Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 414, 2013 г.

А. Н. Панов, Е. В. Сурай

СУБРЕГУЛЯРНЫЕ ХАРАКТЕРЫ ГРУППЫ $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$

§1. Введение

В теории представлений групп важную роль играет понятие характера представления. Для конечномерных представлений характер $\chi(g)$ определяется как след матрицы оператора T_g. Это определение напрямую не переносится на бесконечномерные представления. Для некоторых представлений групп Ли можно определить характер как обобщенную функцию на группе следующим образом. Продолжим представление T группы G до представления ее групповой алгебры $L^1(G)$ по формуле

$$T_\varphi = \int \varphi(g) T_g \, dg,$$

где dg – левоинвариантная мера на группе. Предположим, что для любой финитной функции оператор T_φ имеет след. Тогда формула

$$(\chi, \varphi) = \mathrm{Tr}(T_\varphi)$$

определяет след $\chi(g)$ как обобщенную функцию на группе Ли G.

В работе [1] было доказано, что всякое неприводимое представление связной нильпотентной группы Ли допускает след в указанном выше смысле. Для характера неприводимого представления нильпотентной группы Ли, ассоциированного с коприсоединенной орбитой Ω, имеет место формула А. А. Кириллова

$$(\chi, \varphi) = \int \widehat{\varphi}(a) d_\Omega \mu(a), \tag{1}$$

где

$$\widehat{\varphi}(a) = \int \varphi(\exp(x)) e^{2\pi i (a,x)} \, dx$$

– преобразование Фурье относительно заданной меры Лебега dx на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ группы Ли G, $d_\Omega \mu$ – инвариантная мера на орбите Ω (см. [1] и [2, лекция 8]). Однако вычисление характера по этой формуле может вызвать большие затруднения, если орбита представляет

Ключевые слова: представления групп, характеры представлений, метод орбит.

собой достаточно сложное многообразие, заданное системой многих уравнений. Поэтому легче идти другим путем: представить оператор T_φ в интегральной форме

$$T_\varphi F(x) = \int A(x,y)F(y)\,dy, \tag{2}$$

и искать след как $\int A(x,x)\,dx$ (см. [1]). При вычислении интеграла возникают множители типа δ-функций, что говорит о том, что носитель характера в общем случае не совпадает со всей группой. Вычисления проведенные для различных связных нильпотентных групп Ли позволяют сформулировать следующую общую гипотезу.

Гипотеза 1. Носитель характера неприводимого представления, ассоциированного с коприсоединенной орбитой Ω, связной нильпотентной группы Ли совпадает с замыканием объединения стабилизаторов G^f, где $f \in \Omega$.

В работе [1] для группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ были вычислены регулярные характеры (то есть характеры неприводимых представлений, ассоциированных с орбитами максимальной размерности). Напомним, что любая коприсоединенная орбита имеет четную размерность. Коприсоединенную орбиту называют субрегулярной, если её размерность равна $d-2$, где d – максимальная размерность коприсоединенных орбит. Характеры неприводимых представлений, ассоциированных с субрегулярными коприсоединенными орбитами, будем называть субрегулярными характерами. Классификация субрегулярных коприсоединенных орбит для группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ содержится в работе [4]. Воспользовавшись этой классификацией, в данной работе получены формулы (теоремы 3 и 4) для субрегулярных характеров. В работе также проведено вычисление регулярных характеров (теоремы 1 и 2), поскольку в [1] эти формулы приводятся без доказательства и содержат нежелательную описку (для нечетного n). Полученные формулы подтверждают гипотезу 1 в случае регулярных и субрегулярных характеров группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ (см. теорему 5).

Отметим, что в случае конечного поля субрегулярные характеры были вычислены в [3]. Введем следующие обозначения:

1) если C – матрица с функциональными элементами, то $\delta(C)$ – произведение δ-функций в нуле от ее элементов;

2) если C – унитреугольная матрица с функциональными элементами выше диагонали, то сохраним обозначение $\delta(C)$ для произведения δ-функций в нуле от элементов выше диагонали;

3) если $C_1, \ldots, C_m$ – система матриц, то

$$\delta(C_1, \ldots, C_m) = \delta(C_1) \cdots \delta(C_m).$$

§2. Регулярные характеры

Группа $G = \mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ – группа из верхнетреугольных матриц порядка n с единицами по диагонали. Ее алгебра Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(n, \mathbb{R})$ состоит верхнетреугольных матриц с нулями по диагонали. Используя форму Киллинга $(\cdot, \cdot)$, отождествим сопряженное пространство $\mathfrak{g}^*$ с множеством нижнетреугольных матриц с нулями по диагонали. Согласно методу орбит А. А. Кириллова, существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями связной нильпотентной группы Ли и ее коприсоединенными орбитами. Каждый элемент $f \in \mathfrak{g}^*$ имеет поляризацию $\mathfrak{p}$ (то есть подалгебру, которая является максимальным изотропным подпространством для кососимметрической билинейной формы $f([x, y])$). Неприводимое представление, ассоциированное с коприсоединенной орбитой $\Omega(f)$, индуцировано с одномерного представления

$$\xi(\exp(x)) = e^{2\pi i f(x)}, \quad \text{где} \quad x \in \mathfrak{p},$$

подгруппы $\exp(\mathfrak{p})$.

