Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 414, 2013 г.

Д. Ю. Елисеев, М. В. Игнатьев

МНОГОЧЛЕНЫ КОСТАНТА–КУМАРА И КАСАТЕЛЬНЫЕ КОНУСЫ К МНОГООБРАЗИЯМ ШУБЕРТА ДЛЯ ИНВОЛЮЦИЙ В A_n, F_4 И G_2

Дорогому Николаю Александровичу Вавилову к юбилею с благодарностью и восхищением

§1. Введение и основной результат

1.1. Пусть G – комплексная редуктивная алгебраическая группа, T – максимальный тор в G, B – содержащая его борелевская подгруппа G, Φ – система корней, Φ^+ – положительная подсистема, Δ – система фундаментальных корней, W – группа Вейля (во всём, что касается алгебраических групп и комбинаторики систем корней, мы будем следовать [2, 8] и [12]). Обозначим через $\mathcal{F} = G/B$ многообразие флагов, а через $X_w \subseteq \mathcal{F}$ – подмногообразие Шуберта, соответствующее элементу группы Вейля $w \in W$.

Обозначим через $\mathcal{O} = \mathcal{O}_{p,X_w}$ локальное кольцо точки $p = eB \in X_w$, а через $\mathfrak{m}$ – максимальный идеал в нём. На $\mathcal{O}$ имеется фильтрация

$$\mathcal{O} \supseteq \mathfrak{m} \supseteq \mathfrak{m}^2 \supseteq \dots$$

степенями максимального идеала, поэтому можно рассмотреть градуированную алгебру

$$R = \operatorname{gr}\mathcal{O} = \bigoplus_{i\geqslant 0} \mathfrak{m}^i/\mathfrak{m}^{i+1}.$$

По определению, *касательный конус* к многообразию Шуберта X_w в точке p – это спектр $C_w = \operatorname{Spec} R$ алгебры R, рассматриваемый как подсхема в касательном пространстве $T_pX_w \subseteq T_p\mathcal{F}$. Вычисление касательного конуса C_w играет важную роль в изучении геометрии многообразия X_w, см., например, [10, Глава 7].

Пусть $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{h}$ – алгебры Ли групп G, B, T соответственно, $\mathfrak{h}^*$ – сопряжённое к $\mathfrak{h}$ пространство. Главным техническим средством при работе

Ключевые слова: касательные конусы, инволюции в группах Вейля, многочлены Костанта–Кумара, многообразия Шуберта.

Второй автор частично поддержан РФФИ, грант no. 12-01-90805-мол_рф_нр.

с касательными конусами для нас будут так называемые многочлены Костанта–Кумара – некоторые специальные элементы d_w алгебры полиномиальных функций $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, нумеруемые элементами группы Вейля $w \in W$ (точные определения приводятся в следующем пункте; см. также [9, 15, 16] и [10, §7.1]). В работе [17] С. Кумар показал, что элемент d_w зависит *только* от касательного конуса C_w (подробности см. в следующем пункте); в частности, из того, что $d_w \neq d_{w'}$, автоматически вытекает, что касательные конусы C_w и $C_{w'}$ не совпадают (как подсхемы в $T_p\mathcal{F}$).

В статье [4] А. Н. Панова и первого автора конусы C_w были вычислены для всех $w \in W$ для $G = \mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ при $n \leqslant 5$. На основе этих вычислений А. Н. Пановым был выдвинут ряд гипотез о строении касательных конусов в общем случае. В частности, он предположил, что если касательные конусы C_w и $C_{w'}$ совпадают, то w и w' сопряжены в $W \cong S_n$. В таком виде гипотеза оказывается неверной: контрпримером служат подстановки

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } w' = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

(см. также [1]). В то же время, остаётся в силе

Гипотеза 1.1. *Пусть w, $w' \in S_n$ сопряжены и $C_w = C_{w'}$. Тогда w и w' сопряжены уже с помощью подгруппы, переставляющей числа внутри независимых циклов подстановки w.*

Это означает, среди прочего, что если w и w' – инволюции (элементы второго порядка) в S_n, причём $w \neq w'$, то $C_w \neq C_{w'}$. Аналогичную гипотезу можно выдвинуть и для произвольной группы G. (См. работы [5, 13] второго автора, а также пункт 3.2 по поводу связи касательных конусов к X_w для инволюций и коприсоединённых орбит унипотентного радикала группы B.) Чтобы это доказать, достаточно проверить, что многочлены Костанта–Кумара для разных инволюций будут отличаться; это удаётся сделать для случаев A_n, G_2 и F_4; в последнем случае мы пользуемся системой компьютерной алгебры `SAGE` [18], см. пункт 2.3. А именно, верна

Теорема 1.2. *Пусть каждая неприводимая компонента системы корней Φ имеет тип A_n, $n \geqslant 1$, F_4 или G_2. Пусть w, w' – инволюции в группе Вейля W и $w \neq w'$. Тогда соответствующие многочлены Костанта–Кумара не совпадают, то есть $d_w \neq d_{w'}$. В частности, касательные конусы C_w и $C_{w'}$ – разные подсхемы в $T_p\mathcal{F}$.*

Опишем кратко структуру работы. В пункте 1.2 мы даём все необходимые определения и описываем связь касательных конусов с многочленами Костанта–Кумара, а в пунктах 1.3, 1.4 напоминаем некоторые факты о порядке Брюа на группе Вейля и сводим задачу к рассмотрению неприводимых систем корней (утверждение 1.6). Параграф 2 посвящён доказательству основной теоремы: в пунктах 2.1–2.2 мы доказываем её для A_n индукцией по n, а в пункте 2.3 – для F_4 и G_2. Параграф 3 содержит несколько заключительных замечаний и гипотез.

Краткий анонс наших результатов был сделан в [3].

Благодарности. Авторы благодарят А. Н. Панова за многочисленные полезные обсуждения. Работа над статьёй была завершена во время пребывания второго автора в МГУ им. М. В. Ломоносова в рамках гранта РФФИ no. 12-01-90805-мол_рф_нр. Второй автор благодарит Э. Б. Винберга за гостеприимство и РФФИ за финансовую поддержку.

1.2. В этом пункте мы даём строгое определение многочленов Костанта–Кумара, показываем, как их вычислять в комбинаторных терминах, и объясняем, почему они зависят только от касательного конуса C_w к X_w в точке p.

Тор T действует на многообразии Шуберта сопряжениями (или левыми умножениями, в данном случае это одно и то же). Точка p инвариантна относительно этого действия, поэтому возникает действие T на локальном кольце $\mathcal{O}$. Это действие, очевидно, сохраняет фильтрацию степенями идеала $\mathfrak{m}$, поэтому определена структура T-модуля на алгебре $R = \operatorname{gr}\mathcal{O}$. Согласно [17, теорема 2.2], R разлагается в прямую сумму конечномерных весовых подпространств:

$$R = \bigoplus_{\lambda\in\mathfrak{X}(T)} R_\lambda,$$

где $\mathfrak{X}(T) \subset \mathfrak{h}^*$ – решётка характеров тора T и

$$R_\lambda = \{f \in R \mid t.f = \lambda(t)f\}$$

– весовое подпространство веса λ. Значит, определён *формальный характер R* – элемент

$$\operatorname{ch} R = \sum_{\lambda\in\mathfrak{X}(T)} m_\lambda e^\lambda$$

$\mathbb{Z}$-модуля Λ, состоящего из всех (возможно, бесконечных) линейных комбинаций линейно независимых элементов e^λ, $\lambda \in \mathfrak{X}(T)$, где $m_\lambda = \dim R_\lambda$.

Далее, если элемент $a = \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} n_\lambda e^\lambda \in \Lambda$ содержит лишь конечное число ненулевых слагаемых, то для каждого $k \geqslant 0$ корректно определён многочлен

$$[a]_k = \sum_{\lambda \in \mathfrak{X}(T)} n_\lambda \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \in S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}].$$

Пусть $[a] = [a]_{k_0}$, где k_0 – наименьшее, для которого $[a]_{k_0} \neq 0$. К примеру, если $a = 1 - e^\lambda$ для какого-нибудь λ, то $[a]_0 = 0$ и $[a] = [a]_1 = -\lambda$ (здесь мы обозначаем $1 = e^0$). Обозначим через A подмодуль в Λ, состоящий из всех конечных линейных комбинаций; он является коммутативным кольцом относительно умножения $e^\lambda \cdot e^\mu = e^{\lambda+\mu}$ – это просто групповое кольцо группы $\mathfrak{X}(T)$. Обозначим также через $Q \subset \Lambda$ поле частных кольца A. Отметим, что для любого элемента поля Q вида $q = a/b$, a, $b \in A$, корректно определён элемент

$$[q] = \frac{[a]}{[b]} \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$$

поля рациональных функций на $\mathfrak{h}$.

