Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 414, 2013 г.

А. Н. Панов

МЕТОД ОРБИТ ДЛЯ УНИПОТЕНТНЫХ ГРУПП НАД КОНЕЧНЫМ ПОЛЕМ

Согласно методу А. А. Кириллова (см. [1, 2]), существует взаимно однозначное соответствие между неприводимыми представлениями произвольной связной, односвязной нильпотентной группы Ли и ее коприсоединенными орбитами. Это соответствие между орбитами и представлениями дает возможность решать задачи теории представлений в геометрических терминах соответствующих орбит. Начиная с 1962 года, методу орбит посвящены многочисленные исследования. Выяснилось, что идеи метода орбит применимы к более широкому классу групп Ли (см. [3, 4]), а также к некоторым матричным группам, определенным над конечным полем.

В нашей работе получена формула для кратностей некоторых представлений унипотентных групп над конечным полем в терминах коприсоединенных орбит (см. теорему 3 и следствия). Для удобства читателя в работе сформулированы и доказаны основные положения метода орбит применительно к конечному полю (см. [5, 6]).

Пусть $K = \mathbb{F}_q$ – конечное поле характеристики p из $q = p^m$ элементов. Пусть $\mathfrak{g}$ – подалгебра в алгебре Ли $\mathfrak{ut}(N,K)$, состоящей из верхнетреугольных матриц с нулями по диагонали. Предположим, что p настолько велико, что на $\mathfrak{g}$ определено экспоненциальное отображение $\exp(x)$. Например, это достигается для $p \geqslant N$. Тогда экспоненциальное отображение является биекцией алгебры Ли $\mathfrak{g}$ на подгруппу $G = \exp(\mathfrak{g})$ унитреугольной группы $\mathrm{UT}(N,K)$. Определено присоединенное представление группы G в $\mathfrak{g}$ по формуле $\mathrm{Ad}_g(x) = gxg^{-1}$.

Обозначим через $\mathfrak{g}^*$ сопряженное пространство для $\mathfrak{g}$. Определено коприсоединенное представление группы G в $\mathfrak{g}^*$ по формуле $\mathrm{Ad}^*_g\lambda(x) = \lambda(\mathrm{Ad}_g^{-1}x)$.

Заметим, что если $\mathfrak{g}^\lambda$ – стабилизатор элемента $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, то подгруппа $G^\lambda = \exp(\mathfrak{g}^\lambda)$ – стабилизатор λ в G. Число элементов $|\Omega|$ в орбите

Ключевые слова: представления групп, характеры представлений, метод орбит.

Работа поддержана грантами РФФИ 12-01-00070 и 12-01-00137.

$\Omega = \mathrm{Ad}^*_G(\lambda)$ вычисляется по формуле

$$|\Omega| = \frac{|G|}{|G^\lambda|} = \frac{|\mathfrak{g}|}{|\mathfrak{g}^\lambda|} = q^{\dim\mathfrak{g} - \dim\mathfrak{g}^\lambda} = q^{\frac{1}{2}\dim\Omega}. \qquad (1)$$

Определение 1. *Подалгебру $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{g}$ будем называть поляризацией для $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, если $\mathfrak{p}$ – максимальное изотропное подпространство для кососимметрической билинейной формы $B_\lambda(x,y) = \lambda([x,y])$ на $\mathfrak{g}$. Напомним, что подпространство $\mathfrak{p}$ изотропно, если $B_\lambda(x,y) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{p}$.*

Заметим, что поляризация всегда содержит стабилизатор $\mathfrak{g}^\lambda$, поскольку $\mathfrak{p} + \mathfrak{g}^\lambda$ – изотропное подпространство.

Предложение 1. *Для любой линейной формы λ на нильпотентной алгебре Ли $\mathfrak{g}$ существует поляризация.*

Доказательство. Используем индукцию по размерности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. Для одномерных алгебр Ли утверждение очевидно: сама алгебра Ли является поляризацией. Предположим, что утверждение доказано для алгебр Ли размерностей меньше $\dim(\mathfrak{g})$. Докажем для $\dim(\mathfrak{g})$.