2.1. Случай четного n**.** Пусть $n = 2k$. Представим общий элемент $g \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ в виде блочной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22} \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где C_{ij} – блоки размера $k \times k$. На всякой регулярной коприсоединенной орбите группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$, где $n = 2k$, существует единственный элемент вида

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \Lambda & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & \lambda_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{4}$$

где $\lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{R}$, причем $\lambda_1, \ldots, \lambda_{k-1} \neq 0$ (см. [4, §3]). Для любого $1 \leqslant s \leqslant k$ обозначим

1) $\Delta_s = \begin{vmatrix} c_{s,1} & \dots & c_{s,k-s+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{k,1} & \dots & c_{k,k-s+1} \end{vmatrix}$ – левый нижний минор блока $C_{12} = (c_{ij})_{i,j=1}^k$.

2) $P_s = \frac{(-1)^{k-s}\Delta_s}{\Delta_{s+1}}$.

Теорема 1 (см. [1])**.** *Пусть $n = 2k$. Характер неприводимого представления, соответствующего орбите элемента $f \in \mathfrak{ut}(n,\mathbb{R})^*$ из (4), имеет вид*

$$\chi(g) = \delta(C_{11}, C_{22})\chi_\Lambda^*(C_{12}), \tag{5}$$

где

$$\chi_\Lambda^*(C_{12}) = \frac{e^{2\pi i(\lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_k P_k)}}{\mu_0 \cdot |\Delta_2\Delta_3 \cdots \Delta_k|}, \quad \mu_0 = |\lambda_1^{k-1}\lambda_2^{k-2}\cdots\lambda_k^0|.$$

Доказательство. Подалгебра $\begin{pmatrix} 0 & * \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ является поляризацией для f. Неприводимое представление, соответствующее орбите $\Omega(f)$, индуцировано с одномерного представления $e^{2\pi i(\Lambda,B)}$ подгруппы

$$\left\{ \exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Это представление реализуется в пространстве $L^2(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ состоит из матриц $X = \operatorname{diag}(X_{11}, X_{22})$ с блоками из UT$(k,\mathbb{R})$, по формуле

$$T_g F(X) = e^{2\pi i\left(\Lambda, X_{11}C_{12}(X_{22}C_{22})^{-1}\right)} F(X_{11}C_{11}, X_{22}C_{22}).$$

Оператор T_g продолжается до оператора

$$T_\varphi F(X) = \int \varphi(C_{11}, C_{12}, C_{22}) e^{2\pi i\left(\Lambda, X_{11}C_{12}(X_{22}C_{22})^{-1}\right)} F(X_{11}C_{11}, X_{22}C_{22})\, dC_{11}dC_{12}dC_{22}.$$

После замены $Y_{11} = X_{11}C_{11}$, $Y_{22} = X_{22}C_{22}$ получаем запись оператора T_φ в форме (2):

$$T_\varphi F(X) = \int \varphi(X_{11}^{-1}Y_{11}, C_{12}, X_{22}^{-1}Y_{22}) e^{2\pi i\left(\Lambda, X_{11}C_{12}Y_{22}^{-1}\right)} F(Y_{11}, Y_{22})\, dY_{11}dY_{22}dC_{12}.$$

Тогда

$$(\chi,\varphi)=\int\varphi(E,C_{12},E)e^{2\pi i\left(\Lambda,X_{11}C_{12}X_{22}^{-1}\right)}dX_{11}dX_{22}dC_{12}.$$

После замены X_{22}^{-1} на X_{22} получаем

$$\chi(g)=\delta(C_{11},C_{22})\int e^{2\pi i(\Lambda,X_{11}C_{12}X_{22})}dX_{11}dX_{22}. \tag{6}$$

Пусть X_{11}, X_{22} – унитреугольные матрицы порядка k с элементами x_{ij}, y_{ij}, $1\leqslant i<j\leqslant k$ соответственно.

