрицательный результат.

Теорема 1.4. *Пусть R – несингулярная аффинная алгебра над совершенным C_1-полем размерности $d \geqslant 2$, пусть кроме того $2 \in R^*$.*

(1) *Биективность отображения*

$$\mathrm{SO}(2(d+1), R)/\,\mathrm{EO}(2(d+1), R) \to \mathrm{SO}(2(d+2), R)/\,\mathrm{EO}(2(d+2), R)$$

влечет транзитивность действия $\mathrm{E}(d+1, R)$ на унимодулярных столбцах высоты $d+1$.

(2) *Существует алгебра R из рассматриваемого класса, для которой не выполнено условие транзитивности из первого пункта теоремы.*

С другой стороны, в симплектическом случае при помощи локально-глобального принципа удаётся доказать значительно более сильный аналог следствия 1.3 (см. [5]), что связано с наступлением сюръективной стабилизации для $\mathrm{K}_1(\mathrm{C}_n, R)$ уже при $n \geqslant \left[\frac{\mathrm{sr}(R)}{2}\right]$ (см. [15, теорема 2.1]).

Настоящая работа организована следующим образом: в §2 мы вводим обозначения и приводим формулировки используемых в ходе доказательства результатов, в §3 доказываем аналог теоремы 2.5 работы [15], а в §4 – основной результат статьи. Наше доказательство опирается, по существу, лишь на элементарные соотношения между корневыми унипотентами и так называемые “стабильные” вычисления в представлениях групп Шевалле, то есть вычисления с вектором старшего весового подпространства.

§2. Основные обозначения и предварительные результаты

Под коммутатором двух элементов x, y произвольной группы G всегда понимается их левонормированный коммутатор $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$, мы используем обозначение x^y для $y^{-1}xy$. Для всякого набора подмножеств $H_1, \ldots, H_n$ группы G через $H_1 \ldots H_n$ мы обозначаем их

множество-произведение по Минковскому, то есть множество, состоящее из всевозможных произведений $h_1 \dots h_n$ элементов $h_i \in H_i$. Пусть $H \ltimes G$ обозначает полупрямое произведение групп H и G, такое, что G оказывается в нём нормальной подгруппой.

Как обычно, $\mathrm{GL}(n, R)$ обозначает полную линейную, а $\mathrm{SL}(n, R)$ – специальную линейную группу. Обозначим через e_n единичную матрицу порядка n. Через a_{ij} обозначим коэффициент матрицы a, располагающийся на позиции (i, j), через $a_{*,i}$ – i-й столбец матрицы a, а через e_{ij} – стандартную матричную единицу, то есть матрицу, в которой лишь коэффициент на позиции (i, j), равный единице, отличен от нуля. Обозначим через $t_{ij}(\xi)$, $i \neq j, \xi \in R$ матрицу трансвекции, то есть $t_{ij}(\xi) = e_n + \xi e_{ij}$.

Столбец $(a_1, \dots, a_n)^t \in R^n$ называется унимодулярным, если элементы $a_1, \dots, a_n$ порождают R, то есть

$$Ra_1 + \dots + Ra_n = R.$$

Стабильный ранг коммутативного кольца R есть такое наименьшее число k, что для любого унимодулярного столбца $(a_1, ..., a_{k+1})^t$ найдутся элементы $b_1, \dots, b_k$ из кольца R, такие, что столбец $(a_1 + b_1 a_{k+1}, a_2 + b_2 a_{k+1}, \dots, a_k + b_k a_{k+1})^t$ унимодулярнен.