Если размерность центра $\mathfrak{z}$ алгебры Ли $\mathfrak{g}$ больше единицы, то существование поляризации можно доказать, применяя предположение индукции к фактору $\mathfrak{g}$ по идеалу $\mathrm{Ker}(\lambda|_\mathfrak{z})$. Аналогично рассматривается случай, когда $\dim(\mathfrak{z}) = 1$, $\lambda|_\mathfrak{z} = 0$.

Пусть $\mathfrak{z} = Kz$ и $\lambda(z) \neq 0$. Рассмотрим двумерный идеал $Ky + Kz$, содержащий $\mathfrak{z}$. Существует характер α алгебры Ли $\mathfrak{g}$, такой что $\mathrm{ad}_u(y) = \alpha(u)z$ для любого $u \in \mathfrak{g}$. Ядро $\mathfrak{g}_0$ характера α является идеалом коразмерности один в $\mathfrak{g}$. Существует $x \in \mathfrak{g}$, такой, что $\mathfrak{g} = Kx + \mathfrak{g}_0$ и $[x,y] = z$.

Обозначим через λ_0 ограничение λ на $\mathfrak{g}_0$. Согласно предположению индукции, λ_0 имеет поляризацию $\mathfrak{p}_0$ в $\mathfrak{g}_0$. Покажем, что $\mathfrak{p}_0$ является также поляризацией для λ в $\mathfrak{g}$. Действительно, $\mathfrak{p}_0$-подалгебра и максимальное изотропное подпространство в $\mathfrak{g}_0$; осталось показать, что $\mathfrak{p}_0$ – максимальное изотропное в $\mathfrak{g}$. Допустим, что $\mathfrak{p}_0$ можно расширить до изотропного подпространства присоединением элемента $x + u_0$, где $u_0 \in \mathfrak{g}_0$. Заметим, что z, y содержатся в стабилизаторе $\mathfrak{g}_0^{\lambda_0} \subset \mathfrak{p}_0$. Тогда $0 = \lambda([x + u_0, y]) = \lambda([x,y]) = \lambda(z) \neq 0$. Противоречие. $\square$

Предложение 2. *Пусть $\mathfrak{p}$ – поляризация для $\lambda \in \mathfrak{g}^*$, $P = \exp(\mathfrak{p})$, $\Omega(\lambda)$ – коприсоединенная орбита λ, π – естественная проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{p}^*$, $L^\lambda = \pi^{-1}\pi(\lambda)$. Тогда*

1) $\dim \mathfrak{p} = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} + \dim \mathfrak{g}^\lambda\right)$;
2) $|L^\lambda| = \sqrt{|\Omega(\lambda)|}$;
3) $L^\lambda = \mathrm{Ad}^*_P\lambda$, *в частности,* $L^\lambda \subset \Omega(\lambda)$.

Доказательство. Утверждение пункта 1) вытекает из формулы для размерности максимального изотропного подпространства кососимметрической билинейной формы $B_\lambda(x,y)$. Из 1) получаем

$$\operatorname{codim} \mathfrak{p} = \frac{1}{2}\left(\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^\lambda\right) = \frac{1}{2}\dim \Omega(\lambda).$$

Отсюда вытекает утверждение пункта 2):

$$|L^\lambda| = q^{\operatorname{codim} \mathfrak{p}} = q^{\frac{1}{2}\dim \Omega(\lambda)} = \sqrt{|\Omega(\lambda)|}.$$

Так как $\lambda([x,y]) = 0$ для любых $x, y \in \mathfrak{p}$, то $\mathrm{ad}^*_{\mathfrak{p}}\lambda(y) = 0$ для любого $y \in \mathfrak{p}$. Тогда $\mathrm{Ad}^*_P\lambda(y) = \lambda(y)$ для любого $y \in \mathfrak{p}$. Что равносильно

$$\mathrm{Ad}^*_P\lambda \subset L^\lambda.$$

Равенство $\mathrm{Ad}^*_P\lambda = L^\lambda$ вытекает из совпадения количества элементов в этих подмножествах:

$$|\mathrm{Ad}^*_P\lambda| = \frac{|P|}{|G^\lambda|} = q^{\dim \mathfrak{p} - \dim \mathfrak{g}^\lambda} = q^{\frac{1}{2}\dim \Omega(\lambda)} = |L^\lambda|. \qquad \square$$

Зафиксируем нетривиальный характер $e^x : K \to \mathbb{C}^*$. Имеет место

$$\sum_{t \in \mathbb{F}_q} e^{\alpha t} = \begin{cases} q, & \text{если} \quad \alpha = 0, \\ 0, & \text{если} \quad \alpha \neq 0. \end{cases} \tag{2}$$

Равенство (2) легко доказать: образ гомоморфизма e^x – подгруппа в $\mathbb{C}^*$; если $\alpha \neq 0$, то эта подгруппа нетривиальна и, следовательно, совпадает с мультипликативной группой корней некоторой степени $m \neq 1$ из единицы; сумма всех корней степени $m \neq 1$ из единицы равна нулю.