Для любых $1\leqslant s\leqslant k$ и $1\leqslant j\leqslant k-s+1$ введем следующие обозначения

$$\widetilde{c}_{s,j}=c_{s,j}+x_{s,s+1}c_{s+1,j}+\dots+x_{s,k}c_{k,j},$$

$$\chi_s(g)=\int e^{2\pi i\lambda_s(\widetilde{c}_{s,1}y_{1,k-s+1}+\dots+\widetilde{c}_{s,k-s}y_{k-s,k-s+1}+\widetilde{c}_{s,k-s+1})}\,dx_s\,dy_s, \tag{7}$$

где $dx_s=dx_{s,s+1}\dots dx_{s,k}$ и $dy_s=dy_{1,k-s+1}\dots dy_{k-s,k-s+1}$. С учетом (7) формула (6) переписывается как

$$\chi(g)=\delta(C_{11},C_{22})\prod_{s=1}^{k}\chi_s(g). \tag{8}$$

Применяя в (7) хорошо известное равенство

$$\int e^{2\pi i\lambda(a,x)}dx=\delta(a)\frac{1}{|\lambda|},$$

получаем

$$\chi_s(g)=\frac{1}{|\lambda_s|^{k-s}}\int\delta(\widetilde{c}_{s,1},\dots,\widetilde{c}_{s,k-s})e^{2\pi i\lambda_s\widetilde{c}_{s,k-s+1}}\,dx_s. \tag{9}$$

Пусть $(x^0_{s,s+1},\dots,x^0_{s,k})$ – решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases}\widetilde{c}_{s,1}=c_{s,1}+x_{s,s+1}c_{s+1,1}+\dots+x_{s,k}c_{k,1}=0,\\ \dots\\ \widetilde{c}_{s,k-s}=c_{s,k-s}+x_{s,s+1}c_{s+1,k-s}+\dots+x_{s,k}c_{k,k-s}=0.\end{cases} \tag{10}$$

Обозначим

$$P'_s=c_{s,k-s+1}+x^0_{s,s+1}c_{s+1,k-s+1}+\dots+x^0_{s,k}c_{k,k-s+1}.$$

Введем новую переменную $x_{s,s}$. Набор $(1, x^0_{s,s+1}, \dots, x^0_{s,k})$ является решением системы линейных уравнений

$$\left\{\begin{array}{l} x_{s,s}c_{s,1} + x_{s,s+1}c_{s+1,1} + \dots + x_{s,k}c_{k,1} = 0, \\ \dots \\ x_{s,s}c_{s,k-s} + x_{s,s+1}c_{s+1,k-s} + \dots + x_{s,k}c_{k,k-s} = 0, \\ x_{s,s}c_{s,k-s+1} + x_{s,s+1}c_{s+1,k-s+1} + \dots + x_{s,k}c_{k,k-s+1} = P'_s. \end{array}\right. \tag{11}$$

Применяя к (11) формулы Крамера, получаем

$$1 = \frac{(-1)^{k-s}\Delta_{s+1}P'_s}{\Delta_s}.$$

Отсюда

$$P'_s = \frac{(-1)^{k-s}\Delta_s}{\Delta_{s+1}} = P_s, \quad \chi_s(g) = \frac{1}{|\lambda_s|^{k-s}|\Delta_{s+1}|}e^{2\pi i\lambda_s P_s}.$$

Подставляя $\chi_s(g)$ в (8), получаем формулу для регулярного характера в случае четного n. □

2.2. Случай нечетного n. Пусть $n = 2k+1$. Представим общий элемент $g \in \mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ в виде блочной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ 0 & 1 & C_{23} \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \tag{12}$$

где разбиение на блоки соответствует разбиению $(k,1,k)$ строк и столбцов. На всякой регулярной орбите группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$, где $n = 2k+1$, существует единственный элемент вида

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \Lambda & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \Lambda = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \lambda_k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \tag{13}$$

и $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}^*$ (см. [4, §3]).

Теорема 2 (см. [1]). *Пусть $n = 2k+1$. Характер неприводимого представления, соответствующего орбите элемента $f \in \mathrm{ut}(n,\mathbb{R})^*$ из (13), имеет вид*

$$\chi(g) = \delta(C_{11}, C_{33}, C_{12}, C_{23})\frac{\chi^*_\Lambda(C_{13})}{|\det\Lambda|}, \tag{14}$$

где g как в (12), $\chi^*_\Lambda(C_{13})$ как в (5).

Доказательство. Подалгебра $\begin{pmatrix} 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ – поляризация для f. Неприводимое представление, соответствующее орбите $\Omega(f)$, индуцировано с одномерного представления $e^{2\pi i(\Lambda, B_{13})}$ подгруппы

$$\left\{ \exp \left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & B_{13} \\ 0 & 0 & B_{23} \\ 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \right\}.$$

Это представление реализуется в пространстве $L^2(\mathcal{X})$, где $\mathcal{X}$ состоит из матриц

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & X_{33} \end{pmatrix}$$

по формуле

$$T_g F(X) \\ = e^{2\pi i \left(\Lambda, (X_{11}C_{13} + X_{12}C_{23})(X_{33}C_{33})^{-1}\right)} F(X_{11}C_{11}, X_{11}C_{13} + X_{12}, X_{33}C_{33}).$$

