Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 414, 2013 г.

Д. Д. Киселев, Б. Б. Лурье

УЛЬТРАРАЗРЕШИМОСТЬ И СИНГУЛЯРНОСТЬ В ПРОБЛЕМЕ ПОГРУЖЕНИЯ

1°. Напомним, что решением задачи погружения, связанной с точной последовательностью групп

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1, \tag{1.1}$$

где F реализована как группа Галуа расширения полей K/k, называется поле или алгебра Галуа L, такая, что G является группой Галуа L/k, поле K содержится в L, и автоморфизмы $g \in G$, ограниченные на K, совпадают с $\varphi(g) \in F$. Напомним также, что алгебра Галуа L (в соответствии с данными обозначениями) представляет собой прямую сумму изоморфных между собой полей; такое поле L_0 является расширением Галуа поля k с группой Галуа $G_0 \subset G$, содержащим K, и называется полем-ядром алгебры L. Индекс подгруппы G_0 в G совпадает с размерностью L над L_0. Соответственно, тот же индекс имеет и $A_0 = A \cap G_0$ в ядре A (см. [1]). Таким образом, если решение задачи погружения не является полем (то есть содержит делители нуля), то существует точная последовательность групп

$$1 \to A_0 \to G_0 \xrightarrow{\varphi_0} F \to 1, \tag{1.2}$$

где φ_0 – ограничение φ на G_0 (и $G_0 \neq G$; $A_0 \neq A$).

Говорят, что решение задачи погружения является собственным, если оно представляет собой поле, и вопрос существования собственных решений является весьма важным в теории погружения, особенно в контексте решения обратной задачи теории Галуа ([1]). Конечно, возможны ситуации, когда ни одно решение задачи погружения не является полем. Простейший пример дает нам задача погружения над конечными полями, когда группа G не циклическая. Другой пример – задача для локальных полей и p-групп, когда число образующих

Ключевые слова: ультраразрешимая задача погружения, сингулярные решения.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП Минобрнауки РФ 2010-1.1-111-128-033 и Российского фонда фундаментальных исследований, грант 10-01-00551.

группы G больше, чем число образующих группы максимального p-расширения поля k (группы Демушкина) (в [1, глава 4] найдены некоторые достаточные условия существования собственных решений такой задачи).

Здесь мы исследуем вопрос, когда все решения заданной (и разрешимой) задачи погружения суть поля. *Будем называть такую задачу погружения ультраразрешимой.* Следствие 5 § 6 главы 1 книги [1] дает простое достаточное условие ультраразрешимости. Именно, это выполняется, если ядро A задачи погружения содержится в подгруппе Фраттини $\Phi(G)$ группы G. Действительно, в случае $A \subset \Phi(G)$ невозможно существование собственной подгруппы A_0 ядра A, задающей последовательность (1.2).

Однако, как будет далее показано, существуют ультраразрешимые задачи погружения, для которых указанное достаточное условие не имеет места.

2°. Повторим некоторые хорошо известные конструкции, связанные с теорией погружения ([1, 2]).

1. Построение алгебры Галуа с заданным полем-ядром.

Пусть L_0/k – расширение Галуа полей с группой G_0, и задано вложение i группы G_0 в G (группы предполагаются конечными). Представим G в виде объединения смежных классов по G_0: $G = \bigcup_\rho \rho = \bigcup_\rho G_0\overline{\rho}$, где $\overline{\rho}$ – представители классов ρ в G (естественно считать, что $\overline{\rho_1} = 1$). Рассмотрим алгебру L как прямую сумму $\bigoplus_\rho L_0 E_{\overline{\rho}}$, где $E_{\overline{\rho}}$ – минимальные ортогональные идемпотенты, так что $\sum_\rho E_{\overline{\rho}} = 1$. Зададим автоморфизмы $g \in G$ на алгебре L по формуле

$$\left(\sum_\rho X_{\overline{\rho}} E_{\overline{\rho}}\right)^g = \sum_\rho X_{\overline{\rho}}^{\overline{\rho}g\overline{\rho g}^{-1}} E_{\overline{\rho g}},$$

так что $E_{\overline{\rho}}^g = E_1^{\overline{\rho}g} = E_1^{\overline{\rho g}}$ (заметим, что $\overline{\rho}g$ и $\overline{\rho g}$ принадлежат одному классу смежности по G_0, так что $\overline{\rho}g\overline{\rho g}^{-1} \in G_0$). Таким образом, построена алгебра Галуа над k с группой G и полем-ядром $K = K_1$. Легко видеть, что L есть не что иное, как индуцированный модуль $\mathrm{ind}_{G_0}^G K$ (см. [3]).