Ограничение λ на поляризацию $\mathfrak{p}$ определяет характер (одномерное представление) ξ группы $P = \exp(\mathfrak{p})$ по формуле

$$\xi_\lambda(\exp(x)) = e^{\lambda(x)}.$$

Рассмотрим индуцированное представление

$$T^\lambda = \mathrm{ind}(\xi_\lambda, P, G). \tag{3}$$

Обозначим через $\chi_\lambda(g) = \mathrm{Tr}\, T^\lambda(g)$ характер представления T^λ.

Теорема 1.
$$\chi_\lambda(g) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu\in\Omega(\lambda)} e^{\mu(\ln(g))}.$$

Доказательство. Продолжим ξ_λ с P на G по формуле
$$\widetilde{\xi}_\lambda(u) = \begin{cases} \xi_\lambda(u), & \text{если} \quad u\in P, \\ 0, & \text{если} \quad u\notin P. \end{cases}$$
Из (2) вытекает, что
$$\widetilde{\xi}_\lambda(u) = \frac{1}{|L^\lambda|}\sum_{\mu\in L^\lambda} \xi_\mu(u) = \frac{1}{|L^\lambda|}\sum_{p\in P}\xi_{\mathrm{Ad}^*_p(\lambda)}(u).$$

Выберем в каждом классе G/P по представителю $\{g_i : i = \overline{1,k}\}$. Применяя известную формулу для вычисления характера индуцированного представления (см. [7, глава 6]), получаем
$$\chi_\lambda(u) = \sum_{g_i^{-1}ug_i\in P} \widetilde{\xi}_\lambda(g_i^{-1}ug_i) = \frac{1}{|L^\lambda|}\sum_{i=1}^{k}\sum_{p\in P}\xi_{\mathrm{Ad}^*_p\lambda}(g_i^{-1}ug_i)$$
$$= \frac{1}{|L^\lambda|}\sum_{i=1}^{k}\sum_{p\in P}\xi_{\mathrm{Ad}^*_{g_ip}\lambda}(u).$$
Окончательно,
$$\chi_\lambda(u) = \frac{1}{|L^\lambda|}\sum_{g\in G}\xi_{\mathrm{Ad}^*_g\lambda}(u) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\sum_{\mu\in\Omega(\lambda)} e^{\mu(\ln(u))}. \qquad \square$$

Теорема 2.
1) $\dim T^\lambda = q^{\frac12 \dim\Omega(\lambda)} = \sqrt{|\Omega|}$.
2) *Представление T^λ не зависит от выбора поляризации.*
3) *Представление T^λ неприводимо.*
4) *Представления T^λ и $T^{\lambda'}$ эквиваленты тогда и только тогда, когда λ и λ' лежат на одной коприсоединенной орбите.*
5) *Для любого неприводимого представления T группы G существует элемент $\lambda\in\mathfrak{g}^*$, такой, что представление T эквивалентно T^λ.*

Доказательство. Утверждение 1) вытекает из
$$\dim T^\lambda = \dim(\mathrm{ind}(\xi_\lambda, P, G)) = q^{\operatorname{codim}\mathfrak{p}}.$$

Утверждение 2) – прямое следствие теоремы 1.