Рассуждая как в разделе 2.1, мы доказываем, что

$$\chi(g) = \delta(C_{11}, C_{33}, C_{12}) \int e^{2\pi i(\Lambda, (X_{11}C_{13} + X_{12}C_{23})X_{33})} dX_{11}\, dX_{12}\, dX_{33}.$$

Перепишем эту формулу в виде

$$\chi(g) = \delta(C_{11}, C_{33}, C_{12}) \cdot J \cdot \int e^{2\pi i(\Lambda, X_{11}C_{13}X_{33})} dX_{11} dX_{33}, \tag{15}$$

где

$$J = \int e^{2\pi i(\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})} dX_{12}.$$

Покажем, что

$$J = \frac{1}{|\lambda_1 \cdots \lambda_k|} \delta(C_{23}). \tag{16}$$

Пусть

$$X_{12} = \left(\begin{array}{c} x_{1,k+1} \\ \vdots \\ x_{k,k+1} \end{array} \right), \quad C_{23} = (c_1, \ldots, c_k), \quad X_{33} = \left(\begin{array}{cccc} 1 & y_{12} & \ldots & y_{1k} \\ 0 & 1 & \ldots & y_{2k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{array} \right).$$

Тогда

$$(\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33}) = \sum_{s=1}^{k} \lambda_s M_s,$$

где

$$M_s = x_{s,k+1}\left(c_1 y_{1,k-s+1} + \cdots + c_{k-s} y_{k-s,k-s+1} + c_{k-s+1}\right).$$

В частности, $M_k = x_{k,k+1}c_1$, $M_{k-1} = x_{k-1,k+1}\left(c_1 y_{12} + c_2\right)$. Обозначим

$$(\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_t = \sum_{s=t}^{k} \lambda_s M_s,$$

$$J_t = \int e^{2\pi i (\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_t}\, dx_{t,k+1}\cdots dx_{k,k+1}.$$

Заметим, что

$$(\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_1 = (\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33}), \quad J_1 = J,$$
$$(\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_t = \lambda_t M_t + (\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_{t+1}.$$

Будем доказывать индукцией по t, двигаясь по убыванию от k до 1, что

$$J_t = \delta(c_1, \ldots, c_{k-t+1})\frac{1}{|\lambda_t \cdots \lambda_k|}. \tag{17}$$

Для $t = k$ получаем

$$J_k = \int e^{2\pi i \lambda_k M_k} dx_{k,k+1} = \int e^{2\pi i \lambda_k x_{k,k+1} c_1} dx_{k,k+1} = \frac{1}{|\lambda_k|}\delta(c_1),$$

что доказывает (17). Предположим, что (17) доказано для $t+1$; докажем для t:

$$J_t = \int e^{2\pi i (\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_t}\, dx_{t,k+1}\cdots dx_{k,k+1}$$
$$= \int e^{2\pi i \lambda_t M_t}\left(\int e^{2\pi i (\Lambda, X_{12}C_{23}X_{33})_{t+1}}\, dx_{t+1,k+1}\ldots dx_{k,k+1} dx_{t,k+1}\right) dx_{t,k+1}$$
$$= \int e^{2\pi i \lambda_t M_t}\delta(c_1, \ldots, c_{k-t})\frac{1}{|\lambda_{t+1}\cdots\lambda_k|} dx_{t,k+1}$$
$$= \delta(c_1, \ldots, c_{k-t+1})\frac{1}{|\lambda_t \cdots \lambda_k|}.$$

Это доказывает (17). Подставляем (17) в (15). Вычисление интеграла (15) завершается аналогично вычислениям в разделе 2.1. □

§3. Субрегулярные характеры

3.1. Случай четного n. Пусть $n = 2(k+m+2)$. Разобьем строки и столбцы на блоки $(m,1,1,k,k,1,1,m)$. Общий элемент $g \in \mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ записывается в виде блочной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ 0 & 0 & 1 & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{67} & C_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{88} \end{pmatrix}. \qquad (18)$$

Из [4, §3] вытекает, что на всякой субрегулярной коприсоединенной орбите группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$, где $n = 2(k+m+2)$, существует единственный элемент вида

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (19)$$

где Λ_1 (соотв. Λ_2) – квадратная матрица вида (4) порядка m (соотв. k). Все элементы побочной диагонали матрицы Λ_1 и γ_1, γ_2 отличны от нуля. Все элементы побочной диагонали матрицы Λ_2, кроме последнего (см. (4)), отличны от нуля.

Обозначим через E_{ij} множество всех матричных единиц, соответствующих блоку C_{ij}, где $i < j$. Пусть E_{ii} – множество всех матричных единиц, лежащих выше диагонали в блоке C_{ii}.