Пусть Φ обозначает приведенную неприводимую систему корней ранга l. Мы предполагаем что на Φ зафиксирован порядок, определяющий подмножество простых корней $\Pi = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$. Для $\alpha \in \Phi$ обозначим через $m_i(\alpha)$ коэффициент при α_i в базисном разложении α, иными словами, $\alpha = \sum_i m_i(\alpha)\alpha_i$. Обозначим через $\mathrm{G}(\Phi, -)$ односвязную групповую схему Шевалле–Демазюра с системой корней Φ, а через $\mathrm{E}(\Phi, -)$ – её элементарную подсхему. Вложение систем корней $\Psi \subseteq \Phi$ задает естественные преобразования

$$\mathrm{G}(\Psi, -) \to \mathrm{G}(\Phi, -), \quad \mathrm{E}(\Psi, -) \to \mathrm{E}(\Phi, -).$$

Обозначим через X_α корневую подгруппу, соответствующую корню α из Φ, то есть подгруппу состоящую из всевозможных корневых унипотентов $t_\alpha(\xi)$, где ξ – произвольный элемент R. Группа точек $\mathrm{E}(\Phi, R)$ может быть описана как подгруппа $\mathrm{G}(\Phi, R)$, порожденная всевозможными корневыми подгруппами X_α для $\alpha \in \Phi$.

Для наших целей будет достаточно работать с фундаментальным базисным представлением $\mathrm{G}(\Phi, R)$ (то есть представлением со старшим весом ω_1). Нас будет интересовать, главным образом, случай $\Phi_l = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l$. В этой ситуации интересующие нас представления – это

естественные (но, возможно, не являющиеся точными) представления на свободных модулях $V = R^{2l+1}, V = R^{2l}$ матрицами из SO_{2l+1} и Sp_{2l} соответственно. Мы используем стандартную нумерацию для весов этих представлений, следуя [15, §1B]. В частности, для обозначения строк и столбцов матриц, представляющих элементы $\mathrm{G}(\Phi, R)$ для $\Phi = \mathrm{C}_l$ и $\Phi = \mathrm{B}_l$, мы используем нумерацию

$$1, 2, \dots, l, -l, \dots, -2, -1 \quad \text{и} \quad 1, 2, \dots l, 0, -l, \dots, -2, -1.$$

Зафиксируем по базисному вектору e_i в каждом (одномерном) весовом подпространстве и для $v \in V$ обозначим через $\mu_i(v)$ коэффициент при e_i в разложении v по базису $\{e_i\}$.

Для $1 \leqslant r \leqslant l$ обозначим через $\mathrm{EP}_r(\Phi_l, R)$, $\mathrm{EL}_r(\Phi_l, R)$, $U_r(\Phi_l, R)$, $U_r^-(\Phi_l, R)$ элементарную (максимальную) параболическую подгруппу $\mathrm{E}(\Phi, R)$, соответствующую r-му простому корню, её подгруппу Леви, унипотентный радикал и противоположный унипотентный радикал. Иными словами, рассматриваются подгруппы, порожденные корневыми унипотентами $t_\alpha(\xi)$, для $m_r(\alpha) \geqslant 0$, $m_r(\alpha) = 0$, $m_r(\alpha) > 0$ и $m_r(\alpha) < 0$, соответственно. Через $U^+(\Phi, R)$ (соответственно $U^-(\Phi, R)$) обозначим подгруппы в $\mathrm{E}(\Phi, R)$, порожденные $t_\alpha(\xi)$ для всех положительных (отрицательных) корней α. Разложение Леви утверждает, что EP_r представляется в виде полупрямого произведения $\mathrm{EP}_r = \mathrm{EL}_r \ltimes U_r$.

Обозначим через $P_1^0(\Phi_l, R)$ подгруппу, состоящую из элементов $\mathrm{G}(\Phi_l, R)$, оставляющих неподвижным вектор e_1, а через $L_1^0(\Phi_l, R)$ – образ вложения $\mathrm{G}(\Phi_{l-1}, R) \to \mathrm{G}(\Phi_l, R)$. Введем обозначения $P_i(\Phi_l, R)$, $L_i(\Phi_l, R)$ для группы точек максимальной параболической подсхемы, соответствующей i-му простому корню, и её подсхемы Леви. Имеют место включения

$$\mathrm{EP}_1(\Phi_l, R) \subseteq P_1^0(\Phi_l, R) \subseteq P_1(\Phi, R),$$
$$\mathrm{EL}_1(\Phi_l, R) \subseteq L_1^0(\Phi_l, R) \subseteq L_1(\Phi, R).$$