На Q имеется отображение $q \mapsto q^*$, определённое правилом

$$e^\lambda \mapsto (e^\lambda)^* = e^{-\lambda}.$$

Оказывается [17, теорема 2.2], характер $\operatorname{ch} R$ на самом деле лежит в Q, поэтому там лежит и $(\operatorname{ch} R)^*$. Наконец, положим

$$c_w = [(\operatorname{ch} R)^*], \ d_w = (-1)^{l(w)} \cdot c_w \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Здесь $l(w)$ – длина элемента w в группе Вейля W относительно выбранной системы фундаментальных корней Δ. По определению, c_w и d_w лежат в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$; на самом деле, d_w является многочленом, то есть лежит в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (см. [16] и [10, теорема 7.2.6]).

Определение 1.3. *Элемент $d_w \in S$ называется* многочленом Костанта–Кумара, *соответствующим элементу группы Вейля $w \in W$.*

Из определения видно, что c_w и d_w зависят только от канонической структуры T-модуля на алгебре функций R на касательном конусе C_w, поэтому чтобы показать, что для каких-то двух элементов w, w' группы Вейля касательные конусы различны, достаточно проверить, что

$c_w \neq c_{w'}$, или, что равносильно, $d_w \neq d_{w'}$. С другой стороны, имеется чисто комбинаторное определение многочленов Костанта–Кумара; чтобы его дать, рассмотрим произвольные два элемента $w, v \in W$. Выберем и зафиксируем какое-нибудь приведённое разложение элемента $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \Delta$ – фундаментальные корни, а s_i – простое отражение, соответствующее корню α_i. Положим

$$c_{w,v} = (-1)^{l(w)} \cdot \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} s_{i_2}^{\epsilon_2}\alpha_{i_2}} \cdot \dots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_l}^{\epsilon_l}\alpha_{i_l}},$$

где суммирование ведётся по всем последовательностям $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_l)$ из нулей и единиц, таким, что $s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_l}^{\epsilon_l} = v$. Элемент $c_{w,v} \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ на самом деле зависит только от w и v, но не от выбора приведённого разложения [17, §3].

Пример 1.4. Пусть $\Phi = A_2$, соответственно, $W \cong S_3$. Пусть $w = s_1 s_2 s_1$. Вычислим $c_{w,\mathrm{id}}$, где id – нейтральный элемент группы Вейля. В сумме будет всего два слагаемых, соответствующих последовательностям $(0,0,0)$ и $(1,0,1)$. Значит,

$$c_{w,\mathrm{id}} = (-1)^3 \cdot \left(\frac{1}{\alpha_1\alpha_2\alpha_1} + \frac{1}{-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)\alpha_1}\right) = -\frac{1}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Положим теперь

$$d_{w,v} = \sum r(j_1) \dots r(j_t) \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}], \tag{1}$$

где для любого k от 1 до l, по определению, $r(k) = s_{i_1} \dots s_{i_{k-1}} \alpha_{i_k}$, а суммирование ведётся по всем таким последовательностям $(j_1, \dots, j_t)$, $t = l(v)$, что $s_{i_{j_1}} \dots s_{i_{j_t}}$ – приведённое разложение для v (получающееся из фиксированного приведённого разложения $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ вычёркиванием каких-нибудь отражений). Пусть w_0 – самый длинный элемент в группе W. Замечательный факт состоит в том, что [16]

$$d_{vw_0,ww_0} = (-1)^{l(w)-l(v)} \cdot c_{w,v} \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha. \tag{2}$$

В частности, $d_{w,v}$ тоже не зависит от выбора разложения для w. Кроме того, $c_w = c_{w,\mathrm{id}}$ (и, следовательно, $d_w = d_{w_0,ww_0}$), так что достаточное условие несовпадения касательных конусов может быть проверено чисто в комбинаторных терминах.

В заключение приведём оригинальное определение элементов $c_{w,v}$, использующее нильалгебры Гекке (см. [17] и [10, §7.1]): оно понадобится нам при рассмотрении случая A_n. Обозначим через Q_W векторное пространство над $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ с базисом $\{\delta_w,\ w \in W\}$. На Q_W есть структура кольца, определяемая правилом

$$f\delta_v \cdot g\delta_w = fv(g)\delta_{vw}.$$

Возникающая алгебра называется *нильалгеброй Гекке* (nil-Hecke ring). Для любого i от 1 до n положим

$$x_i = \alpha_i^{-1}(\delta_{s_i} - \delta_{\mathrm{id}}).$$

Если теперь $w = s_{i_1} \dots s_{i_l}$ – приведённое разложение, то элемент

$$x_w = x_{i_1} \dots x_{i_l}$$

не зависит на самом деле от выбранного разложения [15, предложение 2.1].

Более того, оказывается, что элементы $\{x_w,\ w \in W\}$ тоже образуют $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$-базис пространства Q_W [15, предложение 2.2], причём

$$x_w = \sum\nolimits_{v \in W} c_{w,v}\delta_v,$$
$$\delta_w = \sum\nolimits_{v \in W} d_{w,v}x_v.$$

Для нас важную роль также будут играть следующие свойства: при всех $w, v \in W$

$$\text{a) } x_v \cdot x_w = \begin{cases} x_{vw}, & \text{если } l(vw) = l(v) + l(w), \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \tag{3}$$
$$\text{b) } c_{w,v} = -v(\alpha_i)^{-1}(c_{ws_i,v} + c_{ws_i,vs_i}), \text{ если } l(ws_i) = l(w) - 1.$$

(Группа W естественно действует на $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$ автоморфизмами.) Первое свойство доказано в [15, предложение 2.2], а второе сразу следует из первого и из определений (см. также доказательство [17, следствие 3.2]).

1.3. В этом пункте мы кратко напоминаем основные факты, связанные с порядком Брюа на группах Вейля, которые будут нужны нам в дальнейшем. Мы будем писать $v \leqslant w$ и говорить, что v меньше или равно w в смысле порядка Брюа, если какое-нибудь приведённое разложение для v можно получить из какого-нибудь приведённого разложения для w вычёркиванием некоторых отражений. Хорошо известно, что порядок Брюа играет важнейшую роль в ряде геометрических вопросов, связанных с алгебраическими группами; в частности, он кодирует примыкания многообразий Шуберта: X_v лежит в замыкании X_w тогда и только тогда, когда $v \leqslant w$.

Для нас порядок Брюа будет важен потому, что элемент $c_{w,v}$ отличен от нуля в том и только в том случае, когда $v \leqslant w$ [17, следствие 3.2]. К примеру, элемент $c_w = c_{w,\mathrm{id}}$ *всегда* отличен от нуля, так как id – наименьший элемент в W в смысле порядка Брюа. Отметим также (см. [11] и [10, теорема 7.1.11]), что для любых элементов группы Вейля $v, w \in W$ существует такой многочлен $g_{w,v} \in S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, что

$$c_{w,v} = g_{w,v} \cdot \prod_{\alpha>0,\ s_\alpha v \leqslant w} \alpha^{-1}. \tag{4}$$

В пунктах 2.1, 2.2 нас будет интересовать порядок Брюа на симметрической группе, где для него имеется простое и элегантное описание. А именно, для любого $w \in S_n$ обозначим через $\dot{w}$ матрицу размера $n \times n$, определяемую условием

$$(\dot{w})_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{если}\ \ w(j) = i, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Стандартное название – 0–1 матрица, перестановочная матрица или расстановка ладей. Определим теперь матрицу R_w так: её (i,j)-й элемент равен рангу подматрицы, состоящей из первых j столбцов и последних $n-i+1$ строк матрицы $\dot{w}$. Другими словами, $(R_w)_{i,j}$ – это просто количество ладей, стоящих нестрого ниже и левее позиции (i,j).