Обозначим через E'_{45} и E'_{18} наборы матричных единиц, соответствующих элементам побочной диагонали в блоках C_{45} и C_{18}.

Следующая лемма доказывается прямым вычислением.

Лемма 1. (1) *Стабилизатор $\mathfrak{g}^f$ в алгебре Ли $\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(n,\mathbb{R})$ – подпространство, натянутое на*

$$E'_{45}, E'_{18}, E_{26}, E_{27}, E_{37}, \gamma_2 E_{23} + \gamma_1 E_{67}; \qquad (20)$$

(2) *Стабилизатор* G^f *в группе Ли* $G = \mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ *равен* $E + \mathfrak{g}^f$.

Составим следующую таблицу размера 8×8 . В ней символом "X" отмечены те клетки (a,b), для которых $E_{a,b}$ встречается в (20).

Таблица 1

	•		•		•		X
		X			X	X	
			•		•	X	•
				X			
					•		•
						X	
							•

Для любого элемента c матрицы (18), лежащего в одном из блоков, отмеченных в Таблице 1 символом "•", или в блоке C_{18}, определим рациональную функцию $\widetilde{c}$ следующим образом. Обозначим $\Phi = \{(2,3),\ (4,5),\ (6,7)\}$. Пусть c – элемент блока C_{ij} и $\Phi(c)$ – множество тех пар $(a,b) \in \Phi$, для которых $a > i$ и $b < j$. Пусть $\Delta(c)$ – минор матрицы (18), строки и столбцы которого входят в пары из $\Phi(c)$. Пусть $\widetilde{\Delta}(c)$ – минор матрицы $\Delta(c)$, полученный присоединением к строкам (соотв. столбцам) минора $\Delta(c)$ строки (соотв. столбца) элемента c. Положим

$$\widetilde{c} = \pm\Delta(c)^{-1}\widetilde{\Delta}(c), \tag{21}$$

где знак $\pm$ совпадает со знаком элемента c в миноре $\widetilde{\Delta}(c)$. Например, если $m = k = 1$ (т.е. каждый блок C_{ij} – матричный элемент c_{ij}), то

$$\widetilde{c}_{12} = c_{12}, \quad \widetilde{c}_{34} = c_{34}, \quad \widetilde{c}_{56} = c_{56}, \quad \widetilde{c}_{78} = c_{78}, \quad \widetilde{c}_{14} = -c_{23}^{-1}\begin{vmatrix} c_{13} & c_{14} \\ c_{23} & c_{24} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{c}_{36} = -c_{45}^{-1} \begin{vmatrix} c_{35} & c_{36} \\ c_{45} & c_{46} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{c}_{58} = -c_{67}^{-1} \begin{vmatrix} c_{57} & c_{58} \\ c_{67} & c_{68} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{c}_{16} = c_{23}^{-1} c_{45}^{-1} \begin{vmatrix} c_{13} & c_{15} & c_{16} \\ c_{23} & c_{25} & c_{26} \\ 0 & c_{45} & c_{46} \end{vmatrix}, \quad \widetilde{c}_{38} = c_{45}^{-1} c_{67}^{-1} \begin{vmatrix} c_{35} & c_{37} & c_{38} \\ c_{45} & c_{47} & c_{48} \\ 0 & c_{67} & c_{68} \end{vmatrix},$$

$$\widetilde{c}_{18} = -c_{23}^{-1} c_{45}^{-1} c_{67}^{-1} \begin{vmatrix} c_{13} & c_{15} & c_{17} & c_{18} \\ c_{23} & c_{25} & c_{27} & c_{28} \\ 0 & c_{45} & c_{47} & c_{48} \\ 0 & 0 & c_{67} & c_{68} \end{vmatrix}.$$

Введем обозначения:

1) $S_0 = \{E_{11}, E_{44}, E_{55}, E_{88}\}$;

2) S_1 – множество рациональных функций вида $\widetilde{c}$, где c пробегает матричные элементы в блоках, отмеченных в Таблице 1 символом “•”;

3) $\widetilde{C}_{35} = C_{35} + C_{23}^{-1} C_{24} C_{45}$, $\widetilde{C}_{46} = C_{46} + C_{45} C_{57} C_{67}^{-1}$;

4) $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij}$ для матричных элементов из блоков, не указанных в пунктах 2) и 3);

5) $S_2 = \{\widetilde{C}_{35}, \widetilde{C}_{46}, \gamma_1 C_{23} - \gamma_2 C_{67}\}$;

6) $S = \{S_0, S_1, S_2\}$;

7) $d(g) = \det C_{23} \cdot \det C_{45} \cdot \det C_{67}$.

Заметим, что согласно разбиению на блоки (18) блоки C_{23}, C_{67} имеют порядок 1 и $\det C_{23} = C_{23}$, $\det C_{67} = C_{67}$.