2. Сопутствующие задачи погружения.

Пусть задача погружения связана с точной последовательностью

$$1 \to A \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1, \tag{2.1}$$

где $F = \mathrm{Gal}(K/k)$, и пусть A_1 – нормальная в G подгруппа группы A. Тогда имеет место точная последовательность

$$1 \to A/A_1 \to G/A_1 \xrightarrow{\overline{\varphi}} F \to 1, \tag{2.2}$$

и можно рассмотреть задачу погружения, связанную с расширением K/k и последовательностью (2.2). Если L – решение задачи (2.1), то L^{A_1} является решением задачи (2.2), поэтому разрешимость задачи (2.2) – необходимое условие разрешимости задачи (2.1). Говорят, что задача (2.2) – сопутствующая для задачи (2.1) первого рода. В частности, факторизация по коммутанту ядра A называется сопутствующей абелевой задачей.

Если теперь задано промежуточное поле $K_1 : k \subset K_1 \subset K$, то, рассматривая $F_1 = \mathrm{Gal}(K/K_1)$ и взяв в качестве G_1 прообраз F_1 в G, получаем сопутствующую задачу второго рода, связанную с последовательностью

$$1 \to A \to G_1 \xrightarrow{\varphi_3} F_1 \to 1, \tag{2.3}$$

где F_1 реализована как $\mathrm{Gal}(K/K_1)$. Разрешимость этой задачи также необходима для разрешимости исходной.

3. Присоединенные задачи погружения.

Пусть при наших обозначениях существует подгруппа G_0 группы G, эпиморфно отображающаяся на F (при морфизме φ). Полагая $A_0 = A \cap G_0$, получаем точную последовательность

$$1 \to A_0 \to G_0 \xrightarrow{\varphi_0} F \to 1, \tag{2.4}$$

и задача погружения, связанная с этой последовательностью (при $F = \mathrm{Gal}(K/k)$), называется присоединенной для задачи (2.1). Если теперь L_0 – решение задачи (2.4), то алгебра $\mathrm{ind}_{G_0}^{G} L_0$ является решением задачи (2.1). Если L_0 – не поле, но алгебра Галуа с полем-ядром K_0, то K_0 остается полем-ядром и в алгебре L. Таким образом, разрешимость присоединенной задачи является достаточным условием разрешимости исходной задачи погружения (2.1). В частности, если F является p-группой, можно в качестве G_0 рассмотреть силовскую p-подгруппу группы G, и получить так называемую *силовскую присоединенную* задачу погружения. Когда A_0 – абелева p-группа, присоединенная силовская задача погружения равносильна исходной [2].

Повторим, что если ядро A содержится в подгруппе Фраттини группы G, у задачи (2.1) не существует нетривиальных присоединенных задач.

4. Подъем и спуск.

Пусть, по-прежнему, задана задача погружения (2.1), и существует поле $\widetilde{K}$, содержащее K и нормальное над k. Обозначим через $\widetilde{F}$ группу Галуа $\widetilde{K}/k$, через ψ – эпиморфизм $\widetilde{F}$ на F, и через B – ядро ψ. Рассмотрим группу $\widetilde{G}$ – прямое произведение групп G и $\widetilde{F}$ с объединенной фактор-группой F, т.е. множество пар (g, h), где $g \in G$, $h \in \widetilde{F}$, для которых $\varphi g = \psi h$. Тогда имеет место коммутативная диаграмма с точными строками и столбцами

$$\begin{tikzcd}
 & & 1 \arrow[d] & 1 \arrow[d] & \\
 & & B \arrow[r, equal] \arrow[d] & B \arrow[d] & \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] \arrow[d, equal] & \widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "\widetilde{\psi}"] & \widetilde{F} \arrow[r] \arrow[d, "\psi"] & 1 \\
1 \arrow[r] & A \arrow[r] & G \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & F \arrow[r] \arrow[d] & 1, \\
 & & 1 & 1 &
\end{tikzcd}$$