Пример 1.5. Пусть $n = 7$,

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 2 & 3 & 4 & 5 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ниже изображены матрицы $\dot{w}$ и R_w (единицы, или ладьи, изображаются символом $\otimes$):

$$\dot{w} = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & \otimes & & & & & & \\ \hline 2 & & & \otimes & & & & \\ \hline 3 & & & & \otimes & & & \\ \hline 4 & & & & & \otimes & & \\ \hline 5 & & & & & & \otimes & \\ \hline 6 & & \otimes & & & & & \\ \hline 7 & & & & & & & \otimes \\ \hline \end{array}, \quad R_w = \begin{array}{c|c|c|c|c|c|c|c|} & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 2 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \hline 3 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 4 & 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 & 3 \\ \hline 6 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ \hline 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline \end{array}.$$

Для произвольных целочисленных матриц X и Y будем писать $X \leqslant Y$, если такое неравенство выполняется в каждой позиции. Тогда для произвольных $v,\, w \in S_n$

$$v \leqslant w \text{ равносильно } R_v \leqslant R_w \tag{5}$$

(см., например, [14, теорема 1.6.4]).

1.4. Объясним теперь, почему теорему 1.2 достаточно проверить для неприводимых систем корней. Это почти сразу вытекает из следующего утверждения. Предположим, что система корней Φ представлена в виде объединения двух своих подсистем Φ_1 и Φ_2, лежащих в ортогональных подпространствах. Пусть W_1, W_2 – группы Вейля этих подсистем; если рассмотреть их как подгруппы в W, то $W = W_1 \times W_2$. Пусть $\Delta_1 = \Delta \cap \Phi_1 = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_r\}$ – базис Φ_1, $\Delta_2 = \Delta \cap \Phi_2 = \{\beta_1, \ldots, \beta_s\}$ – базис Φ_2, тогда

$$S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}] \cong \mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s].$$

Для произвольного $v \in W_1$ обозначим через d_v^1 его многочлен Костанта–Кумара (можно считать, что он лежит в S, но зависит лишь от переменных $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$); введём также элемент $c_v^1 \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$. Аналогично, для произвольного $v \in W_2$ возникают $d_v^2 \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ и $c_v^2 \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$, зависящие только от переменных $\beta_1, \ldots, \beta_s$.

Утверждение 1.6. *Пусть $w \in W$, $w_1 \in W_1$, $w_2 \in W_2$ и $w = w_1 w_2$. Тогда*

$$d_w = d_{w_1}^1 d_{w_2}^2, \ c_w = c_{w_1}^1 c_{w_2}^2.$$

Доказательство. Обозначим простые отражения относительно корней α_i через s_i, а относительно корней β_j – через r_j. Пусть l_i – функция длины на W_i относительно Δ_i. Как известно, для любого $v \in W_i$ имеет место равенство $l_i(v) = l(v)$, $i = 1, 2$. Значит, если

$$w_1 = s_{i_1} \dots s_{i_p},\ w_2 = r_{j_1} \dots r_{j_q}$$

– приведённые разложения для w_i в W_i, то они остаются таковыми и в W. Более того,

$$l(w) = l(w_1) + l(w_2) = l_1(w_1) + l_2(w_2),$$

поэтому

$$w = s_{i_1} \dots s_{i_p} r_{j_1} \dots r_{j_q}$$

является приведённым разложением для w в W.

Кроме этого, из того, что $W = W_1 \times W_2$, следует, что равенство

$$s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_p}^{\epsilon_p} r_{j_1}^{\delta_1} \dots r_{j_q}^{\delta_q} = \mathrm{id}$$

для каких-то $\epsilon_i, \delta_j \in \{0, 1\}$ может выполняться тогда и только тогда, когда

$$s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_p}^{\epsilon_p} = r_{j_1}^{\delta_1} \dots r_{j_q}^{\delta_q} = \mathrm{id}.$$

Учитывая, наконец, что все s_i тождественно действуют на Φ_2, а все r_j тождественно действуют на Φ_1, мы получаем

$$\begin{aligned} c_w = (-1)^{l_1(w_1)+l_2(w_2)} \cdot \sum \Bigg(& \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1}\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} s_{i_2}^{\epsilon_2}\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} \dots s_{i_p}^{\epsilon_p}\alpha_{i_p}} \\ & \times \frac{1}{r_{j_1}^{\delta_1}\beta_{j_1}} \cdot \frac{1}{r_{j_1}^{\delta_1} r_{j_2}^{\delta_2}\beta_{j_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{r_{j_1}^{\delta_1} \dots r_{j_q}^{\delta_q}\beta_{j_q}} \Bigg) = c_{w_1}^1 c_{w_2}^2. \end{aligned}$$

Второе утверждение доказано. Первое утверждение сразу следует из второго и из того очевидного факта, что $\Phi^+ = \Phi_1^+ \cup \Phi_2^+$. □

Если теперь проверить, что основная терема выполняется для всех систем корней типа A_n, F_4 и G_2, то только что доказанное утверждение будет гарантировать её выполнение для любой системы корней с такими неприводимыми компонентами (ибо $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ изоморфна кольцу многочленов от n переменных, а оно факториально).

§2. Доказательства

2.1. В этом и следующем пунктах мы докажем основной результат для случая $\Phi = A_{n-1}$, $n \geqslant 2$. Как обычно, мы отождествим Φ^+ с подмножеством евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ вида

$$\{\epsilon_j - \epsilon_i,\ 1 \leqslant j < i \leqslant n\}$$

($\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ – стандартный базис). В рассматриваемом случае W изоморфна S_n, группе подстановок на n символах, при этом транспозиция (i,j) – это в точности отражение $s_{\epsilon_j-\epsilon_i}$. При этом фундаментальными корнями являются $\alpha_1 = \epsilon_1 - \epsilon_2, \ldots, \alpha_{n-1} = \epsilon_{n-1} - \epsilon_n$.

Нас будут интересовать не все элементы W, а только *инволюции* – элементы второго порядка; введём обозначение

$$I_n = I(W) = \{\sigma \in W \mid \sigma^2 = \mathrm{id}\}.$$

Любую инволюцию можно однозначно представить в виде произведения независимых 2-циклов $\sigma = (i_1, j_1) \ldots (i_l, j_l)$, $i_k > j_k$, $j_1 < \ldots < j_l$.

Определение 2.1. Носителем *инволюции $\sigma \in I_n$ называется состоящее из попарно ортогональных корней подмножество Φ^+ вида*

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{\epsilon_{j_1} - \epsilon_{i_1}, \ldots, \epsilon_{j_l} - \epsilon_{i_l}\}.$$

Другими словами, носитель инволюции – это единственное ортогональное подмножество в Φ^+, для которого

$$\sigma = \prod_{\alpha \in \mathrm{Supp}(\sigma)} s_\alpha.$$

(*Порядок, в котором следует отражения, не имеет значения, так как они коммутируют ввиду ортогональности носителя.*)

Пример 2.2. Если

$$n = 7 \quad \text{и} \quad \sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 4 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (5,1)(7,2)(6,3),$$

то

$$\mathrm{Supp}(\sigma) = \{\epsilon_1 - \epsilon_5,\ \epsilon_2 - \epsilon_7,\ \epsilon_3 - \epsilon_6\}.$$

Заметим, что для того, чтобы сравнить две инволюции в смысле порядка Брюа, можно проверять более слабое условие, чем (5). А именно, пусть $w \in I_n$, R_w – матрица, определённая в пункте 1.3. Пусть R_w^* – её строго нижнетреугольная часть, то есть

$$(R_w^*)_{i,j} = \begin{cases} (R_w)_{i,j}, & \text{если } i > j, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Тогда, как гласит [13, теорема 1.10], для любых $v, w \in I_n$

$$v \leqslant w \text{ равносильно } R_v^* \leqslant R_w^*. \tag{6}$$

Мы будем вести доказательство теоремы 1.2 индукцией по n (база $n = 2$ очевидна). Обозначим для этого через $\widetilde{W} = \widetilde{S}_{n-1}$ подгруппу в W, состоящую из подстановок, которые единицу переводят в единицу (ясно, что $\widetilde{W} \cong S_{n-1}$), а через $\widetilde{I}_{n-1} = I(\widetilde{W})$ – множество инволюций в ней. Для любого $w \in \widetilde{W}$ будем через $\widetilde{d}_w$ обозначать его многочлен Костанта–Кумара (при отождествлении $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ с $\mathbb{C}[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}]$ можно считать, что $\widetilde{d}_w$ лежит в $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ и просто не зависит от α_1). Аналогично возникает элемент $\widetilde{c}_w \in \mathbb{C}(\mathfrak{h})$ и, более общим образом, элементы $\widetilde{d}_{w,v}$ и $\widetilde{c}_{w,v}$ для любых $w, v \in \widetilde{W}$. По индукции, $\widetilde{d}_w \neq \widetilde{d}_v$ и $\widetilde{c}_w \neq \widetilde{c}_w$ для любых двух разных инволюций $w, v \in \widetilde{I}_{n-1}$.

