Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 414, 2013 г.

Г. В. Воскресенская

ЭТА-ФУНКЦИЯ ДЕДЕКИНДА В АЛГЕБРЕ И ТЕОРИИ ЧИСЕЛ: СТАРЫЕ И НОВЫЕ ЗАДАЧИ

1. Введение

Исследования по эта-функциям пересекаются с математическими исследованиями в различных областях – теории чисел, теории групп, комплексном анализе, комбинаторике и других. Это очень красивая теория, имеющая разнообразные приложения. История изучения эта-функций насчитывает уже полтора века – от классических работ Кронекера и Дедекинда до современных работ по представлениям больших спорадических групп и теории суперструн. Но новые интересные открытые проблемы не перестают появляться. В этом обзоре мы расскажем о некоторых из них. Автор очень надеется на привлечение к этим задачам внимания молодых математиков.

Мы приведем лишь необходимые определения. Большую информацию о классических понятиях можно найти в монографиях Н. Коблица и К. Оно [9, 59]. Нумерация теорем, определений и таблиц в этом обзоре сплошная.

2. Эта-произведения и эта-частные

2.1. Определение модулярной формы относительно конгруэнц-подгруппы. Рассмотрим $H = \{z \in \mathbf{C} : \mathrm{Im}(z) > 0\}$ – верхнюю комплексную полуплоскость. На ней дробно-линейными преобразованиями действует группа $\Gamma = \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$. Группа $\Gamma(N)$ называется главной конгруэнц-подгруппой. Она определяется следующим образом

$$\Gamma(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : a \equiv d \equiv 1 \pmod{N},\ b \equiv c \equiv 0 \pmod{N} \right\}.$$

Ключевые слова: представления групп, модулярные формы, эта-функция Дедекинда.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ 12-01-00137.

Определим действие оператора:

$$f\mid_k[\gamma]=(cz+d)^{-k}f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right),\ \gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in \mathrm{SL}_2(\mathbf{Z}).$$

Рассмотрим конгруэнц-подгруппу $\Gamma(N)\subset\widetilde{\Gamma}\subset\Gamma$.

Классы эквивалентных точек в $\mathbf{Q}\bigcup\infty$ относительно действия $\widetilde{\Gamma}$ называются параболическими вершинами. Так же называются и представители классов эквивалентности.

Определение 1. *Комплекснозначная функция $f(z)$ на верхней полуплоскости H называется модулярной формой относительно подгруппы $\widetilde{\Gamma}$ с характером χ (χ – характер Дирихле по модулю N), если*

1) $f\mid_k[\gamma]=\chi(d)f(z)$, *для всех* $\gamma\in\widetilde{\Gamma}$;
2) $f(z)$ *голоморфна на* H *и в параболических вершинах.*

Условие 2) понимается по определению следующим образом:

Так как $f(z+1)=f(z)$, то существует разложение

$$f(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}a(n)q^n,\ q=e^{2\pi iz},$$

которое называется рядом Фурье для $f(z)$ в ∞. Если $n_0\geqslant 0$, то говорят, что $f(z)$ голоморфна в ∞.

Если $s\in\mathbf{Q}$, $s=\alpha(\infty)$ (где $\alpha\in\Gamma$) – другая параболическая вершина, то ряд Фурье для $f(z)$ в s определяется выражением

$$(f\mid_k[\alpha])(z)=\sum_{n=n_0}^{\infty}a(n)q_N^n,\ q_N=e^{\frac{2\pi iz}{N}}.$$

Число $\mathrm{ord}_s(f)=n_0=\{\min\ n: a(n)\neq 0\}$ называется порядком $f(z)$ в s. Порядок не зависит от выбора представителя в классе эквивалентных параболических точек: если $s=\beta(s_1)$, $\beta\in\ \widetilde{\Gamma}$, то $\mathrm{ord}_s(f)=\mathrm{ord}_{s_1}(f)$. Если $n_0\geqslant 0$, то $f(z)$ называется голоморфной в s. Если $n_0>0$ для всех параболических вершин, то $f(z)$ называется *параболической формой.*

Модулярные формы относительно группы $\widetilde{\Gamma}$ с характером χ образуют линейное пространство $M_k(\widetilde{\Gamma},\chi)$, параболические формы относительно группы $\widetilde{\Gamma}$ с характером χ образуют линейное пространство $S_k(\widetilde{\Gamma},\chi)$.

Если $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_0(N) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma : c \equiv 0 \pmod{N} \right\}$, то говорят, что модулярная форма имеет уровень N.

На пространствах модулярных и параболических форм вводятся операторы Гекке, действие которых можно определить следующим образом. Если

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n) q^n \in M_k(\Gamma_0(N), \chi),$$

то

$$f(z) \mid T_{p,k,\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} (a(pn) + \chi(p) p^{k-1} a(n/p)) q^n.$$

Если $(p,n) = 1,\ a(n/p) = 0$.

$$f(z) \mid T_{m,k,\chi} = \sum_{n=0}^{\infty} (\sum_{d|(m,n)} (\chi(d) d^{k-1} a(mn/d^2)) q^n.$$

Считаем $\chi(n) = 0$, если $(N,n) \neq 1$. Если $m \geqslant 2$, то $f(z) \mid T_{m,k,\chi} \in M_k(\Gamma_0(N),\chi)$. Если $f(z) \in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$, то $f(z) \mid T_{m,k,\chi} \in S_k(\Gamma_0(N),\chi)$. Если $f(z)$ является собственной формой относительно всех $T_{m,k,\chi}$, то $a(mn) = a(n)a(m)$, если $(m,n) = 1$.