Алгебра $\mathbb{R}[G]$ регулярных функций на группе $G = \mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ допускает локализацию $\mathbb{R}'[G]$ по системе знаменателей, порожденной $d(g)$. Элементы $\det C_{23}$, $\det C_{45}$, $\det C_{67}$ являются инвариантами присоединенного представления групп G в $\mathbb{R}[G]$. Присоединенное представление группы G продолжается до представления в $\mathbb{R}'[G]$.

Можно определить отношение порядка на множестве матричных элементов матрицы (18), таким образом, что любой $\widetilde{c}_{ij}$ будет записываться в виде $\widetilde{c}_{ij} = c_{ij} + p_{ij}$, где p_{ij} – полином Лорана от матричных элементов, меньших чем c_{ij}. Поэтому алгебра $\mathbb{R}'[G]$ является алгеброй многочленов от $\widetilde{c}_{ij}$, локализованной по $d(g)$.

Обозначим через I' – идеал в $\mathbb{R}'[G]$, порожденный S. Поскольку S состоит из образующих элементов $\widetilde{c}_{ij}$ и одной их линейной комбинации, идеал I' простой. Множество нулей идеала I' является неприводимым подмножеством в $G' = \{g \in G : \ d(g) \neq 0\}$.

Предложение 1. *Пусть f имеет вид* (19). *Тогда замыкание в G множества нулей идеала I' совпадает с замыканием множества $\mathrm{Ad}_G(G^f)$.*

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что функции из S аннулируются на G^f. Непосредственно проверяется, что идеал I' инвариантен относительно Ad_G и, следовательно, $\mathrm{Ann}(I') \supset \mathrm{Ad}_G(G^f) \cap G'$. Множество $\mathrm{Ann}(I')$ неприводимо и имеет размерность, равную $\frac{n(n-1)}{2} - |S|$. Размерность множества $\mathrm{Ad}_G(G^f) \cap G'$ совпадает с размерностью подпространства $[\mathfrak{g}^f, \mathfrak{g}]$. Непосредственным вычислением показывается, что $\dim[\mathfrak{g}^f, \mathfrak{g}] = \frac{n(n-1)}{2} - |S|$. □

Теорема 3. *Пусть $n = 2(k+m+2)$. Характер неприводимого представления, соответствующего орбите элемента $f \in \mathfrak{ut}(n,\mathbb{R})^*$ из* (19), *имеет вид*

$$\chi(g) = \delta(S) \cdot \chi^*_{\Lambda_1}(\widetilde{C}_{18}) \cdot \chi^*_{\Lambda_2}(C_{45}) \cdot \chi^*_0(g), \tag{22}$$

где $\chi^*_{\Lambda_2}(C_{45})$ как в (5), *матрица $\widetilde{C}_{18}$ составлена из элементов $\widetilde{c}$, где c – соответствующий матричный элемент блока C_{18} (см.* (21)), *$\chi^*_{\Lambda_1}(\widetilde{C}_{18})$ как в* (5), *и*

$$\chi^*_0(g) = \frac{1}{|\gamma_1\gamma_2|^k \cdot d(g)^m} e^{2\pi i\left(\frac{\gamma_1}{C_{67}}Q_0 + \gamma_3 C_{67}\right)},$$

$$Q_0 = c_{23}c_{37} + c_{24}c_{47} + c_{25}c_{57} + c_{26}c_{67}.$$

Заметим, что поскольку элемент $\gamma_1 C_{23} - \gamma_2 C_{67}$ содержится в S, то в формуле для $\chi^*_0(g)$ можно заменить $\frac{\gamma_1}{C_{67}}$ на $\frac{\gamma_2}{C_{23}}$.

Схема доказательства.

Пункт 1. Частный случай $m = 0$. Разбиение строк и столбцов на блоки имеет вид $(1,1,k,k,1,1)$. Общий элемент $g \in G = \mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ и $f_0 \in \mathfrak{g}^*$ записываются в виде блочных матриц

$$g = \begin{pmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ 0 & 0 & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda & 0 & 0 & 0 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим подгруппу B, состоящую из матриц

$$b = \begin{pmatrix} 1 & b_{12} & b_{13} & b_{14} & b_{15} & b_{16} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & b_{26} \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} & 0 & b_{36} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & 0 & b_{46} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\pi_\Lambda(b_1)$ – неприводимое представление из раздела 2.1 унитреугольной группы B_1, состоящей из матриц $b_1 = \begin{pmatrix} b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{44} \end{pmatrix}$.

Неприводимое представление $T_g^{f_0}$, соответствующее $f_0 \in \mathfrak{g}^*$, индуцировано с представления

$$e^{2\pi i(\gamma_1 b_{15} + \gamma_2 b_{26} + \gamma_3 b_{56})}\pi_\Lambda(b_1)$$

подгруппы B. Прямые вычисления в духе раздела 2.1 приводят к доказательству формулы (22) для частного случая $m = 0$.