Нам потребуется ещё несколько обозначений.

Для любого $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_i \in \Phi^+$ положим $\mathrm{row}(\alpha) = i$, $\mathrm{col}(\alpha) = j$ и для любого k от 1 до n будем называть множества

$$\mathcal{R}_k = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{row}(\alpha) = k\},$$
$$\mathcal{C}_k = \{\alpha \in \Phi^+ \mid \mathrm{col}(\alpha) = k\}$$

k-й *строкой* и k-м *столбцом* соответственно. Таким образом,

$$\widetilde{I}_{n-1} = \{\sigma \in I_n \mid \mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \varnothing\}.$$

Вообще, для любого k и любой инволюции $\sigma \in I_n$ имеем

$$|\mathrm{Supp}(\sigma) \cap (\mathcal{R}_k \cup \mathcal{C}_k)| \leqslant 1.$$

Замечание 2.3. На корнях есть естественный порядок: $\alpha \leqslant \beta$ означает, что $\beta - \alpha$ есть сумма положительных корней. Другими словами, $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_i \leqslant \beta = \epsilon_s - \epsilon_r$ означает, что $s \leqslant j$ и $i \leqslant r$. Используя свойство (6), очень легко проверить, что если w – инволюция, а $\alpha = \epsilon_j - \epsilon_i$ – положительный корень, то $s_\alpha \leqslant w$ тогда и только тогда, когда $\alpha \leqslant \beta$ для какого-нибудь корня $\beta = \epsilon_s - \epsilon_r \in \mathrm{Supp}(\sigma)$. Действительно, пусть это условие выполнено. Тогда

$$(R^*_{s_\alpha})_{k,l} = \begin{cases} 1, & \text{если } j \leqslant k < l \leqslant i, \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

в то время как $(R^*_w)_{k,l} \geqslant 1$ при $s \leqslant k < l \leqslant r$. Если же это условие не выполнено, то

$$(R^*_{s_\alpha})_{i,j} = 1 > 0 = (R^*_w)_{i,j}.$$

В частности, если $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$, где $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_i$, а $\alpha = \epsilon_1 - \epsilon_k \in \mathcal{C}_1$, то $s_\alpha \leqslant \sigma$ в том и только в том случае, когда $\alpha \leqslant \beta$, то есть $k \leqslant i$.

Сначала нам потребуются две важные леммы.

Лемма 2.4. *Пусть* $w \in \widetilde{I}_{n-1}$. *Тогда* $d_w = \widetilde{d}_w \cdot \prod_{\alpha \in \mathcal{C}_1} \alpha$.

Доказательство. Поскольку $\widetilde{W}$ является параболической подгруппой в W, приведённое разложение для w в $\widetilde{W}$ будет таковым и в W. Отсюда сразу получаем $\widetilde{c}_w = c_w$, откуда следует искомый результат. □

Лемма 2.5. *Предположим, что* $w \in I_n$ *и* $\mathrm{Supp}(w) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$. *Запишем элемент* c_w *в несократимом виде*:

$$c_w = A/B, \ A, B \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}], \ (A, B) = 1.$$

Тогда B *делится на* β *в кольце* $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$.

Доказательство. Пусть $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$. Рассмотрим подстановку

$$\begin{aligned} u &= s_{j-1} \dots s_1 = (j, j-1) \dots (2, 1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ j & 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим $v = u^{-1}w$, соответственно, $w = uv$. Ясно, что $v(1) = u^{-1}(w(1)) = u^{-1}(j) = 1$, то есть $v \in \widetilde{W}$. Более того,

$$\begin{aligned} &u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_{i-1} - \epsilon_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } 2 \text{ до } j-1, \\ &u(\alpha_j) = u(\epsilon_j - \epsilon_{j+1}) = \epsilon_{j-1} - \epsilon_{j+1} > 0, \\ &u(\alpha_i) = u(\epsilon_i - \epsilon_{i+1}) = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} = \alpha_i > 0 \text{ для любого } i \text{ от } j+1 \text{ до } n-1. \end{aligned}$$

Как бы то ни было, $u(\alpha_i) > 0$ при $i \geqslant 2$, что равносильно $l(us_i) = l(u) + 1$. Согласно [12, предложение 1.10], отсюда следует, что $l(w) = l(u) + l(v)$.

Тогда, ввиду (3a),

$$\begin{aligned} x_w &= \sum_{s \in W} c_{w,s}\delta_s = x_u x_v = \sum_{g,h \in W} c_{u,g}\delta_g \cdot c_{v,h}\delta_h \\ &= \sum_{g,h \in W} c_{u,g} g(c_{v,h})\delta_{gh} = \sum_{s \in W} \Big(\sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}) \Big) \delta_s. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при базисных элементах δ_s, мы получаем, что

$$c_{w,s} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}s}),$$

для любого $s \in W$, в частности,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in W} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Более того, раз $c_{p,q} \neq 0$ тогда и только тогда, когда $p \geqslant q$, то на самом деле суммирование в правой части ведётся лишь по тем g, для которых $u \geqslant g$ и $v \geqslant g^{-1}$. Обозначим это множество через U и отметим, что из $g \in U$ следует, что g получается из $u = s_{j-1} \dots s_1$ вычёркиванием каких-то простых отражений, причём s_1 вычёркивается *всегда* – иначе будет нарушаться второе условие. Таким образом,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = \sum_{g \in U} c_{u,g} g(c_{v,g^{-1}}).$$

Теперь воспользуемся (3b). Очевидно, $l(us_1) = l(u) - 1$, поэтому

$$c_{u,g} = -g(\alpha_1)^{-1}(c_{us_1,g} + c_{us_1,gs_1}) = -g(\alpha_1)^{-1} c_{us_1,g},$$

так как $us_1 \not\geqslant gs_1$, а потому $c_{us_1,gs_1} = 0$. Значит, выражение для c_w переписывается в виде

$$c_w = -\sum_{g \in U} \frac{c_{us_1,g}\, g(c_{v,g^{-1}})}{g\alpha_1}.$$

Тривиально проверяется, что среди всех $g \in U$ есть не больше одного элемента, для которого $g\alpha_1 = \beta$. А именно, единственный претендент на эту роль – это элемент $g_0 = us_1 = s_{j-1} \dots s_2$. Чтобы показать, что он *действительно* лежит в U, нужно проверить ещё, что $v \geqslant g_0^{-1}$, но предположим пока, что нам удалось это сделать.

В таком случае

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g\alpha_1}. \qquad (7)$$

Обозначим через S' (соотв. через Q') подалгебру в $S = \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$ (соотв. подполе в $\mathbb{C}(\mathfrak{h})$), порождённую $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$. Тогда $c_{v,g_0^{-1}} \in Q'$, а поскольку $g(1) = 1$, то и $g(c_{v,g_0^{-1}}) \in Q'$; в частности, числитель этого выражения в несократимой записи не делится на β. С другой стороны, легко видеть, что

$$c_{us_1,g_0} = c_{us_1,us_1} = \pm\frac{1}{s_{j-1}\alpha_{j-1}} \cdot \frac{1}{s_{j-1}s_{j-2}\alpha_{j-2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{j-1}\ldots s_2\alpha_2}$$

(это сразу следует из того, что $us_1 = s_{j-1}\ldots s_2$). Всё это означает, что несократимая запись первого слагаемого имеет вид $P/\beta Q$ для некоторых многочленов $P, Q \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, причём многочлен P *не равен* нулю.