2.2. Вычисление размерностей.

2.2.1. Формула Коэна–Остерле. В 1977 году французские ученые А. Коэн и Ж. Остерле вывели формулу, которая является основой для вычисления размерностей пространств модулярных форм [20]. В теореме 1 приведем ее формулировку. Для этого сначала вводятся обозначения.

Пусть χ – характер Дирихле, $\chi(-1) = (-1)^k$, f – его кондуктор. Если $p|N$, то обозначим через r_p максимальную степень, в которой p делит N, через s_p – максимальную степень, в которой p делит f.

$$\lambda(r_p, s_p, p) = \begin{cases} p^{r'} + p^{r'-1}, & \text{если } 2s_p \leqslant r_p = 2r', \\ 2p^{r'}, & \text{если } 2s_p \leqslant r_p = 2r'+1, \\ 2p^{r_p - s_p}, & \text{если } 2s_p \geqslant r_p, \end{cases}$$

$$\nu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod{2}, \\ -\frac{1}{4}, & k \equiv 2 \pmod{4}, \\ \frac{1}{4}, & k \equiv 0 \pmod{4}, \end{cases}$$

$$\mu_k = \begin{cases} 0, & k \equiv 1 \pmod 3, \\ -\frac{1}{3}, & k \equiv 2 \pmod 3, \\ \frac{1}{3}, & k \equiv 0 \pmod 3. \end{cases}$$

Теорема 1 [20]**.** *Если k – целое, χ – характер Дирихле по модулю N, $\chi(-1) = (-1)^k$, то*

$$\begin{aligned} &\dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi)) - \dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi)) \\ &= \frac{(k-1)N}{12}\prod_{p|N}(1+p^{-1}) - \frac{1}{2}\prod_{p|N}\lambda(r_p,s_p,p) \\ &+ \nu_k \cdot \sum_{x:x^2+1\equiv 0(N)} \chi(x) + \mu_k \cdot \sum_{x:x^2+x+1\equiv 0(N)} \chi(x). \end{aligned}$$

Если $k > 2$, то $\dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi)) = 0$. Левая часть становится равна $\dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi))$. Если $k \leqslant 0$, то $\dim_{\mathbf{C}}(S_k(\Gamma_0(N),\chi)) = 0$. Левая часть становится равна $-\dim_{\mathbf{C}}(M_{2-k}(\Gamma_0(N),\chi))$.

2.2.2. Упрощение формулы. В огромном количестве случаев два последних слагаемых обращаются в ноль, что значительно облегчает вычисления. Уравнение $x^2 + 1 \equiv 0 \pmod N$ не имеет решений, если N делится на 4 или на простое нечетное $p \equiv 3 \pmod 4$. Уравнение $x^2 + x + 1 \equiv 0 \pmod N$ не имеет решений, если N делится на 9 или на простое $p \equiv 2 \pmod 3$.

2.3. Определение эта-произведений и эта-частных.

η-функция Дедекинда определяется формулой:

$$\eta(z) = q^{1/24}\prod_{n=1}^{\infty}(1-q^n), \ q = e^{2\pi i z}, \ z \in H.$$

Замечательно, что $\eta(z)$ не имеет нулей на верхней полуплоскости.

Определение 2. *η-частным называется функция вида:*

$$f(z) = \prod_{j=1}^{m} \eta^{t_j}(a_j z), \ a_j \in \mathbf{N}, \ t_j \in \mathbf{Z}.$$

Если $t_j \in \mathbf{N}$ для всех j, то $f(z)$ называется η-произведением. Линейная комбинация η-частных называется η-полиномом.

Следующие две теоремы позволяют определить, когда η-частное является параболической формой, найти ее уровень, характер и порядок в параболической вершине.

Теорема 2 [59]. *Пусть* $f(z)$ *является* η*-частным вида* $\prod_{\delta|N}\eta(\delta z)^{l_\delta}$, $k=\frac{1}{2}\sum_{\delta|N} l_\delta \in \mathbf{Z}$.

При этом

1)
$$\sum_{\delta|N}\delta l_\delta \equiv 0 \pmod{24};$$

2)
$$\sum_{\delta|N}\frac{N}{\delta}l_\delta \equiv 0 \pmod{24}.$$

Тогда f *удовлетворяет условию*
$$f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\chi(d)(cz+d)^k f(z),$$
для всех
$$\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),\quad \textit{где}\ \ \chi(d)=\left(\frac{(-1)^k\ s}{d}\right),\ \ s=\prod_{\delta|N}\delta^{l_\delta}.$$

Формулу для характера следует понимать так: если d – четное, то, так как $(d,N)=1$, заменяем d на $d+N$. Если s – дробное, то оно заменяется на натуральное s_1, которое получается из s домножением на квадрат натурального числа. Сделав при необходимости все нужные замены, вычисляем значение характера по свойствам символа Якоби.