Замечание 2.1. Из разложения Шевалле–Мацумото (ср. [15, теорема 1.3]) следует, что

$$P_1^0(\Phi_l, R) = L_1^0(\Phi_l, R) \ltimes U_1(\Phi_l, R).$$

В ситуации, когда выбор системы корней Φ_l ясен из контекста, мы будем сокращать обозначение $Z(\Phi_l, R)$ до Z, где

$$Z = \mathrm{G}, \mathrm{E}, \mathrm{EP}_i, \mathrm{EL}_i, U^\pm, U_i^\pm, P_i, L_i, P_1^0, L_1^0.$$

Отметим, что в случае $\Phi = \mathrm{A}_l$ подгруппа $P_1^0(\Phi_l, R)$ – это в точности подгруппа тех матриц $\mathrm{SL}(l+1, R)$, первый столбец которых совпадает с первым столбцом единичной матрицы. В этом же случае можно описать P_r как подгруппу $\mathrm{SL}(l+1, R)$ блочных матриц $\begin{pmatrix} * & * \\ 0 & * \end{pmatrix}$ относительно разбиения $(r, l-r+1)$.

Замечание 2.2. Для случая $\Phi = \mathrm{A}_l$ мы естественным образом отождествляем корневые унипотенты $t_\alpha(\xi)$ с соответствующими матрицами трансвекций $t_{ij}(\xi)$. Такое же соглашение используется и для корневых подгрупп: $X_{ij} = X_\alpha$.

Для других классических систем корней действие корневых унипотентов также может быть конкретизировано. В наших вычислениях нам будет достаточно описания (с точностью до знаков) из раздела §1B работы [15].

Замечание 2.3. Пусть v обозначает произвольный вектор из пространства V.

(a) Для системы корней $\Phi = \mathrm{B}_l$ умножение v на корневой унипотент $t_{-\alpha_l}(\xi)$ прибавляет $\pm 2\mu_0(v)\xi \pm \mu_l(v)\xi^2$ к $\mu_{-l}(v)$ и $\pm\mu_l(v)\xi$ к $\mu_0(v)$.

(b) Для системы корней $\Phi = \mathrm{C}_l$ умножение v на корневой унипотент $t_{-\alpha_l}(\xi)$ прибавляет $\pm\mu_l(v)\xi$ к $\mu_{-l}(v)$.

(c) Пусть $\Phi = \mathrm{B}_l, \mathrm{C}_l$, а $\beta = \alpha_1 + \ldots + \alpha_{l-1}$. Умножение v на корневой унипотент $t_\beta(\xi)$ прибавляет $\pm\mu_l(v)\xi$ к $\mu_1(v)$ и $\pm\mu_{-1}(v)\xi$ к $\mu_{-l}(v)$. Умножение на корневой унипотент $t_{-\beta}(\xi)$ прибавляет $\pm\mu_1(v)\xi$ к $\mu_l(v)$ и $\pm\mu_{-l}(v)\xi$ к $\mu_{-1}(v)$.

В доказательстве основного результаты мы будем использовать следующие простые факты о линейной группе.

Лемма 2.4. *Пусть* $\mathrm{sr}(R) \leqslant n$. *Тогда для всякого унимодулярного столбца* $v \in R^{n+1}$ *найдутся* $x = \left(\begin{smallmatrix} e_n & * \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $y = \left(\begin{smallmatrix} e_n & 0 \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right)$, *такие, что* $n+1$*-я координата столбца* yxv *равна нулю.*

Доказательство. Утверждение немедленно следует из определения стабильного ранга. □

Обозначим через $\widetilde{S}$ множество элементов $g \in \mathrm{E}(n+1, R) \cong \mathrm{E}(\mathrm{A}_n, R)$, таких, что $g_{n+1,1} = 0$.