Аналогично, для любого $g \in U$, не равного g_0, имеем $g(c_{v,g^{-1}}) \in Q'$, в то время как

$$c_{us_1,g} = \pm\frac{1}{s_{l_1}\alpha_{l_1}} \cdot \frac{1}{s_{l_1}s_{l_2}\alpha_{l_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{l_1}\ldots s_{l_k}\alpha_{l_k}},$$

где $g = s_{l_1}\ldots s_{l_k}$ для каких-то $j-1 \geqslant l_1 > l_2 > \ldots > l_k \geqslant 2$. Отсюда видно, что несократимая запись всей остальной суммы имеет вид C/D для некоторых многочленов $C, D \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, второй из которых не делится на β. Окончательно,

$$c_w = \frac{C}{D} + \frac{P}{\beta Q} = \frac{\beta CQ + PD}{\beta DQ}.$$

Многочлены P и D взаимно просты с β, поэтому числитель не делится на β, а значит, в несократимой записи c_w знаменатель будет делиться на β, что и требовалось доказать.

Итак, чтобы завершить доказательство, остаётся проверить, что $g_0 \in U$, то есть что $v \geqslant g_0^{-1}$, или, что то же самое, $v^{-1} \geqslant g_0$. Для этого заметим, что

$$(R_{g_0})_{p,q} = \begin{cases} p-q+1, & \text{если } p \leqslant q, \\ 1, & \text{если } 2 \leqslant q < p \leqslant j, \\ 0, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

(На самом деле, в примере 1.5 рассмотрен g_0 при $n = 7$, $j = 6$.) В то же время,

$$v^{-1} = w^{-1}u = wu = \begin{pmatrix} 1 & \dots & j & \dots \\ j & \dots & 1 & \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ j & 1 & \dots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots \\ 1 & j & \dots \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{v^{-1}})_{p,q} \geqslant 1$ при $2 \leqslant q < p \leqslant j$. Осталось заметить, что на диагонали и выше матрица R_{g_0} совпадает с R_{id}, а id – наименьший элемент в W в смысле порядка Брюа, значит, согласно (5), $v^{-1} \geqslant g_0$. Лемма доказана. □

2.2. Теперь, наконец, мы можем доказать основную теорему для A_n; доказательство моментально вытекает из предложений 2.6, 2.7 и 2.8 (разумеется, все обозначения предыдущего пункта сохраняются).

Предложение 2.6. *Пусть $\sigma, \tau \in I_n$ – произвольные инволюции, причём $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 \neq \varnothing$, а $\mathrm{Supp}(\tau) \cap \mathcal{C}_1 = \varnothing$. Тогда $d_\sigma \neq d_\tau$.*

Доказательство. Пусть $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$. По лемме 2.4, d_τ делится на линейную форму β (в кольце многочленов $\mathbb{C}[\mathfrak{h}]$). С другой стороны, ввиду леммы 2.5, для некоторых взаимно простых многочленов $A, B \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$, где B делится на β, а A – нет,

$$d_\sigma = \pm c_\sigma \cdot \prod_{\alpha > 0} \alpha = \pm \prod_{\alpha > 0} \alpha \cdot A/B,$$

то есть d_σ не делится на β (эта линейная форма сократится). Тем самым, $d_\tau \neq d_\sigma$, что и требовалось доказать. Обратим внимание, что здесь мы никак не использовали индукцию. □

Предложение 2.7. *Пусть $\sigma, \tau \in I_n$ – произвольные инволюции, причём $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$, $\mathrm{Supp}(\tau) \cap \mathcal{C}_1 = \{\gamma\}$ и $\beta \neq \gamma$. Тогда $d_\sigma \neq d_\tau$.*

Доказательство. Без ограничения общности, $\beta > \gamma$, то есть если $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_i$, $\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_s$, то $i > s$ (см. замечание 2.3). Согласно тому же замечанию, $s_\beta \not\leqslant \tau$. Значит, ввиду (4), для некоторого многочлена $g = g_{\tau,\mathrm{id}} \in \mathbb{C}[\mathfrak{h}]$

$$d_\tau = \pm c_\tau \cdot \prod_{\alpha > 0} \alpha = \pm g \cdot \prod_{\alpha > 0,\ s_\alpha \not\leqslant \tau} \alpha,$$

то есть d_τ делится на β (эта линейная форма встречается в последнем произведении). Но, используя лемму 2.5, как в предыдущем предложении, мы видим, что d_σ не делится на β, поэтому $d_\tau \neq d_\sigma$. Здесь мы тоже не использовали индукцию. □

Предложение 2.8. *Пусть $\sigma, \tau \in I_n$ – разные инволюции, причём $\mathrm{Supp}(\sigma) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\} = \mathrm{Supp}(\tau) \cap \mathcal{C}_1$. Тогда $d_\sigma \neq d_\tau$.*

Доказательство. Пусть $\beta = \epsilon_1 - \epsilon_j$. Рассмотрим сначала произвольную инволюцию $w \in I_n$, у которой $\mathrm{Supp}(w) \cap \mathcal{C}_1 = \{\beta\}$. Как в доказательстве леммы 2.5, запишем её в виде $w = uv$, где $u = s_{j-1} \dots s_1$, а $v = u^{-1}w \in \widetilde{W}$. Напомним (см. (7)), что

$$c_w = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v,g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g \in U,\ g \neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

где $U = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v\}$, а $g_0 = us_1 \in U$.

Положим теперь $w' = s_{j-1} w s_{j-1} \in I_n$. Предположим пока, что $j > 2$. Тогда $\mathrm{Supp}(w') \cap \mathcal{C}_1 = \beta' = \epsilon_1 - \epsilon_{j-1}$. Как выше, запишем $w' = u'v'$, где $u' = s_{j-2} \dots s_1$, а $v' \in \widetilde{W}$, тогда

$$c_{w'} = -\frac{c_{u's_1,h_0} h_0(c_{v',h_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{h \in U',\ h \neq h_0} \frac{c_{u's_1,h} h(c_{v,h^{-1}})}{h\alpha_1},$$

где $U' = \{h \in W \mid h \leqslant u',\ h^{-1} \leqslant v'\}$, а $h_0 = u's_1 \in U$.

Наша цель сейчас – сравнить $c_{v,g_0^{-1}}$ с $c_{v',h_0^{-1}}$. Заметим, что $u' = s_{j-1}u$, $v' = vs_{j-1}$ и $h_0 = s_{j-1}g_0$. При этом, напомним,

$$\begin{aligned} u &= s_{j-1} \dots s_1 = (j, j-1) \dots (2,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ j & 1 & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

откуда

$$v\alpha_{j-1} = u^{-1}w(\epsilon_{j-1} - \epsilon_j) = u^{-1}(\epsilon_x - \epsilon_1) = \epsilon_y - \epsilon_2,$$

где $x = w(j-1)$, $y = u^{-1}(x) = v(j-1)$. Если $y = 1$, то $u^{-1}(x) = 1$, то есть $x = j$, но $w(j-1) \neq j$, значит, $y > 2$, поэтому $v\alpha_{j-1} < 0$. Это означает, что $l(vs_{j-1}) = l(v) - 1$, а потому, ввиду (3b),

$$c_{v,g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_{j-1},g_0^{-1}} + c_{vs_{j-1},g_0^{-1}s_{j-1}}}{-g_0^{-1}\alpha_{j-1}}.$$

Мы замечаем, что

$$g_0 = s_{j-1} \dots s_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & j-1 & j & j+1 & \dots & n \\ 1 & j & 2 & \dots & j-2 & j-1 & j+1 & \dots & n \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{g_0})_{j,2} = 1$, в то время как

$$(vs_{j-1})^{-1} = s_{j-1}wu = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots \\ 1 & j-1 & \ldots \end{pmatrix},$$

поэтому $(R_{(vs_{j-1})^{-1}})_{j,2}{=}0$. Теперь (5) показывает, что $(vs_{j-1})^{-1}{\not\geqslant} g_0$, или, что равносильно, $vs_{j-1} \not\geqslant g_0^{-1}$. Получаем, что $c_{vs_{j-1},g_0^{-1}} = 0$, откуда

$$c_{v,g_0^{-1}} = \frac{c_{vs_{j-1},g_0^{-1}s_{j-1}}}{-g_0^{-1}\alpha_{j-1}} = \frac{c_{v',h_0^{-1}}}{\epsilon_2 - \epsilon_j}.$$

Если $j-1 > 2$, то проделаем то же самое с w', и так далее. Продолжая этот процесс, в конце концов получим, что $w_1 = awa^{-1}$, где $a = s_2s_3\ldots s_{j-1}$. При этом $w_1 \in I_n$ и

$$\mathrm{Supp}(w_1) \cap \mathcal{C}_1 = \{\alpha_1\} = \{\epsilon_1 - \epsilon_2\}.$$

Мы можем теперь записать $w_1 = u_1v_1$, где $u_1 = s_1$, а $v_1 \in \widetilde{W}$ – тоже *инволюция*, то есть $v_1 \in \widetilde{I}_{n-1}$. Рассуждения выше показывают, что $c_{v,g_0^{-1}} = fc_{v_1,\mathrm{id}}$, где

$$f = \frac{1}{(\epsilon_2 - \epsilon_j)\cdot(\epsilon_2 - \epsilon_{j-1})\cdot\ldots\cdot(\epsilon_2 - \epsilon_3)}$$

не зависит от самой инволюции w.