Покажем, что система характеров $\{\chi_\lambda\}$, где λ пробегает множество представителей коприсоединенных орбит, ортонормирована. Пусть Ω, Ω' – две коприсоединенные орбиты и λ, λ' – представители этих орбит. Тогда

$$\begin{aligned}
(\chi_\lambda, \chi_{\lambda'}) &= \frac{1}{|G|} \sum_{u \in G} \chi_\lambda(u) \overline{\chi_{\lambda'}(u)} \\
&= \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\Omega| \cdot |\Omega'|}} \cdot \sum_{\mu \in \Omega, \mu' \in \Omega', u \in G} \xi_\mu(u) \overline{\xi_{\mu'}(u)} \\
&= \frac{1}{|G|} \cdot \frac{1}{\sqrt{|\Omega| \cdot |\Omega'|}} \cdot \sum_{\mu \in \Omega, \mu' \in \Omega', u \in G} e^{(\mu - \mu') \ln(u)}.
\end{aligned}$$

Применяя

$$\sum_{x \in \mathfrak{g}} e^{\eta(x)} = \begin{cases} |G|, & \text{если} \quad \eta = 0, \\ 0, & \text{если} \quad \eta \neq 0, \end{cases}$$

получаем, что если $\Omega \neq \Omega'$, то $(\chi_\lambda, \chi_{\lambda'}) = 0$.

Для случая $\Omega = \Omega'$ получаем

$$(\chi_\lambda, \chi_\lambda) = \frac{1}{|G| \cdot |\Omega|} \sum_{\mu, \mu' \in \Omega} \sum_{x \in \mathfrak{g}} e^{(\mu - \mu')x} = \frac{1}{|G| \cdot |\Omega|} \cdot |\Omega| \cdot |G| = 1.$$

Это доказывает 3) и 4).

Будем использовать обозначение T^Ω для класса эквивалентных неприводимых представлений T^λ, где $\lambda \in \Omega$. Для доказательства 5) проверим, что сумма квадратов размерностей неприводимых представлений $\{T^\Omega : \ \Omega \in \mathfrak{g}^*/G\}$ равна числу элементов в группе:

$$\sum_{\Omega \in \mathfrak{g}^*/G} \left(\dim T^\Omega\right)^2 = \sum_{\Omega \in \mathfrak{g}^*/G} \left(\sqrt{|\Omega|}\right)^2 = \sum_{\Omega \in \mathfrak{g}^*/G} |\Omega| = |\mathfrak{g}^*| = |G|.$$

Что доказывает 5). □

Лемма 1. *Пусть $\mathfrak{g}$ – нильпотентная алгебра Ли, $\mathfrak{g}_0$ – подалгебра в $\mathfrak{g}$ коразмерности один. Тогда $\mathfrak{g}_0$ – идеал в $\mathfrak{g}$.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}_0] \neq \mathfrak{g}_0$; существуют $y \in \mathfrak{g}_0$, $x \notin \mathfrak{g}_0$, такие, что $[x, y] = \alpha x \bmod \mathfrak{g}_0$, $\alpha \neq 0$. Подалгебра $\mathfrak{g}_0$ инвариантна относительно ad_{y_0}. Из $\mathfrak{g} = kx \oplus \mathfrak{g}_0$ вытекает, что оператор ad_{y_0} не является нильпотентным в $\mathfrak{g}/\mathfrak{g}_0$; что противоречит нильпотентности алгебры Ли $\mathfrak{g}$. □

Лемма 2. *Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}_0$ как в лемме 1, π – проекция $\mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_0^*$; $\lambda_0 \in \mathfrak{g}_0^*$, $\omega = \mathrm{Ad}^*_{G_0}(\lambda_0)$, $\mathfrak{g}^{\lambda_0} = \{x \in \mathfrak{g} :\ \lambda_0([x, \mathfrak{g}_0)] = 0\}$.*

1) *Пусть подалгебра $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ содержится в $\mathfrak{g}_0$. Тогда*

1a) *$\pi^{-1}(\lambda_0)$ содержится в одной Ad^*_G-орбите Ω;*

1b) *$\dim\Omega = \dim\omega + 2$ (то есть $|\Omega| = q^2|\omega|$) .*

2) *Пусть подалгебра $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ не содержится в $\mathfrak{g}_0$. Тогда для любой Ad^*_G орбиты Ω, имеющей непустое пересечение с $\pi^{-1}(\lambda_0)$, проекция π устанавливает биекцию между Ω и ω; в частности, $\dim\Omega = \dim\omega$.*

Доказательство. 1) Пусть подалгебра $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ содержится в $\mathfrak{g}_0$. Так как $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \subset \mathfrak{g}_0$, то на алгебре Ли $\mathfrak{g}$ определена кососимметрическая билинейная форма $B_0(x, y) = \lambda_0([x, y])$. Ядро V билинейной формы B_0 совпадает с $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ и содержится в $\mathfrak{g}_0$. Ядро V_0 ограничения B_0 на $\mathfrak{g}_0$ совпадает с $\mathfrak{g}_0^{\lambda_0}$.