Пункт 2. Частный случай $m = 1$. Разбиение строк и столбцов на блоки имеет вид $(1, 1, 1, k, k, 1, 1, 1)$. Общий элемент группы $g \in G =$

$\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ и $f \in \mathfrak{g}^*$ записываются в виде блочных матриц

$$g = \begin{pmatrix} 1 & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} \\ 0 & 0 & 1 & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & C_{56} & C_{57} & C_{58} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{67} & C_{68} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{78} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где $\lambda_1 \in \mathbb{R}^*$.

Рассмотрим подгруппу B_*, состоящую из матриц вида

$$b_* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_{15} & b_{16} & b_{17} & b_{18} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} & b_{25} & b_{26} & b_{27} & b_{28} \\ 0 & 0 & 1 & b_{34} & b_{35} & b_{36} & b_{37} & b_{38} \\ 0 & 0 & 0 & b_{44} & b_{45} & b_{46} & b_{47} & b_{48} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_{55} & b_{56} & b_{57} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Пусть b'_* – матрица, полученная из b_* вычеркиванием первой строки и последнего столбца, B'_* – группа матриц такого вида. Пусть $T^{f_0}(b'_*)$ – неприводимое представление группы B'_* из пункта 1. Неприводимое представление T^f_g, соответствующее $f \in \mathfrak{g}^*$, индуцировано с представления

$$e^{2\pi i(\lambda_1 b_{18})} T^{f_0}(b_*)$$

подгруппы B. Прямые вычисления в духе §2.1 приводят к доказательству формулы (22) для частного случая $m = 1$.

Пункт 3. Случай произвольного m. Рассмотрим нормальную подгруппу B_m, состоящую из тех $g \in G$, для которых $C_{11} = C_{88} = E$. Характер χ_m неприводимого представления подгруппы B_m, соответствующий ограничению f на $\mathrm{Lie}(B_m)$, вычисляется аналогично пункту 2. Характер χ индуцирован с характера χ_m подгруппы B_m. Вычисление характера аналогично разделу 2.1. $\square$

3.2. Случай нечетного n. Пусть $n = 2(k + m + 2) + 1$. Разобьем строки и столбцы на блоки $(m, 1, 1, k, 1, k, 1, 1, m)$. Общий элемент $g \in \mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$ записывается в виде блочной матрицы

$$g = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} & C_{17} & C_{18} & C_{19} \\ 0 & 1 & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} & C_{27} & C_{28} & C_{29} \\ 0 & 0 & 1 & C_{34} & C_{35} & C_{36} & C_{37} & C_{38} & C_{39} \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & C_{45} & C_{46} & C_{47} & C_{48} & C_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{56} & C_{57} & C_{58} & C_{59} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & C_{67} & C_{68} & C_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{78} & C_{79} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & C_{89} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{99} \end{pmatrix}. \qquad (23)$$

На всякой субрегулярной орбите группы $\mathrm{UT}(n, \mathbb{R})$, где $n = 2(k+m)+5$, существует единственный элемент вида

$$f = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \Lambda_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_2 & 0 & 0 & 0 & \gamma_3 & 0 & 0 \\ \Lambda_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (24)$$

где Λ_1 (соотв. Λ_2) – матрица вида (4) порядка m (соотв. k). Все элементы побочных диагоналей матриц Λ_1, Λ_2 и γ_1, γ_2 отличны от нуля.

Наборы матричных единиц E_{ij}, E'_{46}, E'_{19} определяются по блокам C_{ij}, C_{46}, C_{19} аналогично тому, как это делалось в разделе 3.1.

Лемма 2. (1) *Стабилизатор* $\mathfrak{g}^f$ *в алгебре Ли* $\mathfrak{g} = \mathfrak{ut}(n, \mathbb{R})$ – *подпространство, натянутое на*

$$E'_{46}, E'_{19}, E_{27}, E_{28}, E_{38}, \gamma_2 E_{23} + \gamma_1 E_{78}. \qquad (25)$$

(2) *Стабилизатор* G^f *в группе Ли* $G=\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ *равен* $E+\mathfrak{g}^f$.

Составим следующую таблицу (Таблица 2) размера 9×9. В ней символом “X” отмечены те клетки (a,b), для которых $E_{a,b}$ встречается в (25).

Таблица 2

	•		•	•		•		X
		X				X	X	
			•	•		•	X	•
				•	X			
					•	•		•
						•		•
							X	
								•

Обозначим $\Phi'=\{(2,3),\ (4,6),\ (7,8)\}$. Для любого элемента c матрицы (23), лежащего в одном из блоков, отмеченных в Таблице 2 символом “•”, или в блоке C_{19}, определим рациональную функцию $\widetilde{c}$, аналогично (21).