Рассмотрим теперь инволюции σ и τ. Запишем их в виде $\sigma = uv_\sigma$ и $\tau = uv_\tau$, как выше. Раз $\sigma \neq \tau$, то и $\sigma_1 \neq \tau_1$, где $\sigma_1 = a\sigma a^{-1}$, $\tau_1 = a\tau a^{-1}$. Следовательно, и $v_\sigma^1 = s_1\sigma_1 \neq v_\tau^1 = s_1\tau_1$. По предположению индукции по n, для инволюций v_σ^1 и v_τ^1 в $\widetilde{W}$ выполняется $\widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau^1,\mathrm{id}}$. Лемма 2.4 показывает, что $c_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} = \widetilde{c}_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq \widetilde{c}_{v_\tau^1,\mathrm{id}} = c_{v_\tau^1,\mathrm{id}}$, а тогда и

$$c_{v_\sigma,g_0^{-1}} = fc_{v_\sigma^1,\mathrm{id}} \neq fc_{v_\tau^1,\mathrm{id}} = c_{v_\tau,g_0^{-1}},$$

а значит, и $g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) \neq g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})$.

Если обозначить теперь

$$U_\sigma = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v_\sigma^{-1}\}$$

и, аналогично,

$$U_\tau = \{g \in W \mid g \leqslant u,\ g^{-1} \leqslant v_\tau^{-1}\},$$

то, как и выше,

$$c_\sigma = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v_\sigma, g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U_\sigma,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\sigma,g^{-1}})}{g\alpha_1},$$

$$c_\tau = -\frac{c_{us_1,g_0} g_0(c_{v_\tau, g_0^{-1}})}{\beta} - \sum_{g\in U_\tau,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\tau,g^{-1}})}{g\alpha_1}.$$

Запишем всё в несократимой записи: пусть

$$- c_{us_1,g_0} = A/B,\ g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) = P_\sigma/Q_\sigma,\ g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}}) = P_\tau/Q_\tau,$$

$$- \sum_{g\in U_\sigma,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\sigma,g^{-1}})}{g\alpha_1} = \frac{C_\sigma}{D_\sigma},$$

$$- \sum_{g\in U_\tau,\ g\neq g_0} \frac{c_{us_1,g} g(c_{v_\tau,g^{-1}})}{g\alpha_1} = \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$

Тогда если $d_\sigma = d_\tau$, то и $c_\sigma = c_\tau$, то есть

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{P_\sigma}{\beta Q_\sigma} + \frac{C_\sigma}{D_\sigma} = \frac{A}{B}\cdot\frac{P_\tau}{\beta Q_\tau} + \frac{C_\tau}{D_\tau}.$$

Это равносильно тому, что

$$\frac{AD_\sigma P_\sigma + \beta BC_\sigma Q_\sigma}{\beta BD_\sigma Q_\sigma} = \frac{AD_\tau P_\tau + \beta BC_\tau Q_\tau}{\beta BD_\tau Q_\tau}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем, что

$$\beta BQ_\sigma Q_\tau (C_\sigma D_\tau - C_\tau D_\sigma) = AD_\sigma D_\tau (P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau).$$

Ни один из многочленов A, D_σ, D_τ не делится на β: все они лежат в подалгебре S', порождённой $\alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1}$, и отличны от нуля. В силу факториальности кольца многочленов,

$$P_\tau Q_\sigma - P_\sigma Q_\tau$$

обязан делиться на β. Но он тоже лежит в подалгебре S', поэтому равен нулю. Это означает, что

$$g_0(c_{v_\sigma,g_0^{-1}}) = g_0(c_{v_\tau,g_0^{-1}})$$

– противоречие. Предложение доказано. □

2.3. Рассмотрим теперь случаи G_2 и F_4. По сути, доказательство теоремы 1.2 для них сводится к прямому перебору всех многочленов. Для G_2 вычисления совсем просты. А именно, в случае G_2 у нас есть два фундаментальных корня α_1, α_2; квадрат длины первого равен единице, квадрат длины второго равен трём, угол между ними равен $5\pi/6$. Ниже перечислены все инволюции в группе Вейля и приведены их многочлены Костанта–Кумара:

w	d_w
id	$18\alpha_1^5\alpha_2 + 45\alpha_1^4\alpha_2^2 + 40\alpha_1^3\alpha_2^3 + 15\alpha_1^2\alpha_2^4 + 2\alpha_1\alpha_2^5$
s_1	$18\alpha_1^4\alpha_2 + 45\alpha_1^3\alpha_2^2 + 40\alpha_1^2\alpha_2^3 + 15\alpha_1\alpha_2^4 + 2\alpha_2^5$
$s_1s_2s_1$	$18\alpha_1^3 + 39\alpha_1^2\alpha_2 + 27\alpha_1\alpha_2^2 + 6\alpha_2^3$
$s_1s_2s_1s_2s_1$	$6\alpha_1 + 4\alpha_2$
s_2	$18\alpha_1^5 + 45\alpha_1^4\alpha_2 + 40\alpha_1^3\alpha_2^2 + 15\alpha_1^2\alpha_2^3 + 2\alpha_1\alpha_2^4$
$s_2s_1s_2$	$18\alpha_1^3 + 27\alpha_1^2\alpha_2 + 13\alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_2^3$
$s_2s_1s_2s_1s_2$	$4\alpha_1 + 2\alpha_2$
$s_2s_1s_2s_1s_2s_1$	1

Для F_4 вычисления, конечно, резко усложняются. Пусть α_1, α_2, α_3, α_4 – фундаментальные корни, занумерованные, как в [2]. Тогда, к примеру, для инволюции