и наряду с задачей (2.1) можно рассмотреть задачу для $\widetilde{F} = \mathrm{Gal}(\widetilde{K}/k)$, связанную с точной последовательностью

$$1 \to A \to \widetilde{G} \to \widetilde{F} \to 1. \tag{2.5}$$

Говорят, что задача (2.5) получена из задачи (2.1) подъемом. Если L – решение задачи (2.1), то $\widetilde{L} = L \otimes_K \widetilde{K}$ является решением задачи (2.5).

Соответственно, задача (2.1) получена из задачи (2.5) спуском (для реализации спуска нужно, чтобы в $\widetilde{G}$ нашлась нормальная подгруппа B, пересекающаяся с A только по единичному элементу). Ясно, что если $\widetilde{L}$ – решение задачи (2.5), то $\widetilde{L}^B$ является решением задачи (2.1). Поэтому операции подъема и спуска приводят к равносильным задачам. Более того, решения обеих задач находятся в биективном соответствии.

3°. Все вышесказанное относилось к разрешимости задач погружения в смысле алгебр Галуа. Исследуем теперь условия ультраразрешимости. Из сказанного в предыдущем пункте почти очевиден критерий ультраразрешимости.

Теорема 1. *Для того, чтобы разрешимая задача погружения была ультраразрешимой, необходимо и достаточно, чтобы были неразрешимы все присоединенные задачи погружения, отличные от исходной.*

Действительно, если L – какое-либо решение исходной задачи погружения с полем-ядром $L_0 \neq L$, то существует подгруппа G_0 группы G, реализующаяся как $\mathrm{Gal}(L_0/k)$. А это означает, что разрешима присоединенная задача погружения, связанная с последовательностью

$$1 \longrightarrow A_0 \longrightarrow G_0 \longrightarrow F \longrightarrow 1, \tag{3.2}$$

где $A_0 = A \cap G_0 \neq A$.

Обратно, если существует решение присоединенной задачи погружения (3.2), то в качестве решения исходной задачи можно выбрать такое, у которого поле-ядро совпадает с полем-ядром решения присоединенной задачи.

Перебор присоединенных задач погружения можно, разумеется, сократить, если рассматривать максимальные присоединенные задачи погружения.

Условие ультраразрешимости не обязательно наследуется при переходе к сопутствующим задачам первого рода, поскольку отнюдь не все решения сопутствующей задачи поднимаются до решения исходной, а среди решений сопутствующей задачи могут быть и не только поля (приведенный далее пример это демонстрирует). То же справедливо и для сопутствия второго рода.

Очевидно, что при спуске ульраразрешимой задачи получается снова ультраразрешимая. Вопрос о ультраразрешимости задачи погружения, полученной при подъеме, более содержателен.

Предложение 1. *Пусть задача погружения получена подъемом ультраразрешимой задачи погружения посредством расширения поля K до $\widetilde{K}$. Для того, чтобы полученная задача была ультраразрешимой,* *необходимо и достаточно, чтобы любое решение исходной задачи было линейно раздельно с полем* $\widetilde{K}$ *над* K.

Доказательство очевидно.

Пример такого феномена дает ситуация, когда порядок ядра взаимно прост со степенью расширения $(\widetilde{K} : K)$ (то есть с порядком группы B – см. предыдущий пункт). Это же справедливо, когда группа A – разрешима, а группа B – простая некоммутативная. В самом деле, если существует разрешимая присоединенная задача для поднятой задачи, то существует нетривиальное отображение группы B в группу A, что противоречит простоте B.

4°. Рассмотрим теперь некоторые содержательные примеры.

1. Пусть G – группа кватернионов с образующими α, β, а ядро A – циклическая группа четвертого порядка. Соответственно, K/k – квадратичное расширение, $K = k(\sqrt{d})$, $d \in k^*$ (характеристика поля k не равна 2), и чтобы K было полем, нужно, чтобы d не было квадратом в k.