Покажем, что существует пара элементов $u \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$ и $v \in V_0$, такие, что $B_0(u, v) = 1$. Действительно, разложим $\mathfrak{g}_0 = L_0 \oplus V_0$, где L_0 – подпространство, ограничение билинейной формы B_0 на которое невырождено. Выберем произвольный элемент $u' \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{g}_0$ и рассмотрим линейную форму $B_0(u', \cdot)$ на L_0. Существует $x_0 \in L_0$, такой, что $B_0(u', \cdot) = B_0(x_0, \cdot)$ на L_0. Для элемента $u = u' - x_0$ выполняется $B_0(u, L_0) = 0$. Так как $u \notin V$, то существует $v \in V_0$, такой, что $B_0(u, v) = 1$.

Прямые вычисления показывают, что для любого $\lambda \in \pi^{-1}(\lambda_0)$ справедливы равенства

$$\begin{cases} \mathrm{Ad}^*_{\exp(tv)}\lambda(u) = \lambda(u) + t, \\ \mathrm{Ad}^*_{\exp(tv)}\lambda(y) = \lambda(y) \quad \text{для любого} \quad y \in \mathfrak{g}_0. \end{cases} \tag{4}$$

Отсюда вытекает утверждение 1a).

Орбита Ω представляет собой объединение

$$\Omega = \bigcup_{t \in K} \pi^{-1}(\omega_t), \tag{5}$$

где $\omega_t = \mathrm{Ad}^*_{\exp(tu)}\omega$ – коприсоединенная орбита в $\mathfrak{g}_0^*$. Покажем, что орбиты ω_t попарно различны. Действительно, в противном случае существуют $t' \neq t'' \in K$ и $g_0', g_0'' \in G_0$, такие, что

$$\mathrm{Ad}^*_{\exp(t'u)}\mathrm{Ad}^*_{g_0'}\lambda_0 = \mathrm{Ad}^*_{\exp(t''u)}\mathrm{Ad}^*_{g_0''}\lambda_0.$$

Тогда

$$\mathrm{Ad}^*_{\exp(tu)}\mathrm{Ad}^*_{g_0}\lambda_0 = \lambda_0,$$

где $t = t' - t'' \in K^*$ и g_0 некоторый элемент из G_0. Тогда стабилизатор $\exp(\mathfrak{g}^{\lambda_0})$ не содержится в G_0, что противоречит предположению пункта 1). Из (5) получаем $|\Omega| = q^2|\omega|$. Поэтому $\dim\Omega = \dim\omega + 2$. Что доказывает 1b).

Перейдем к доказательству пункта 2). Пусть подалгебра $\mathfrak{g}^{\lambda_0}$ не содержится в $\mathfrak{g}_0$. Для произвольного ненулевого элемента x из $\mathfrak{g}^{\lambda_0} \setminus \mathfrak{g}_0$ имеет место разложение $\mathfrak{g} = Kx \oplus \mathfrak{g}_0$. Группа G является полупрямым произведением $G = G_0X$, где $X = \{\exp(tx) : \ t \in K\}$.

Пусть $\lambda \in \pi^{-1}(\lambda_0)$. Из равенства

$$\lambda([x,\mathfrak{g}]) = \lambda([x, Kx \oplus \mathfrak{g}_0]) = \lambda_0([x,\mathfrak{g}_0]) = 0$$

вытекает, что x содержится в $\mathfrak{g}^\lambda$. Подгруппа X лежит в стабилизаторе λ. Орбита $\Omega(\lambda)$ совпадает с $\mathrm{Ad}^*_{G_0}(\lambda)$. Так как проекция $\pi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_0^*$ инвариантна относительно $\mathrm{Ad}^*_{G_0}$, то π проектирует $\Omega(\lambda)$ на ω.