Лемма 2.5. *Имеет место включение* $\widetilde{S} \subseteq U_n^- \cdot X_{1,n+1} \cdot U_1^- \cdot P_1^0$.

Доказательство. По определению $\widetilde{S}$, первые n координат первого столбца матрицы $g \in \widetilde{S}$ порождают единичный идеал, поэтому, домножая слева на некоторую матрицу x_1 вида $\left(\begin{smallmatrix} e_n & 0 \\ * & 1 \end{smallmatrix}\right)$, можно добиться, чтобы $(x_1 g)_{n+1,1} = 1$. Домножим $x_1 g$ на некоторую матрицу трансвекции $x_2 = t_{1,n+1}(b)$, такую, что $(x_2 x_1 g)_{1,1} = 1$. Существует матрица x_3 вида $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ * & e_n \end{smallmatrix}\right)$, такая, что $x_3 x_2 x_1 g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{smallmatrix}\right)$. Лемма теперь непосредственно следует из разложения

$$g = \begin{pmatrix} e_n & 0 \\ * & 1 \end{pmatrix} t_{1,n+1}(b) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ * & e_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & * \\ 0 & * \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Следствие 2.6. *Имеет место включение*

$$\widetilde{S} \subseteq \mathrm{EL}_1 \cdot U_1^- \cdot X_{1,n+1} \cdot X_{n+1,1} \cdot P_1^0.$$

Доказательство. Заметим, что $X_{1,n+1} = U_1 \cap U_n$, а

$$X_{n+1,1} = U_1^- \cap U_n^-.$$

Остаётся применить разложение Леви к подгруппам EP_1 и EP_n:

$$\begin{aligned} U_n^- \cdot X_{1,n+1} \cdot U_1^- &= U_n^- \cdot X_{1,n+1} \cdot (U_1^- \cap L_n) \cdot X_{n+1,1} \\ &\subseteq U_n^- \cdot (U_1^- \cap L_n) \cdot U_n \cdot X_{n+1,1} = (U_n^- \cap L_1) \cdot U_1^- \cdot U_n \cdot X_{n+1,1} \\ &\subseteq \mathrm{EL}_1 \cdot U_1^- \cdot (U_n \cap L_1) \cdot X_{1,n+1} \cdot X_{n+1,1} \subseteq \mathrm{EL}_1 \cdot U_1^- \cdot X_{1,n+1} \cdot X_{n+1,1}. \quad \square \end{aligned}$$

§3. Факторизация группы $\mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R)$.

На протяжении данного раздела символ $\widetilde{S}$ обозначает множество элементов $g \in \mathrm{EL}_{n+1} \cong \mathrm{E}(n+1, R)$, таких, что $\mu_{n+1}(g \cdot e_1) = 0$. Это определение согласуется с определением $\widetilde{S}$, данным в разделе 2.

Основным результатом данного раздела является следующий аналог разложения Денниса–Васерштейна для группы $\mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R)$ (ср. [15, теорема 2.5]).

Предложение 3.1. *В условиях теоремы* 1.2 *справедливы следующие утверждения.*

(a) *Имеет место разложение* $\mathrm{E}(\Phi_{n+1}, R) = U^+ \cdot U^- \cdot \mathrm{EL}_{n+1} \cdot \mathrm{EP}_1 = U^+ \cdot U^- \cdot \widetilde{S} \cdot \mathrm{EP}_1$.

(b) *Имеет место разложение* $\mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R) = U^+ \cdot U^- \cdot \widetilde{S} \cdot P_1^0$. *Иными словами, каждый элемент* $g \in \mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R)$ *допускает разложение* $ulavt_g$, *для некоторых* $u \in U^+$, $l \in U^-$, $a \in \widetilde{S}$, $v \in U_1$, $t_g \in L_1^0$.