Максимальная присоединенная задача определяется циклической группой G_0 порядка 4 и ядром A_0 порядка 2. Условие разрешимости такой задачи хорошо известно (см. [1, Глава 1,§1]) и состоит в том, что d представляется в виде суммы двух квадратов из поля k.

Рассмотрим теперь условия разрешимости самой задачи с группой кватернионов. Поскольку ядро имеет порядок 4, условие погружаемости совпадает с условием согласности Фаддеева–Хассе ([1]), которое можно сформулировать на языке распадения скрещенного произведения группы G и поля K. Его центральные идемпотенты – $E_1 = \frac{1+\alpha^2}{2}$, $E_2 = \frac{1-\alpha^2}{2}$, где α – образующий элемент ядра. Соответственно, $G \times K$ является прямой суммой подалгебр, соответствующих этим идемпотентам.

Алгебра $(G \times K)E_1$ соответствует сопутствующей задаче, полученной факторизацией по подгруппе $A_0 = \langle \alpha^2 \rangle$, задающей прямое групповое расширение. Поэтому эта алгебра полностью распадается при любом d.

Вторая компонента $(G \times K)E_2$ имеет своим центром подалгебру $k(\alpha\sqrt{d}E_2)$ (поскольку $\alpha^3 E_2 = -\alpha E_2$ и $\sqrt{d} = -\sqrt{d}$), и поэтому центр изоморфен $k(\sqrt{-d})$. Алгебра $(G \times K)E_2$ содержит также антикоммутирующие элементы αE_2, βE_2, квадраты которых равны $-E_2$.

Таким образом, алгебра $(G \times K)E_2$ изоморфна алгебре обычных кватернионов над квадратичным расширением $k(\sqrt{-d})$. Следовательно, распадение этой алгебры (то есть представление ее в виде матричной над центром) состоит в том, что $-d$ является квадратом чистого кватерниона, то есть должно быть $-d = -u^2 - v^2 - w^2$, где $u, v, w \in k$.

Итак, наша задача разрешима тогда и только тогда, когда d есть сумма трех квадратов элементов из k. А все решения этой задачи суть поля тогда и только тогда, когда такое d не является суммой двух квадратов из k. Разумеется, такое d существует как в глобальных, так и в локальных полях. Таким образом, построен пример ультраразрешимой задачи погружения.

2. В работе [4] найден класс задач погружения, которые всегда разрешимы, притом, что групповые расширения, их определяющие, не являются полупрямыми. Такие групповые расширения существуют для любой конечной группы $F = \mathrm{Gal}(K/k)$, порядок которой больше 2. Такой (универсально разрешимой) задачей является, например, задача, где G – некоммутативная группа порядка p^3 и периода p^2 (при нечетном p), а ядро состоит из элементов порядка p. Единственная присоединенная задача – это задача погружения нормального расширения степени p в расширение с циклической группой порядка p^2. Таким образом, если задача погружения в циклическое расширение с группой порядка p^2 неразрешима (а этому условию легко удовлетворить), то построенная задача с группой порядка p^3 является ультраразрешимой.

Те же рассуждения, разумеется, применимы и к другим универсально разрешимым (но не полупрямым) групповым расширениям, если можно позаботиться о том, чтобы присоединенные задачи были неразрешимы.

5°. Рассмотрим разрешимую задачу $(K/k, G, \varphi, N)$. Допустим существование собственной подгруппы A группы N, нормальной в G. Тогда задана сопутствующая задача погружения первого рода $(K/k, G/A, \varphi_1, N/A)$, где $\varphi = \varphi_1\varphi_0$, а $\varphi_0 \colon G \to G/A$ – канонический эпиморфизм. Решение L_1 данной сопутствующей задачи назовем *сингулярным* по отношению к исходной задаче, если для любого решения L исходной задачи $L^A \neq L_1$. В противном случае L_1 называется *регулярным* по отношению к исходной задаче.

Следующее простое предложение показывает необходимость простого описания сингулярных решений в контексте исследования феномена ультраразрешимых задач погружения.

Предложение 2. *Рассмотрим разрешимую задачу* $(K/k, G, \varphi, N)$. *Если существуют собственные подгруппы группы* N*, нормальные в* G*, то выберем среди них минимальную и обозначим её* A*. Исходная задача погружения ультраразрешима тогда и только тогда, когда любое регулярное решение* L *сопутствующей задачи* $(K/k, G/A, \varphi_1, N/A)$ *суть поле, и задача* $(L/k, G, \varphi_0, A)$ *также ультраразрешима.*

Тривиальное доказательство опущено.