Осталось показать, что

$$\Omega(\lambda) \cap \pi^{-1}(\lambda_0) = \{\lambda\} \tag{6}$$

для любого $\lambda \in \pi^{-1}(\lambda_0)$. Предположим, что $\lambda' = \mathrm{Ad}^*_g\lambda$ и $\lambda, \lambda' \in \pi^{-1}(\lambda_0)$. Из того, что $G = G_0X$ и $X \in G^\lambda$, вытекает $\lambda' = \mathrm{Ad}^*_{g_0}\lambda$ для некоторого $g_0 \in G_0$. Поскольку $\lambda, \lambda' \in \pi^{-1}(\lambda_0)$, то g_0 содержится в стабилизаторе $G_0^{\lambda_0}$. Тогда $g_0 = \exp(y_0)$ для некоторого $y_0 \in \mathfrak{g}_0^{\lambda_0}$. Получаем

$$\lambda'(x) = \lambda(\mathrm{Ad}^*_{\exp(-y_0)}x) = \lambda(x) - \lambda(\mathrm{ad}_{y_0}x) + \sum_{k\geqslant 2}\frac{(-1)^k}{k!}\lambda_0(\mathrm{ad}^k_{y_0}x). \tag{7}$$

Поскольку $x \in \mathfrak{g}^\lambda$, то $\lambda(\mathrm{ad}_{y_0}x) = 0$. Так как $y_0 \in \mathfrak{g}_0^{\lambda_0}$, то $\lambda_0(\mathrm{ad}^k_{y_0}x) = 0$ для всех $k \geqslant 2$. Подставляя в (7), получаем $\lambda'(x) = \lambda(x)$. Учитывая $\lambda, \lambda' \in \pi^{-1}(\lambda_0)$, заключаем, что $\lambda = \lambda'$. □

Лемма 3. *Для любой подалгебры $\mathfrak{h}$ нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ существует цепочка подалгебр $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_0 \supset \mathfrak{g}_1 \supset \ldots \supset \mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}$, таких, что $\mathfrak{g}_{i+1}$ – идеал коразмерности один в $\mathfrak{g}_i$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k-1$.*

Доказательство. Применим метод индукции по $\dim\mathfrak{g}$. Для $\dim\mathfrak{g} = 1$ утверждение очевидно. Предположим, что утверждение доказано для $\dim\mathfrak{g} = n-1$; докажем для n. Нильпотентная алгебра Ли $\mathfrak{g}$ имеет ненулевой центральный элемент z. Рассмотрим проекцию $\phi : \mathfrak{g} \to \overline{\mathfrak{g}} =$

$\mathfrak{g}/Kz$. Образ $\overline{\mathfrak{h}}$ – подалгебра в $\overline{\mathfrak{g}}$. Так как $\dim\overline{\mathfrak{g}} < n$, то, согласно предположению индукции, существует цепочка подалгебр $\overline{\mathfrak{g}} = \overline{\mathfrak{g}}_0 \supset \overline{\mathfrak{g}}_1 \supset \ldots \supset \overline{\mathfrak{g}}_k = \overline{\mathfrak{h}}$, таких, что $\overline{\mathfrak{g}}_i$ – идеал коразмерности один в $\overline{\mathfrak{g}}_{i+1}$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k-1$. Обозначим $\mathfrak{g}_i = \phi^{-1}(\overline{\mathfrak{g}}_i)$. Если $z \in \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{h}$, что завершает построение требуемой цепочки подалгебр. Если $z \notin \mathfrak{h}$, то $\mathfrak{g}_k = \mathfrak{h} + Kz$. Осталось положить $\mathfrak{g}_{k+1}$ равным $\mathfrak{h}$. $\square$

Теорема 3. *Пусть $G = \exp(\mathfrak{g})$ – унипотентная группа над конечным полем K, $\mathfrak{h}$ – подалгебра Ли в $\mathfrak{g}$, $H = \exp(\mathfrak{h})$. Пусть Ω (соотв. ω) – коприсоединенная орбита в $\mathfrak{g}^*$ (соотв. $\mathfrak{h}^*$), T^Ω и t^ω – соответствующие неприводимые представления G и H, π – естественная проекция $\mathfrak{g}^*$ на $\mathfrak{h}^*$. Обозначим*

$$m(\omega, \Omega) = \operatorname{mult}(T^\Omega, \operatorname{ind}(t^\omega, G)) = \operatorname{mult}(t^\omega, \operatorname{res}(T^\Omega, H)).$$

Тогда

$$m(\omega, \Omega) = \frac{|\pi^{-1}(\omega) \cap \Omega|}{\sqrt{|\omega| \cdot |\Omega|}}.$$

Доказательство. Введем обозначения

$$P = |\pi^{-1}(\omega) \cap \Omega|, \quad Q = \sqrt{|\omega| \cdot |\Omega|}, \quad M = \operatorname{mult}\left(T^\Omega, \operatorname{ind}(t^\omega, G)\right).$$

Равенство $M = P/Q$ будем доказывать индукцией по $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g})$. Если $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = 0$, то $\Omega = \omega$ и, поэтому, $P = |\Omega|$, $Q = |\Omega|$, $M = 1$; что доказывает равенство $M = P/Q$.