(c) *Для произвольного* $e \in \mathrm{E}(\Phi_{n+1}, R)$ *можно выбрать такое разложение* $eg = u'l'a'v't_{eg}$, *что* t_{eg} *содержится в смежном классе* $\mathrm{EL}_1 \cdot t_g$.

Нам понадобится следующее техническое утверждение.

Лемма 3.2.

(a) *Для любого элемента* a *группы* EL_{n+1} *найдутся такие* $x \in \mathrm{EL}_{n+1} \cap U_n^+$ *и* $y \in \mathrm{EL}_{n+1} \cap U_n^-$, *что произведение* $y \cdot x \cdot a$ *содержится в* $\widetilde{S}$.

(b) *Имеют место включения*

$$X_{-\alpha_{n+1}} U^+ \subseteq U^+ X_{-\alpha_{n+1}} X_{\alpha_{n+1}},$$
$$X_{\alpha_{n+1}} U^- \subseteq U^- X_{\alpha_{n+1}} X_{-\alpha_{n+1}},$$
$$X_{-\alpha_{n+1}} U^+ U^- \subseteq U^+ U^- X_{\alpha_{n+1}} X_{-\alpha_{n+1}}.$$

(c) *Для произвольного элемента* a *из* $\widetilde{S}$, *имеет место включение* $(X_{-\alpha_{n+1}})^a \subseteq \mathrm{EL}_1$.

Доказательство. Пункт (a) непосредственно следует из леммы 2.4.

Для доказательства (b) представим элемент $u \in U^+$ в виде произведения $u_1 t_{\alpha_{n+1}}(\eta)$, где u_1 – произведение некоторых корневых элементов $t_\alpha(\zeta_\alpha)$ для $\alpha \neq \alpha_{n+1}$. Из коммутационной формулы Шевалле следует, что ${u_1}^{t_{-\alpha_{n+1}}(-\xi)}$ содержится в U^+, откуда

$$t_{-\alpha_{n+1}}(\xi) u = {u_1}^{t_{-\alpha_{n+1}}(-\xi)} \cdot t_{-\alpha_{n+1}}(\xi) \cdot t_{\alpha_{n+1}}(\eta) \in U^+ X_{-\alpha_{n+1}} X_{\alpha_{n+1}}.$$

Второе включение может быть получено аналогичным способом (с заменой знаков на противоположные). Третье включение следует из двух первых.

Докажем (c). Так как элемент a содержится в EL_{n+1}, а $t_{-\alpha_{n+1}}(\xi)$ – в U_{n+1}^-, то из разложения Леви следует, что сопряженный элемент $z = t_{-\alpha_{n+1}}(\xi)^a$ также содержится в U_{n+1}^-. С другой стороны, замечание 2.3 показывает, что вектор $a \cdot e_1$ не меняется при домножении слева на элемент $t_{-\alpha_{n+1}}(\xi)$, а значит, $z \in U_{n+1}^- \cap P_1^0 \subseteq \mathrm{EL}_1$. □

Доказательство предложения 3.1. Убедимся вначале во втором равенстве из формулировки пункта (a). Если дано разложение $g = ulap \in U^+ \cdot U^- \cdot \mathrm{EL}_{n+1} \cdot \mathrm{EP}_1$, то, перенося внутрь центрального сомножителя a части унипотентных радикалов u и l, лежащие в EL_{n+1},

можно считать, что $u \in U^+_{n+1}$, $l \in U^-_{n+1}$. Но тогда искомое уточненное разложение для g получается применением пункта (a) леммы 3.2:

$$ulap = ux^{-1} \cdot (xlx^{-1})y^{-1} \cdot (yxa)p.$$

Так как $\mathrm{E}(\Phi_{n+1}, R)$ порождается корневыми подгруппами $X_{\pm\alpha_i}$ для $1 \leqslant i \leqslant n+1$, то, чтобы доказать первое равенство пункта (a), нам достаточно убедиться в том, что разложение $U^+U^-\widetilde{S}\,\mathrm{EP}_1$ выдерживает домножения слева на корневые унипотенты $t_{-\alpha_i}(\xi)$. Единственным нетривиальным при этом оказывается случай $\alpha = -\alpha_{n+1}$, так как остальные немедленно следуют из разложения Леви. Зафиксируем произвольный элемент a подгруппы $\widetilde{S}$. Ввиду пункта (c) леммы 3.2 подгруппа $(X_{-\alpha_{n+1}})^a$ содержится в EL_1. Но тогда нужное утверждение следует из пункта (b) леммы 3.2:

$$X_{-\alpha_{n+1}}U^+U^-a\,\mathrm{EP}_1 \subseteq U^+U^-X_{\alpha_{n+1}}a(X_{-\alpha_{n+1}})^a\,\mathrm{EP}_1 \subseteq U^+U^-a\,\mathrm{EP}_1\,.$$

Утверждение пункта (b) непосредственно следует из (a) и предположения о сюръективной стабилизации:

$$\begin{aligned}\mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R) &= \mathrm{E}(\Phi_{n+1}, R)\,\mathrm{G}(\Phi_n, R)\\ &= U^+ \cdot U^-\widetilde{S} \cdot \mathrm{EP}_1 \cdot \mathrm{G}(\Phi_n, R) = U^+ \cdot U^- \cdot \widetilde{S} \cdot P_1^0.\end{aligned}$$

Чтобы теперь убедиться в справедливости пункта (c), достаточно записать уже полученное разложение (a) для элементарного сомножителя $eula$. □

§4. Доказательство теоремы 1.2

Определение 4.1. *Обозначим через* $\widehat{\mathrm{E}}(n, R)$ *подгруппу, состоящую из элементов* $\mathrm{SL}(n, R)$*, образ которых в* $\mathrm{SL}(n+1, R)$ *относительно вложения* $a \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ *содержится в элементарной подгруппе* $\mathrm{E}(n+1, R)$.

При $\mathrm{sr}(R) \leqslant n$ эта подгруппа совпадает с подгруппой $\widetilde{\mathrm{E}}(n, R, I)$, определенной перед формулировкой теоремы 1.1, для $I = R$.

Обозначим через $\widetilde{\mathrm{E}}(\Phi_n, R)$ нормальное замыкание в $\mathrm{G}(\Phi_n, R)$ подгруппы, порожденной $\mathrm{E}(\Phi_n, R)$ и образом подгруппы $\widehat{\mathrm{E}}(n, R)$ при гиперболическом вложении

$$\mathrm{G}(\mathrm{A}_{n-1}, R) \to \mathrm{G}(\Phi_n, R).$$

Обозначим через $\widetilde{L_1^0}$ образ $\widetilde{\mathrm{E}}(\Phi_n, R)$ относительно вложения $\mathrm{G}(\Phi_n, R) \to \mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R)$. Из теоремы 1.1 следует, что $\widetilde{\mathrm{E}}(\Phi_n, R)$ содержится в ядре индуцированного отображения $\mathrm{K}_1(\Phi_n, R) \to \mathrm{K}_1(\Phi_{n+1}, R)$, поэтому

$$\mathrm{EL}_1 \subseteq \widetilde{L_1^0} \subseteq L_1^0 \cap \mathrm{E}(\Phi_{n+1}, R).$$

Заметим, что для доказательства теоремы 1.2 достаточно сконструировать теоретико-множественную ретракцию η_{n+1} к

$$\overline{\theta_n} : \mathrm{G}(\Phi_n, R)/\widetilde{\mathrm{E}}(\Phi_n, R) \to \mathrm{K}_1(\Phi_{n+1}, R).$$

Пусть $g \in \mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R)$, запишем разложение $g = ulavt$ из пункта (b) предложения 3.1 и положим $\eta_{n+1}(g) := \widetilde{\mathrm{E}}(\Phi_n, R)t$. Заметим, что если бы такое определение не зависело от выбора конкретного разложения, то ввиду пункта (c) предложения 3.1 отображение η_{n+1} немедленно оказалось бы постоянным на правых смежных классах по $\mathrm{E}(\Phi_{n+1}, R)$, а соотношение $\eta_{n+1}\theta_n = 1$ было бы в таком случае очевидно.