Введем обозначения:

1) $S_0=\{E_{11},E_{44},E_{66},E_{99}\}$;

2) S_1 – множество рациональных функций вида $\widetilde{c}$, где c пробегает матричные элементы в блоках, отмеченных в Таблице 2 символом “•”;

3) $S_2=\{C_{36}+C_{23}^{-1}C_{24}C_{46};\ C_{47}+C_{46}C_{68}C_{78}^{-1},\ \gamma_1 C_{23}-\gamma_2 C_{78}\}$;

4) $S=\{S_0,S_1,S_2\}$;

5) $d_1(g)=\det C_{23}\cdot\det C_{46}\cdot\det C_{78}$.

Алгебра $\mathbb{R}[G]$ регулярных функций на группе $G=\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$ допускает локализацию $\mathbb{R}'[G]$ по системе знаменателей, порожденной $d_1(g)$. Обозначим через I' идеал в $\mathbb{R}'[G]$, порожденный S; заметим, что $\mathrm{Ann}(I')\subset\{g\in G\ :\ d_1(g)\neq 0\}$.

Предложение 2. *Пусть f имеет вид* (24). *Тогда замыкание в G множества нулей идеала I' совпадает с замыканием множества* $\mathrm{Ad}_G(G^f)$.

Доказательство. Аналогично предложению 1. □

Теорема 4. *Пусть $n = 2(k+m)+5$. Характер неприводимого представления, соответствующего орбите элемента $f \in \mathfrak{ut}(n,\mathbb{R})^*$ из* (24), *имеет вид*

$$\chi(g) = \delta(S) \cdot \chi^*_{\Lambda_1}(\widetilde{C}_{19}) \cdot \frac{\chi^*_{\Lambda_2}(C_{46})}{|\det \Lambda_2|} \cdot \chi^*_1(g). \tag{26}$$

Здесь $\chi^*_{\Lambda_2}(C_{46})$ как в (5), матрица $\widetilde{C}_{19}$ составлена из элементов $\widetilde{c}$, где c – соответствующий матричный элемент блока C_{19} (см. (21)), $\chi^*_{\Lambda_1}(\widetilde{C}_{19})$ как и в (5), и

$$\chi^*_1(g) = \frac{1}{|\gamma_1\gamma_2|^k \cdot |\gamma_1 c_{23}| \cdot d_1(g)^m} e^{2\pi i\left(\frac{\gamma_1}{C_{67}} Q_1 + \gamma_3 C_{67}\right)},$$

$$Q_1 = c_{23}c_{38} + c_{24}c_{48} + c_{25}c_{58} + c_{26}c_{68} + c_{27}c_{78}.$$

Доказательство аналогично теореме 3.

Теорема 5. *Гипотеза* 1 *справедлива для регулярных и субрегулярных характеров группы* $\mathrm{UT}(n,\mathbb{R})$.

Доказательство. Начнем со случая регулярных характеров. Для четного n стабилизатор $\mathfrak{g}^f$ линейно порождается матричными единицами побочной диагонали в блоке C_{12} (см. формулу (3)). Замыкание множества $\mathrm{Ad}_G(\mathfrak{g}^f)$ совпадает с множеством $\left\{\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$. Соответственно, замыкание множества $\mathrm{Ad}_G(G^f)$ совпадает с множеством $\left\{\exp\begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$, которое в силу формулы (5) является носителем всех регулярных характеров. Случай нечетного n рассматривается аналогично.

Утверждение для субрегулярных характеров вытекает из предложений 1, 2 и теорем 3, 4. □

Литература

1. А. А. Кириллов, *Унитарные представления нильпотентных групп Ли.* — УМН, **17**, No. 4, 57–110 (1962).
2. А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит.* Научная книга, Новосибирск, 2002.

3. М. В. Игнатьев, *Субрегулярные характеры унитреугольной группы над конечным полем.* — Фунд. и прикл. матем. **13**, No. 5, 103–125 (2007); см. также `arXiv:0801.3079`.
4. М. В. Игнатьев, А. Н. Панов, *Коприсоединенные орбиты группы* $UT(7,K)$. — Фунд. и прикл. мат. **13**, No. 5, 127–159 (2007); см. также `arXiv:math/0603649`.

Panov A. N., Suray E. V. Subregular characters of the group UT($n,\mathbb{R}$).

The formulas for subregular characters of the unitriangular Lie group are obtained. The supports of regular and subregular characters are described in terms of the orbit method.

Самарский государственный университет, кафедра алгебры и геометрии, ул. Акад. Павлова, 1443011 Самара, Россия

E-mail: `apanov@list.ru`

Поступило 23 сентября 2012 г.