Замечание 1. Пусть в разрешимой задаче $(K/k, G, \varphi, N)$ ядро N абелево. Если N является простым $\mathrm{Gal}(K/k)$-модулем, то искомая задача, как легко видеть, ультраразрешима тогда и только тогда, когда $N \leqslant \Phi(G)$. В контексте предложения 2 представляет интерес описание в простых терминах тех регулярных решений, которые не являются полями (если таковые существуют). Более того, в случае абелева ядра этого и достаточно.

Гораздо более сложная в контексте предложения 2 и замечания 1 ситуация возникает в случае, когда ядро N неабелево. В этом случае N будет минимальной нормальной подгруппой группы G, а значит, характеристически простой. Хорошо известно, что тогда N изоморфна прямому произведению изоморфных простых групп. Ограничимся далее случаем, когда N – простая знакопеременная группа, либо простая спорадическая группа. Впрочем, весьма правдоподобно, что если N – неабелева простая F-операторная группа, то задача $(K/k, G, \varphi, N)$ не может быть ультраразрешимой. Однако доказать (или опровергнуть) этот факт весьма непросто даже для глобальных полей. Во многом это связано с тем, что обратная задача теории Галуа для глобальных полей и конечных простых групп еще далека от полного решения.

Теорема 2. *Пусть* $(K/k, G, \varphi, N)$ *– разрешимая задача погружения над произвольным полем* k*. Если* N *– простая знакопеременная группа, либо простая спорадическая группа, то в качестве решения всегда можно выбрать алгебру Галуа, не являющуюся полем.*

Доказательство. Можно считать без ограничения общности, что $G \leqslant \mathrm{Aut}\, N$. Это достигается спуском по централизатору ядра $C_G(N)$. Хорошо известно, что $\mathrm{Aut}\, A_n \cong S_n$ при $n \geqslant 5$, $n \neq 6$. Если теперь

$N \in \{A_n \mid n \geqslant 5,\, n \neq 6\}$, то G – подгруппа полупрямого произведения $A_n \leftthreetimes \langle(1,\,2)\rangle$. Откуда либо $G = A_n \leftthreetimes \langle(1,\,2)\rangle$, и тогда задача полупрямая, либо $G = A_n$, и тогда $K = k$. В обоих случаях существует решение, не являющееся полем.

Рассмотрим случай $N = A_6$. Хорошо известно, что

$$\operatorname{Out} A_6 \cong V_4,\ \operatorname{Aut} A_6 \cong S_6 \leftthreetimes Z_2.$$

Поэтому можно считать $\mathrm{Gal}(K/k) \cong V_4$. В самом деле, во всех остальных случаях получается либо тривиальная, либо полупрямая задача. В последнем случае в статье [2] доказана эквивалентность (в смысле разрешимости) задачи погружения, связанной с точной последовательностью

$$1 \to A_6 \to \operatorname{Aut} A_6 \xrightarrow{\varphi} V_4 \to 1$$

и присоединенной 2-силовской задачи. Применив теорему 1, окончательно устанавливаем искомый результат для простого знакопеременного ядра.

Рассмотрим теперь случай, когда N есть спорадическая группа. Согласно обзору [5] в этом случае $|\operatorname{Out} N| \leqslant 2$, причем из 26 спорадических групп 14 имеют тривиальную группу внешних автоморфизмов. Для таких групп теорема верна с дословным повторением доказательства.

Рассмотрим случай оставшихся 12 групп. Следующая лемма дает исчерпывающий для этого случая ответ.

Лемма 1. *Пусть G – конечная группа без центра, группа внешних автоморфизмов которой циклическая простого порядка p. В этом случае всякое расширение*

$$1 \to G \to \overline{G} \xrightarrow{\varphi} Z_p \to 1$$

расщепляется.