Пусть даны два различных разложения вида 3.1 одного и того же элемента g группы $\mathrm{G}(\Phi_{n+1}, R)$: $g = ulavt = u'l'a'v't'$. Нам нужно убедиться в том, что частное $t't^{-1}$ содержится в $\widetilde{\mathrm{E}}(\Phi_n, R)$. Разделив обе части равенства на элементарный сомножитель $u'l'a'v'$ и воспользовавшись пунктом (c) предложения 3.1, получаем: $u_1l_1a_1v_1t_1t = t'$ для некоторых $u_1 \in U^+$, $l_1 \in U^-$, $a_1 \in \widetilde{S}$, $v_1 \in U_1$, $t_1 \in \mathrm{EL}_1$. Нам достаточно доказать принадлежность элемента $g = t't^{-1}t_1^{-1} = u_1l_1a_1v_1$ группе $\widetilde{L_1^0}$, но это вытекает из следующего утверждения.

Лемма 4.2. *В условиях теоремы* 1.2 *имеет место включение множеств*

$$(U^+ \cdot U^- \cdot \widetilde{S} \cdot U_1) \cap L_1^0 \subseteq \widetilde{L_1^0}.$$

Доказательство. Обозначим через A множество $U^+ \cdot U^- \cdot \widetilde{S} \cdot U_1$, а через β сумму простых корней $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n$. Из следствия 2.6 получаем цепочку включений (мы используем замечание 2.2 для отождествления двух различных обозначений корневых подгрупп):

$$\begin{aligned} A &\subseteq U^+ \cdot U^- \cdot \mathrm{EL}_1 \cdot U_1^- \cdot X_\beta \cdot X_{-\beta} \cdot P_1^0(\mathrm{A}_n, R) \cdot U_1 \\ &\subseteq \mathrm{EL}_1 \cdot U_1 \cdot U_1^- \cdot X_\beta \cdot X_{-\beta} \cdot U_1 \cdot \widetilde{L_1^0}. \end{aligned}$$

Нам достаточно убедиться в том, что

$$(U_1 \cdot U_1^- \cdot X_\beta \cdot X_{-\beta} \cdot U_1) \cap L_1^0 \subseteq \widetilde{L_1^0}.$$

В действительности, мы покажем, что пересечение множеств в левой части включения тривиально.

Пусть символы c, d обозначают элементы кольца R, u_1, u_2 – элементы радикала U_1, а l – элемент U_1^-. Так как u_1, u_2 и произведение $h := u_1 l t_\beta(c) t_{-\beta}(d) u_2$ из левой части включения все содержатся в подгруппе P_1^0, там же содержится и элемент $p := t_{-\beta}(-d) t_\beta(-c) l^{-1}$. В частности, p стабилизирует вектор старшего весового подпространства e_1. Обозначим через v образ вектора старшего веса e_1 под действием l^{-1}, а через a_i – его координаты относительно стандартного базиса:

$$v = l^{-1}(e_1) = e_1 + \sum_{i \neq 1} a_i e_i.$$

По условию, $t_{-\beta}(-d) t_\beta(-c) v = e_1$. С другой стороны, пункт (c) замечания 2.3 позволяет явно вычислить выражение в левой части равенства. Действительно,

$$\begin{aligned} t_{-\beta}(-d) t_\beta(-c) v = b_1 e_1 + (a_{n+1} \pm d b_1) e_{n+1} \\ + b_2 e_{-n-1} + (a_{-1} \pm d b_2) e_{-1} + \sum_{|i| \neq 1, n+1} a_i e_i, \end{aligned}$$