$$w = s_1s_2s_3s_4s_2s_3s_1s_2s_3s_4s_3s_2s_3s_1s_2s_3s_1s_2$$

многочлен Костанта–Кумара имеет вид

$$\begin{aligned}
d_w = {}& 4\alpha_1^6 + 48\alpha_1^5\alpha_2 + 237\alpha_1^4\alpha_2^2 + 617\alpha_1^3\alpha_2^3 + 894\alpha_1^2\alpha_2^4 + 684\alpha_1\alpha_2^5\\
&+ 216\alpha_2^6 + 72\alpha_1^5\alpha_3 + 712\alpha_1^4\alpha_2\alpha_3 + 2782\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 + 5374\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_3\\
&+ 5136\alpha_1\alpha_2^4\alpha_3 + 1944\alpha_2^5\alpha_3 + 532\alpha_1^4\alpha_3^2 + 4160\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3^2 + 12053\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2\\
&+ 15349\alpha_1\alpha_2^3\alpha_3^2 + 7254\alpha_2^4\alpha_3^2 + 2064\alpha_1^3\alpha_3^3 + 11960\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^3\\
&+ 22832\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^3 + 14372\alpha_2^3\alpha_3^3 + 4432\alpha_1^2\alpha_3^4 + 16912\alpha_1\alpha_2\alpha_3^4 + 15952\alpha_2^2\alpha_3^4\\
&+ 4992\alpha_1\alpha_3^5 + 9408\alpha_2\alpha_3^5 + 2304\alpha_3^6 + 48\alpha_1^5\alpha_4 + 476\alpha_1^4\alpha_2\alpha_4\\
&+ 1862\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_4 + 3596\alpha_1^2\alpha_2^3\alpha_4 + 3432\alpha_1\alpha_2^4\alpha_4 + 1296\alpha_2^5\alpha_4\\
&+ 712\alpha_1^4\alpha_3\alpha_4 + 5568\alpha_1^3\alpha_2\alpha_3\alpha_4 + 16118\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4 + 20490\alpha_1\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4\\
&+ 9660\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4 + 4144\alpha_1^3\alpha_3^2\alpha_4 + 23976\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4 + 45676\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+ 28678\alpha_2^3\alpha_3^2\alpha_4 + 11840\alpha_1^2\alpha_3^3\alpha_4 + 45072\alpha_1\alpha_2\alpha_3^3\alpha_4 + 42400\alpha_2^2\alpha_3^3\alpha_4\\
&+ 16616\alpha_1\alpha_3^4\alpha_4 + 31228\alpha_2\alpha_3^4\alpha_4 + 9168\alpha_3^5\alpha_4 + 236\alpha_1^4\alpha_4^2\\
&+ 1844\alpha_1^3\alpha_2\alpha_4^2 + 5330\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_4^2 + 6762\alpha_1\alpha_2^3\alpha_4^2 + 3180\alpha_2^4\alpha_4^2\\
&+ 2744\alpha_1^3\alpha_3\alpha_4^2 + 15884\alpha_1^2\alpha_2\alpha_3\alpha_4^2 + 30114\alpha_1\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^2 + 18858\alpha_2^3\alpha_3\alpha_4^2\\
&+ 11728\alpha_1^2\alpha_3^2\alpha_4^2 + 45530\alpha_1\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^2 + 41776\alpha_2^2\alpha_3^2\alpha_4^2 + 21868\alpha_1\alpha_3^3\alpha_4^2\\
&+ 40982\alpha_2\alpha_3^3\alpha_4^2 + 15024\alpha_3^4\alpha_4^2 + 600\alpha_1^3\alpha_4^3 + 3456\alpha_1^2\alpha_2\alpha_4^3\\
&+ 6552\alpha_1\alpha_2^2\alpha_4^3 + 4092\alpha_2^3\alpha_4^3 + 5112\alpha_1^2\alpha_3\alpha_4^3 + 19356\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4^3\\
&+ 18108\alpha_2^2\alpha_3\alpha_4^3 + 14244\alpha_1\alpha_3^2\alpha_4^3 + 26616\alpha_2\alpha_3^2\alpha_4^3 + 12996\alpha_3^3\alpha_4^3\\
&+ 828\alpha_1^2\alpha_4^4 + 3126\alpha_1\alpha_3\alpha_4^4 + 2916\alpha_2^2\alpha_4^4 + 4596\alpha_1\alpha_3\alpha_4^4 + 8562\alpha_2\alpha_3\alpha_4^4\\
&+ 6264\alpha_3^2\alpha_4^4 + 588\alpha_1\alpha_4^5 + 1092\alpha_2\alpha_4^5 + 1596\alpha_3\alpha_4^5 + 168\alpha_4^6,
\end{aligned}
$$

что даёт представление о сложности вычислений в этом случае. С помощью пакета `SAGE` [18] мы проверили, тем не менее, что и для F_4 многочлены Костанта–Кумара для всех 139 инволюций различны (предыдущий пример тоже получен с использованием этого пакета). Листинг программы и список многочленов см. по адресу
`http://algeom.samsu.ru/extra/publications/List_F4.pdf`. Таким образом, теорема 1.2 полностью доказана.

§3. Заключительные замечания

3.1. Одна из гипотез, сформулированных в [4], гласит, что касательные конусы совпадают для произвольного элемента $w \in W$ и обратного к нему. Этот факт несложно доказать явно, см. [1]. В то же время, равенство $d_w = d_{w^{-1}}$ для любой системы корней может быть установлено прямыми комбинаторными рассуждениями.

Предложение 3.1. *Пусть* $w \in W$, w^{-1} *– обратный к нему в* W. *Тогда* $d_w = d_{w^{-1}}$.

Доказательство. Пусть w – произвольный элемент группы Вейля W. Зафиксируем какое-нибудь его приведённое разложение:

$$w = s_{i_1} s_{i_2} \dots s_{i_l}.$$

Напомним, что (см. (2) и [16])

$$d_{vw_0,ww_0} = (-1)^{l(w)-l(v)} \cdot c_{w,v} \cdot \prod_{\alpha\in\Phi^+} \alpha.$$

Если $v = \mathrm{id}$, то получим:

$$d_w = d_{w_0, ww_0} = (-1)^{l(w)} \cdot c_w \cdot \prod_{\alpha \in \Phi^+} \alpha.$$

Так как $l(w) = l(w^{-1})$, то $d_w = d_{w^{-1}}$ тогда и только тогда, когда $c_w = c_{w^{-1}}$. По определению,

$$c_w = c_{w,\mathrm{id}} = (-1)^{l(w)} \cdot \sum \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} \alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} s_{i_2}^{\epsilon_2} \alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots s_{i_l}^{\epsilon_l} \alpha_{i_l}},$$

где суммирование ведётся по всем последовательностям $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_l)$ из нулей и единиц таким, что $s_{i_1}^{\epsilon_1} \ldots s_{i_l}^{\epsilon_l} = \mathrm{id}$. Элемент c_w зависит только от w, но не от выбора приведённого разложения. Покажем, что для c_w и $c_{w^{-1}}$ все слагаемые в этой сумме совпадают.

Если $s_{i_1} s_{i_2} \ldots s_{i_l}$ – приведённое разложение для w, то $s_{i_l} s_{i_{l-1}} \ldots s_{i_1}$ – приведённое разложение для w^{-1}.

Рассмотрим теперь произвольную последовательность $(p_1, \ldots, p_l)$ из нулей и единиц такую, что $s_{i_1}^{p_1} \ldots s_{i_l}^{p_l} = \mathrm{id}$. Обозначим за k число единиц в этой последовательности, остальные элементы равны 0. Пусть эти единицы стоят на местах с номерами $j_1, j_2, \ldots j_k$. Тогда соответствующее слагаемое нашей суммы примет вид

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\alpha_{i_1}} \cdot \frac{1}{\alpha_{i_2}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_{j_1}} \alpha_{i_{j_1}}} \cdot \frac{1}{s_{i_{j_1}} \alpha_{i_{j_1+1}}} \cdot \ldots \\
&\times \frac{1}{s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \alpha_{i_{j_2}}} \cdot \frac{1}{s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \alpha_{i_{j_2+1}}} \cdot \ldots \\
&\times \frac{1}{s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \ldots s_{i_{j_{k-1}}} \alpha_{i_{j_{k-1}}}} \cdot \frac{1}{s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \ldots s_{i_{j_{k-1}}} \alpha_{i_{j_{k-1}+1}}} \cdot \ldots \\
&\times \frac{1}{s_{i_{j_1}} s_{i_{j_2}} \ldots s_{i_{j_{k-1}}} \alpha_{i_{j_k - 1}}} \cdot \frac{1}{\alpha_{i_{j_k}}} \cdot \frac{1}{\alpha_{i_{j_{k+1}}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{\alpha_{i_l}}.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим слагаемое для $c_{w^{-1}}$, соответствующее перевёрнутой последовательности $(p_l, \ldots, p_1)$ из нулей и единиц. Ясно, что $s_{i_l}^{p_l} \ldots s_{i_1}^{p_1} = \mathrm{id}$ для $c_{w^{-1}}$, так как $s_{i_1}^{p_1} \ldots s_{i_l}^{p_l} = \mathrm{id}$ изначально. Номера мест, на которых стоят единицы в этой последовательности тогда будут иметь вид $l - j_k + 1$, ..., $l - j_2 + 1$, $l - j_1 + 1$. Обозначим $s'_{i_j} = s_{i_{l-j+1}}$ и $\alpha'_{i_j} = \alpha_{i_{l-j+1}}$.