Доказательство. Рассмотрим задачу построения группы $\overline{G}$ как расширения G с помощью Z_p. Поскольку группа G по условию имеет тривиальный центр, то из [6, Гл. IV, теорема 8.7] следует, что такое расширение строится по произвольно выбранному гомоморфизму $\psi\colon Z_p \to \operatorname{Aut} G/\operatorname{Inn} G$. В силу [6, Гл. IV, теорема 8.8] существует единственный класс конгруэнтности расширений, получающихся с помощью гомоморфизма ψ.

Так как $\operatorname{Out} G \cong Z_p$, то у нас существует две возможности: ψ – тривиальный гомоморфизм, ψ – изоморфизм.

Если ψ – тривиальный гомоморфизм, то искомое расширение определяется подъемом

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \overline{G} & \longrightarrow & Z_p & \longrightarrow & 1 \\ & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\theta} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \\ 1 & \longrightarrow & G & \longrightarrow & \operatorname{Aut} G & \xrightarrow{\delta} & Z_p & \longrightarrow & 1, \end{array}$$

откуда

$$\overline{G} \cong \operatorname{Aut} G \times_{Z_p} Z_p = G \times Z_p.$$

Если же ψ является изоморфизмом, то диаграммный поиск показывает, что θ – также изоморфизм. Так как p делит порядок группы $\operatorname{Aut} G$ по условию, то можно определить нетривиальный гомоморфизм $\varphi\colon Z_p \to \operatorname{Aut} G$, что и доказывает расщепляемость искомого расширения. □

Применяя лемму 1, получаем окончательное доказательство теоремы. □

6°. Дадим теперь описание в относительно простых терминах представителей (по модулю регулярных решений) сингулярных решений сопутствующей задачи погружения первого рода по отношению к некоторой фиксированной задаче.

Поясним, что имеется в виду. Мы ограничимся задачами погружения с абелевым ядром. Заметим сначала, что существование алгебры Галуа L, доставляющей решение задачи погружения $(K/k, G, \varphi, N)$, еще не вполне определяет само решение. В самом деле, еще необходимо задать изоморфизм $\nu\colon G \to \mathrm{Gal}(L/k)$. Пара (L, ν) уже будет вполне определять решение искомой задачи погружения.

Решения (L_1, ν_1) и (L_2, ν_2) задачи $(K/k, G, \varphi, N)$ называются *эквивалентными в узком смысле* [1], если существует изоморфизм $\theta\colon L_1 \to L_2$ над K, такой, что для любых $x \in L_1$, $g \in G$ справедливо равенство $(\theta(x))^{\nu_2(g)} = \theta(x^{\nu_1(g)})$.

Хорошо известно, что классы эквивалентных в узком смысле решений разрешимой задачи $(K/k, G, \varphi, N)$ находятся в биективном соответствии с множеством 1-когомологий (в смысле Ж.-П. Серра) $H^1(\overline{F}, N)$, где $\overline{F}$ – группа Галуа сепарабельного замыкания поля k, действующая на N посредством отступления вдоль канонического эпиморфизма ограничения $\theta\colon \overline{F} \to \mathrm{Gal}(K/k)$. В случае абелева ядра N

мы имеем обычную группу когомологий $H^1(\overline{F}, N)$. Если в ней выделить собственную подгруппу X, то описание представителей классов решений по модулю X означает просто описание факторгруппы $H^1(\overline{F}, N)/X$.

Теорема 3. *Пусть k – локальное поле. Рассмотрим разрешимую задачу $(K/k, G, \varphi, N)$ с абелевым ядром N. Обозначим $F = \mathrm{Gal}(K/k)$. Фиксируем произвольную собственную подгруппу (если существует) A группы N, нормальную в G. Тогда любая фиксированная система представителей (по модулю классов эквивалентных в узком смысле регулярных решений) классов эквивалентных в узком смысле сингулярных решений задачи $(K/k, G/A, \varphi_1, N/A)$ находится в биективном соответствии с элементами группы*

$$\mathrm{Hom}_F(A, K^*)/\left(\mathrm{Hom}_F(N, K^*)/\mathrm{Hom}_F(N/A, K^*)\right).$$