где $b_1 := 1 \pm c a_{n+1}$, $b_2 := a_{-n-1} \pm c a_{-1}$. Сравнивая коэффициенты линейных комбинаций, немедленно приходим к соотношениям $b_1 = 1$, $a_{n+1} = \pm d$, $b_2 = 0$, $a_{-1} = 0$, из которых, в свою очередь, вытекают соотношения $c a_{n+1} = cd = 0$ и $a_i = 0$ для всех $i \neq n+1$. Но тогда p содержится в U_1, а элемент h – в $L_1^0 \cap U_1 = 1$, что и доказывает его тривиальность. □

Упомянем два возможных варианта обобщения 1.2.

Проблема 4.3. *Обобщить теорему* 1.2 *на случай относительных групп Шевалле.*

Проблема 4.4. *Обобщить результат теоремы* 1.1 *на случай квадратичных групп из* [3], *используя в ответе подгруппу* $\widetilde{\mathrm{EU}}$, *определенную в* [2].

Автор выражает благодарность Николаю Александровичу Вавилову за многочисленные полезные обсуждения.

Литература

1. Л. Н. Васерштейн, *О стабилизации общей линейной группы над кольцом.* — Мат. Сб. **79**, No. 3 (1969), 405–424.
2. Л. Н. Васерштейн, *Стабилизация унитарных и ортогональных групп над кольцами с инволюцией.* — Мат. Сб. **81**, No. 3 (1970), 328–351.
3. A. Bak, V. A. Petrov, G. Tang, *Stability for quadratic* K_1. — K-theory **30**, No. 1 (2003), 1–11.
4. H. Bass, *Algebraic* K*-theory.* Benjamin, Inc., New York, 1968.
5. R. Basu, R. Rao, *Injective Stability for* K_1 *of classical modules.* — J. Algebra **323**, No. 4 (2010), 867–877.
6. A. J. Hahn, O. T. O'Meara, *The classical groups and K-theory.* — Grundl. Math. Wiss. **291**, Springer, Berlin et. al, 1989.
7. W. van der Kallen, *Vaserstein prestability theorem for commutative rings.* — Commun. Algebra **15**, No. 3 (1987), 657–663.
8. M. A. Knus, *Quadratic and Hermitian Forms over Rings.* — Grundl. Math. Wiss. **294**, Springer, Berlin, 1991.
9. H. Matsumoto, *Sur les sous-groupes arithmétiques des groupes semi-simples déployés.* — Ann. Sci. École Norm. Sup. **4**, No. 2 (1969), 1–62.
10. R. Rao, W. van der Kallen, *Improved stability for* SK_1 *and* WMS_d *of a non-singular affine algebra.* — Astérisque **226** (1994), 411–420.
11. R. Rao, R. Basu, S. Jose, *Injective stability for* K_1 *of orthogonal group.* — J. Algebra **323**, No. 2 (2010), 393–396.
12. Ж.-П. Серр, *Когомологии Галуа.* Мир, М., 1968.
13. S. Sinchuk, *Injective stability for unitary* K_1*, revisited.* — J. K-theory **11**, No. 2 (2013), 233–242.
14. M. R. Stein, *Generators, relations and coverings of Chevalley groups over commutative rings.* — Amer. J. Math. **93**, No. 4 (1971), 965–1004.
15. M. R. Stein, *Stability theorems for* K_1, K_2 *and related functors modeled on Chevalley groups.* — Japan. J. Math. **4**, No. 1 (1978), 77–108.

Sinchuk S. Improved stability for odd-dimensional orthogonal group.

For a commutative ring R satisfying the condition $\mathrm{sr}(R) \leqslant n$ and a root system Φ_l of type B_n or C_n we compute the kernel of the stabilization map $\mathrm{K}_1(\Phi_n, R) \to \mathrm{K}_1(\Phi_{n+1}, R)$.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: sinchukss@yandex.ru

Поступило 3 февраля 2013 г.