Пусть t – любое число от 1 до k. Возьмём часть знаменателя слагаемого в $c_{w^{-1}}$ вида

$$\frac{1}{s'_{i_{l-j_k+1}} s'_{i_{l-j_{k-1}+1}} \ldots s'_{i_{l-j_t+1}} \alpha'_{i_{l-j_t+2}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s'_{i_{l-j_k+1}} s'_{i_{l-j_{k-1}+1}} \ldots s'_{i_{l-j_t+1}} \alpha'_{i_{l-j_{t-1}}}}.$$

Тогда

$$s'_{i_{l-j_k+1}} s'_{i_{l-j_{k-1}+1}} \ldots s'_{i_{l-j_t+1}} s'_{i_{l-j_{t-1}+1}} \ldots s'_{i_{l-j_1+1}} = \mathrm{id},$$

следовательно,

$$s'_{i_{l-j_k+1}} s'_{i_{l-j_{k-1}+1}} \ldots s'_{i_{l-j_t+1}} = s'_{i_{l-j_1+1}} \ldots s'_{i_{l-j_{t-1}+1}} = s_{j_1} \ldots s_{j_{t-1}},$$

а в знаменателе соответствующего слагаемого в c_w встречается множитель

$$\frac{1}{s_{i_{j_1}} \ldots s_{i_{j_{t-1}}} \alpha_{i_{j_{t-1}+1}}} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{s_{i_{j_1}} \ldots s_{i_{j_{t-1}}} \alpha_{i_{j_t-1}}}.$$

Корни, заключённые строго между номерами j_{t-1} и j_t в c_w, отличаются от корней, заключённых строго между номерами $l - j_t + 1$ и $l - j_{t-1} + 1$ соответственно в $c_{w^{-1}}$, только порядком следования; на них действуют одинаковые композиции отражений. Кроме того,

$$\frac{1}{s'_{i_{l-j_k+1}} s'_{i_{l-j_{k-1}+1}} \ldots s'_{i_{l-j_t+1}} \alpha'_{i_{l-j_t+1}}} = \frac{1}{s_{i_{j_1}} \ldots s_{i_{j_{t-1}}} \alpha_{i_{j_t}}} = -\frac{1}{s_{i_{j_1}} \ldots s_{i_{j_{t-1}}} s_{i_{j_t}} \alpha_{i_{j_t}}}.$$

В силу чётности числа k мы заключаем, что знаменатели в рассматриваемых слагаемых состоят из одинаковых множителей, а значит, и сами эти слагаемые одинаковы. □

3.2. В заключение мы кратко опишем связь изучаемых касательных конусов с коприсоединёнными орбитами в случае $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ или $\mathrm{SL}_n(\mathbb{C})$ (последние играют ключевую роль в теории представлений унипотентного радикала U группы B согласно методу орбит А. А. Кириллова, см. [6, 7]). В данном случае U – это унитреугольная группа, то есть группа верхнетреугольных матриц с единицами на диагонали; её алгебра Ли $\mathfrak{n}$ состоит из верхнетреугольных матриц с нулями на диагонали. Группы B и U действуют на $\mathfrak{n}$ присоединённым образом (то есть сопряжениями); двойственное действие на сопряжённом пространстве $\mathfrak{n}^*$ называется *коприсоединённым*. Напомним, что через $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{b}$ мы обозначили алгебры Ли групп G, B соответственно.

Касательное пространство $T_p\mathcal{F}$ к многообразию флагов $\mathcal{F} = G/B$ естественно отождествляется с $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$, а то, в свою очередь, с $\mathfrak{n}^*$ (например, с помощью формы Киллинга и корневого разложения алгебры $\mathfrak{g}$). Таким образом, касательные конусы C_w, $w \in S_n$, можно рассматривать как подсхемы в $T_pX_w \subseteq T_p\mathcal{F} \cong \mathfrak{n}^*$. Более того, действие B на $\mathcal{F}$ сопряжениями индуцирует действие этой группы на касательном пространстве, которое совпадает с коприсоединённым действием после отождествления $T_p\mathcal{F}$ с $\mathfrak{n}^*$. Каждый касательный конус является B-инвариантным, то есть распадается на коприсоединённые орбиты.

С другой стороны, с каждой инволюцией $w \in S_n$ можно связать коприсоединённую орбиту $\Omega_w \subseteq \mathfrak{n}^*$ группы B следующим образом. Выберем в $\mathfrak{n}$ базис из матричных единиц и через f_w обозначим элемент $\mathfrak{n}^*$, равный сумме тех ковекторов $e_{j,i}^*$, $j < i$, для которых в разложении w встречается независимый цикл (i, j). Легко видеть, что $\Omega_w \subset C_w$, тем самым, и $\overline{\Omega}_w \subseteq C_w$. Проделанные в [4] и в [13] вычисления показывают, что при $n \leqslant 5$ замыкание совпадает с касательным конусом. Это позволяет высказать такую гипотезу [13, Гипотеза 1.11]: $\overline{\Omega}_w = C_w$ для любой инволюции $w \in S_n$. Дальнейшие обсуждения связи метода орбит с геометрией многообразий Шуберта, формулу для размерности Ω_w и гипотетическое описание $\overline{\Omega}_w$ как аффинного многообразия см. в [13, §4].

Литература

1. М. А. Бочкарёв, *Касательные конусы многообразий Шуберта.* — Третья междунар. школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, посв. 75-летию Э.Б. Винберга. Тольятти, Россия, 25–30 июня 2012 г. Тез. докл. Тольятти, изд-во ТГУ, 2012, с. 12–13.
2. Н. Бурбаки, *Группы Ли и алгебры Ли.* Главы 4–6. М., Мир (1972).
3. Д. Ю. Елисеев, М. В. Игнатьев, *Многочлены Костанта и касательные конусы к многообразиям Шуберта.* — Третья междунар. школа-конференция “Алгебры Ли, алгебраические группы и теория инвариантов”, посв. 75-летию Э.Б. Винберга. Тольятти, Россия, 25–30 июня 2012 г. Тез. докл. Тольятти, изд-во ТГУ, 2012, с. 24–25.
4. Д. Ю. Елисеев, А. Н. Панов, *Касательные конусы многообразий Шуберта для A_n малого ранга.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 218–225, см. также arXiv: `math.RT/1109.0399`.

5. М. В. Игнатьев, *Порядок Брюа–Шевалле на инволюциях в гипероктаэдральной группе и комбинаторика замыканий B-орбит.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 166–188, см. также arXiv: `math.RT/1112.2624`.
6. А. А. Кириллов, *Унитарные представления нильпотентных групп Ли.* — Успехи мат. наук **17** (1962), 57–110.
7. А. А. Кириллов, *Лекции по методу орбит.* Научная книга (ИДМИ), Новосибирск (2002).
8. Дж. Хамфри, *Линейные алгебраические группы.* Наука, М. (1980).
9. S. Billey, *Kostant polynomials and the cohomology ring for G/B.* — Duke Math. J. **96** (1999), 205–224.
10. S. Billey, V. Lakshmibai, *Singular loci of Schubert varieties.* Progr. in Math. **182**, Birkhäuser (2000).
11. M. Dyer, *The nil-Hecke ring and Deodhar's conjecture on Bruhat intervals.* — Invent. Math. **111** (1993), 571–574.
12. J. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups.* Cambridge University Press, Cambridge (1992).
13. M. V. Ignatyev, *Combinatorics of B-orbits and the Bruhat–Chevalley order on involutions.* — Transformation Groups **17**, No. 3 (2012), 747–780, see also arXiv: `math.RT/1101.2189`.
14. F. Incitti, *Bruhat order on the involutions of classical Weyl groups.* Ph.D. thesis. Dip. di Mat. "Guido Castelnuovo", Università di Roma "La Sapienza" (2003).
15. B. Kostant, S. Kumar, *The nil-Hecke ring and cohomology of G/P for a Kac–Moody group G.* — Adv. Math. **62** (1986), 187–237.
16. B. Kostant, S. Kumar, *T-equivariant K-theory of generalized flag varieties.* — J. Diff. Geom. **32** (1990), 549–603.
17. S. Kumar, *The nil-Hecke ring and singularity of Schubert varieties.* — Invent. Math. **123** (1996), 471–506.
18. W. A. Stein et al. *Sage Mathematics Software (Version 4.6.1).* The Sage Development Team, 2011, available at `http://www.sagemath.org`.

Eliseev D. Yu., Ignat'ev M. V. Kostant–Kumar polynomials and tangent cones to Schubert varieties for involutions in A_n, F_4 and G_2.

Let G be a complex reductive algebraic group and W its Weyl group. We prove that if W are of type A_n, F_4 or G_2 and w, w' are disjoint involutions in W, then the corresponding Kostant–Kumar polynomials do not coincide. As a consequence, we deduce that the tangent cones to the Schubert subvarieties X_w, $X_{w'}$ of the flag variety of G do not coincide, too.

Самарский государственный университет,
ул. Ак. Павлова, д. 1,
443011, Самара, Россия
E-mail: `dmitriyelis@gmail.com`,
`mihail.ignatev@gmail.com`

Поступило 16 сентября 2012 г.