Доказательство. Согласно теоремам 1.15.2, 1.15.3 из [1] классы эквивалентных в узком смысле решений задач погружения $(K/k, G, \varphi, N)$ и $(K/k, G/A, \varphi_1, N/A)$ находятся в биективном соответствии с элементами групп $H^1(\overline{F}, N)$ и $H^1(\overline{F}, N/A)$, соответственно. Здесь, конечно, $\overline{F}$ – группа Галуа сепарабельного замыкания $\overline{k}$ над k. Рассмотрим следующую коммутативную диаграмму (напомним, что $\varphi_0 = \pi$):

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \arrow[r, equal] \arrow[d, "\omega"'] & \mathrm{Gal}(\overline{k}/k) \arrow[d, "\psi"'] \\
G \arrow[r, "\varphi"'] \arrow[d, "\pi"'] & \mathrm{Gal}(K/k). \\
G/A \arrow[r, equal] & G/A \arrow[u, "\varphi_1"']
\end{tikzcd}$$

Диаграммный поиск показывает, что произвольно выбранная система представителей (по модулю классов регулярных решений) классов эквивалентных сингулярных решений задачи $(K/k, G/A, \varphi_1, N/A)$ находится в биективном соответствии с коядром гомоморфизма

$$\pi_*\colon H^1(\overline{F}, N) \to H^1(\overline{F}, N/A),$$

индуцированного каноническим эпиморфизмом $\pi\colon N \to N/A$. Напишем длинную точную последовательность когомологий:

$$H^1(\overline{F}, N) \xrightarrow{\pi_*} H^1(\overline{F}, N/A) \xrightarrow{\delta} H^2(\overline{F}, A) \xrightarrow{\kappa} H^2(\overline{F}, N).$$

Из точности данной последовательности следует, что коядро гомоморфизма π_* изоморфно ядру гомоморфизма κ. Воспользуемся локальной двойственностью Тейта (см. [1, теорема Д.3.2]). По ней

$$H^2(\overline{F},\, A) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(A,\, \overline{k}^*)',\ H^2(\overline{F},\, N) \cong \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(N,\, \overline{k}^*)'.$$

Штрих обозначает переход к двойственным группам. Поэтому ядро гомоморфизма κ изоморфно ядру гомоморфизма

$$\gamma\colon \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(A,\, \overline{k}^*)' \to \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(N,\, \overline{k}^*)'.$$

Поскольку $\overline{F}$ действует на A и на N, как говорят, отступлением вдоль эпиморфизма ограничения $\psi\colon \overline{F} \to F$, то получаем равенства

$$\mathrm{Hom}_{\overline{F}}(A,\, \overline{k}^*) = \mathrm{Hom}_F(A,\, K^*),\ \mathrm{Hom}_{\overline{F}}(N,\, \overline{k}^*) = \mathrm{Hom}_F(N,\, K^*).$$

Напишем точную последовательность F-модульных гомоморфизмов

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(N/A,\, K^*) \longrightarrow \mathrm{Hom}_F(N,\, K^*) \xrightarrow{\ \omega^*\ } \mathrm{Hom}_F(A,\, K^*),$$

индуцированную точной последовательностью

$$1 \longrightarrow A \longrightarrow N \xrightarrow{\ \omega\ } N/A \longrightarrow 1.$$

Легко видеть, что $\ker\gamma \cong (\mathrm{coker}\,\omega^*)'$. Так как $\mathrm{coker}\,\omega^*$ является конечной абелевой группой, то

$$\ker\gamma \cong \mathrm{Hom}_F(A,\, K^*)/\left(\mathrm{Hom}_F(N,\, K^*)/\mathrm{Hom}_F(N/A,\, K^*)\right). \qquad \square$$

Рассмотрим конечное расширение Галуа глобальных полей E/L. Фиксируем конечное множество S неархимедовых точек поля E, соответствующие пополнения по которым полей E и L (после ограничения точки поля E) задают разветвленные расширения. Положим $C_{E,\,S} := J_E/E^*V_{E,\,S}$, где $V_{E,\,S} = \prod\limits_{\mathfrak{p}\notin S} V_{\mathfrak{p}}$, а $V_{\mathfrak{p}}$ – группа единиц $\mathfrak{p}$-пополнения поля E.

Аналогичными теореме 3 рассуждениями, но только с применением глобальной двойственности Тейта (см. [1, следствие к теореме Д.3.5]), доказывается следующая теорема.