Предположим, что равенство доказано для $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) < k$; докажем для $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}) = k$. Из леммы 3 вытекает, что существует подалгебра $\mathfrak{g}_1$, удовлетворяющая условиям $\mathfrak{g} \supset \mathfrak{g}_1 \supset \mathfrak{h}$, $\operatorname{codim}(\mathfrak{h}, \mathfrak{g}_1) = 1$. Выберем $\lambda_0 \in \omega$. Естественные проекции $\pi : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{h}^*$, $\pi_1 : \mathfrak{g}^* \to \mathfrak{g}_1^*$, $\pi_0 : \mathfrak{g}_1^* \to \mathfrak{h}^*$ удовлетворяют $\pi = \pi_0\pi_1$. Для $\mathfrak{g}_1^{\lambda_0} = \{x \in \mathfrak{g}_1 : \ \lambda_0[x, \mathfrak{h}] = 0\}$ возможны два случая: либо $\mathfrak{g}_1^{\lambda_0} \subset \mathfrak{h}$, либо $\mathfrak{g}_1^{\lambda_0} \not\subset \mathfrak{h}$.

1) Случай $\mathfrak{g}_1^{\lambda_0} \subset \mathfrak{h}$. Согласно лемме 2, в этом случае $\pi_0^{-1}(\omega)$ лежит в одной коприсоединенной орбите $\Omega_1 \subset \mathfrak{g}_1^*$ для группы $G_1 = \exp(\mathfrak{g}_1)$. Отсюда $\dim\Omega_1 = \dim\omega + 2$ и

$$|\Omega_1| = q^2|\omega|. \tag{8}$$

Поляризация $\mathfrak{p}_0$ для λ_0 в $\mathfrak{h}$ также является поляризацией для любого $\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)$ в $\mathfrak{g}_1$. Действительно, $\mathfrak{p}_0$ – изотропное подпространство в

$\mathfrak{g}_1$ и

$$\operatorname{codim}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{g}_1) = \operatorname{codim}(\mathfrak{p}_0, \mathfrak{h}) + 1 = \frac{1}{2}(\dim \omega + 2) = \frac{1}{2} \dim \Omega_1.$$

Индуцированное представление $\operatorname{ind}(t^\omega, G_1)$ неприводимо и совпадает с T^{Ω_1},

$$\operatorname{ind}(T^{\Omega_1}, G) = \operatorname{ind}(t^\omega, G). \tag{9}$$

Согласно предположению индукции,

$$\operatorname{mult}\left(T^\Omega, \operatorname{ind}(T^{\Omega_1}, G)\right) = \frac{|\pi^{-1}(\Omega_1) \cap \Omega|}{\sqrt{|\Omega_1| \cdot |\Omega|}}. \tag{10}$$

Применяя формулу (9), получаем

$$M = \frac{|\pi^{-1}(\Omega_1) \cap \Omega|}{\sqrt{|\Omega_1| \cdot |\Omega|}}. \tag{11}$$

Используя (8), заключаем

$$M = \frac{qP}{\sqrt{q^2 |\omega| \cdot |\Omega|}} = \frac{P}{Q}. \tag{12}$$

2) Случай $\mathfrak{g}_1^{\lambda_0} \not\subset \mathfrak{h}$. Из формулы (6) получаем

$$\pi^{-1}(\omega) = \bigcup_{\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)} \pi_1^{-1}(\Omega_1(\lambda_1)),$$