Теорема 4. *Пусть k – глобальное поле. Рассмотрим разрешимую задачу $(K/k,\, G,\, \varphi,\, N)$ с абелевым ядром N. Обозначим $F = \mathrm{Gal}(K/k)$. Пусть S – конечное множество точек поля K, содержащее все простые делители экспоненты N, а также все разветвленные точки* *поля K над k. Фиксируем собственную подгруппу (если существует) A группы N, нормальную в G. Тогда любая фиксированная система представителей (по модулю классов эквивалентных в узком смысле регулярных решений) классов эквивалентных в узком смысле сингулярных решений задачи $(K/k,\, G/A,\, \varphi_1,\, N/A)$ находится в биективном соответствии с элементами группы*

$$(\mathrm{Hom}_F(A,\, C_{K,S})/\,(\mathrm{Hom}_F(N,\, C_{K,S})/\mathrm{Hom}_F(N/A,\, C_{K,S})))'.$$

7°. В связи с феноменом ультраразрешимых задач погружения А. В. Яковлев поставил следующую проблему.

Проблема 1. Пусть G – конечная группа, а $\varphi\colon G \to F$ – фиксированный эпиморфизм G на группу F. При каком необходимом и достаточном условии на расширение

$$1 \to N \to G \xrightarrow{\varphi} F \to 1 \qquad (*)$$

существует расширение Галуа числовых полей K/k с группой F, такое, что задача погружения $(K/k,\, G,\, \varphi)$ является ультраразрешимой?

В данной работе мы продемонстрировали на примерах, что условие $N \leqslant \Phi(G)$ не является необходимым в проблеме 1, хотя и теоретико-групповое. В связи с работой [2] упомянем простейшее необходимое условие на расширение $(*)$. Предположим, что F – p-группа. (Более общо, π-группа, но тогда нужно еще потребовать, чтобы G была разрешимой для гарантирования существования π-холловской присоединенной задачи.) Если расширение $(*)$ удовлетворяет требованиям проблемы 1, то N также p-группа (π-группа).

Применение теоремы 3 дает, впрочем, некоторые простейшие примеры, когда условие $N \leqslant \Phi(G)$ все же является необходимым.

Например, рассмотрим расширение Галуа локальных полей K/k, такое, что K не содержит примитивных корней из единицы степени p для всякого простого p, делящего фиксированное нечетное число n. Тогда всякая разрешимая задача погружения расширения K/k в алгебру Галуа с абелевым ядром N экспоненты n является ультраразрешимой тогда и только тогда, когда N содержится в группе Фраттини объемлющей группы G. В самом деле, условие $N \leqslant \Phi(G)$ наследуется для сопутствующих задач погружения первого рода (получаемых факторизацией исходной задачи по простому F-модулю), а, по предположению, сингулярные решения такой сопутствующей задачи отсутствуют в силу теоремы 3. Далее применяем рассуждения в замечании 1, а также предложение 2.

Литература

1. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, Д. К. Фаддеев, *Задача погружения в теории Галуа.* Наука, М., 1990.
2. В. В. Ишханов, Б. Б. Лурье, *Задача погружения над p-расширением.* — Алгебра и Анализ, **9**, No. 4 (1997), 57–97.
3. Ч. Кэртис, И. Райнер, *Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр.* Наука, М., 1969.
4. Б. Б. Лурье, *Об универсально разрешимых задачах погружения.* — Тр. МИАН **183** (1990), 121–126.
5. С. А. Сыскин, *Абстрактные свойства простых спорадических групп.*— УМН **35**, No. 5 (1980), 181–212.
6. С. Маклейн, *Гомология.* Мир, М. (1966).

Kiselev D. D., Lur'e B. B. Ultrasolvability and singularity in the embedding problem.

We give useful description for representatives of singular solution classes of associated embedding problems over local and global fields. We also discover so-called ultrasolvable embedding problems (i.e., solvable embedding problems which have only fields as solutions), which kernel is not lying in the Frattini group of the covered group.

Поступило 15 января 2013 г.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы 1, 119992, Москва,
Россия

E-mail: denmexmath@yandex.ru

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023, С.-Петербург,
Россия

E-mail: borislurje@mail.ru