где $\Omega_1(\lambda_1)$ – орбита $\lambda_1 \in \mathfrak{g}^*$ относительно $\mathrm{Ad}^*_{G_1}$. Применим предположение индукции

$$P = |\pi^{-1}(\omega) \cap \Omega| = \sum_{\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)} |\pi^{-1}(\Omega_1(\lambda_1)) \cap \Omega|$$

$$= \sum_{\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)} \sqrt{|\Omega_1(\lambda_1)| \cdot |\Omega|} \operatorname{mult}(T^\Omega, \operatorname{ind}(T^{\Omega_1(\lambda_1)}, G)).$$

Поскольку $|\Omega_1(\lambda_1)| = |\omega|$, то

$$P = Q \sum_{\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)} \operatorname{mult}(T^\Omega, \operatorname{ind}(T^{\Omega_1(\lambda_1)}, G)). \tag{13}$$

С другой стороны, для любой поляризации $\mathfrak{p}_0$ для λ_0 подалгебра

$$\mathfrak{p} = \mathfrak{g}_1^{\lambda_0} + \mathfrak{p}_0$$

– поляризация для любого $\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)$. Представление $\mathrm{ind}(\xi_{\lambda_0}, P_0, P)$ – прямая сумма одномерных представлений ξ_{λ_1}, где $\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)$. Поэтому $\mathrm{ind}(t^\omega, G)$ – прямая сумма представлений $\mathrm{ind}(T^{\Omega_1(\lambda_1)}, G)$ по всем $\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)$. Получаем

$$M = \mathrm{mult}\left(T^\Omega, \mathrm{ind}(t^\omega, G)\right) = \sum_{\lambda_1 \in \pi_0^{-1}(\lambda_0)} \mathrm{mult}(T^\Omega, \mathrm{ind}(T^{\Omega_1(\lambda_1)}, G)). \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получаем $P = QM$. $\square$

Следствие 1. *Неприводимое представление T^Ω входит в разложение $\mathrm{ind}(t^\omega, G)$ тогда и только тогда, когда орбита Ω имеет непустое пересечение с $\pi^{-1}(\omega)$.*

Следствие 2. *Неприводимое представление t^ω входит в разложение ограничения представления T^Ω на подгруппу H тогда и только тогда, когда орбита ω содержится в $\pi(\Omega)$.*

Следствие 3. *Пусть Ω, Ω_1, Ω_2 – коприсоединенные орбиты в $\mathfrak{g}^*$. Обозначим через $|M|$ число элементов в подмножестве*

$$M = \left\{(\lambda_1, \lambda_2) : \ \lambda_1 \in \Omega_1, \ \lambda_2 \in \Omega_2, \ \lambda_1 + \lambda_2 \in \Omega\right\}.$$

Тогда

$$\mathrm{mult}(T^\Omega, T^{\Omega_1} \otimes T^{\Omega_2}) = \frac{|M|}{\sqrt{|\Omega| \cdot |\Omega_1| \cdot |\Omega_2|}}.$$

Доказательство получается применением теоремы 3 к группе $G \times G$, к её коприсоединенной орбите $\Omega_1 \times \Omega_2$, подгруппе

$$H = \{(g, g) : \ g \in G\}$$

и орбите $\omega = \{(\lambda, \lambda) : \ \lambda \in \Omega\}$. $\square$

Литература

1. А. А. Кириллов, *Унитарные представления нильпотентных групп Ли.* — УМН **17**, No. 4 (1962), 57–110.
2. А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит.* Научная книга, Новосибирск, 2002.
3. D. Vogan Jr., *The orbit method and unitary representations for reductive Lie groups.* — Alg. Anal. Methods Repres. Theory, Sonderborg (1994), 243–339.
4. D. Vogan Jr., *The method of coadjoint orbits for real reductive groups.* — Repres. Theory Lie Groups (1998), 179–238.
5. D. Kazhdan, *Proof of Springer's Hypothesis.* — Israel J. Math. **28**, no. 4 (1977), 272–286.
6. М. В. Игнатьев, *Введение в метод орбит над конечным полем.* МЦНМО, Москва, 2013

7. Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* Наука, М., 1969.

Panov A. N. The orbit method for unipotent groups over finite field.

In the paper, we obtain formula for multiplicities of certain representations of unipotent groups over the finite field in terms of coadjoint orbits.

Самарский государственный
университет, кафедра алгебры
и геометрии, ул. Акад. Павлова,
1443011 Самара, Россия
E-mail: apanov@list.ru

Поступило 12 сентября 2012 г.