Теорема 3 [59]. *Пусть* $m,\ n,\ N$ *– натуральные числа,* $n|N$, $(m,n)=1$. *Если* $f(z)$ *удовлетворяет условию теоремы* 2, *то порядок нуля в параболической вершине* $\frac{m}{n}$ *равен*
$$\frac{N}{24}\sum_{\delta|N}\frac{(n,\delta)^2 l_\delta}{(n,\frac{N}{n})n\delta}.$$

Из следующей теоремы видно, что эта-функция Дедекинда является одной из основных в теории модулярных форм.

Теорема 4 [59]. *Любая модулярная форма относительно* $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ *может быть выражена как рациональная функция от* $\eta(z)$, $\eta(2z)$, $\eta(4z)$.

Доказательство. Любая модулярная форма относительно $\mathrm{SL}_2(\mathbf{Z})$ является однородным многочленом от $E_4(z)$ и $E_6(z)$.

$$E_4(z) = 1 + 240\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_3(n)q^n;$$

$$E_6(z) = 1 - 504\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_5(n)q^n.$$

А для них верны замечательные выражения:

$$E_4(z) = \frac{\eta^{16}(z)}{\eta^8(2z)} + 2^8\cdot\frac{\eta^{16}(2z)}{\eta^8(z)}\ ,$$

$$E_6(z) = \frac{\eta^{24}(z)}{\eta^{12}(2z)} - 2^5\cdot 3\cdot 5\cdot\eta^{12}(2z)\ - 2^9\cdot 3\cdot 11\cdot\frac{\eta^{12}(2z)\eta^8(4z)}{\eta^8(z)}\ + 2^{13}\cdot\frac{\eta^{24}(4z)}{\eta^{12}(2z)}.$$

□

2.4. Мультипликативные эта-произведения.

В 1985 году была доказана следующая теорема.

Теорема 5 [26]**.** (Д. Даммит, Х. Кисилевски, Дж. МакКей). *Если*

$$f(z) = \prod_{j=1}^{m}\eta^{t_j}(a_j z),\ a_j\in\mathbf{N},\ t_j\in\mathbf{N},\ \sum_{j=1}^{m}a_j t_j = 24,$$

и $a(mn) = a(n)a(m)$, *если* $(m,n) = 1$, *где* $a(n)$ – n*-й коэффициент Фурье функции* $f(z)$, *то* $f(z)$ – *одна из функций, выписанных в таблице* 1.

Эти функции называются мультипликативными эта-произведениями. Среди них две формы полуцелого веса и 28 форм целого веса. Самая известная из них функция $\Delta(z) = \eta^{24}(z) = \sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n$. Ее коэффициенты – значения функции Рамануджана.

Описание мультипликативных эта-частных нашел И. Мартин [48].

Проблема 1. *Найти другие описания мультипликативных эта-произведений.*

Оказывается, что они есть и нетривиальны.

Таблица 1

$f(z)$	k	N	$\chi(d)$
$\eta(23z)\eta(z)$	1	23	$\left(\frac{-23}{d}\right)$
$\eta(22z)\eta(2z)$	1	44	$\left(\frac{-11}{d}\right)$
$\eta(21z)\eta(3z)$	1	63	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta(20z)\eta(4z)$	1	80	$\left(\frac{-5}{d}\right)$
$\eta(18z)\eta(6z)$	1	108	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta(16z)\eta(8z)$	1	128	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^2(12z)$	1	144	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^4(6z)$	2	36	1
$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$	2	32	1
$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$	2	20	1
$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$	2	24	1
$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$	2	15	1
$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$	2	14	1
$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$	2	27	1
$\eta^2(11z)\eta^2(z)$	2	11	1
$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$	3	12	$\left(\frac{-3}{d}\right)$
$\eta^6(4z)$	3	16	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$	3	8	$\left(\frac{-2}{d}\right)$
$\eta^3(7z)\eta^3(z)$	3	7	$\left(\frac{-7}{d}\right)$
$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$	4	6	1
$\eta^4(5z)\eta^4(z)$	4	5	1
$\eta^8(3z)$	4	9	1
$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$	4	8	1
$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$	5	4	$\left(\frac{-1}{d}\right)$
$\eta^6(3z)\eta^6(z)$	6	3	1
$\eta^{12}(2z)$	6	4	1
$\eta^8(2z)\eta^8z)$	8	2	1
$\eta^{24}(z)$	12	1	1
$\eta^3(8z)$	$\frac{3}{2}$	4	$\left(\frac{-4}{d}\right)$
$\eta(24z)$	$\frac{1}{2}$	576	$\left(\frac{12}{d}\right)$

Теорема 6 [63]. *Функция является мультипликативным эта-произведением целого веса тогда и только тогда, когда она удовлетворяет следующим условиям:*

1. *она является параболической формой целого веса с характером;*

2. *все ее нули сосредоточены в параболических вершинах, и порядок каждого нуля равен* 1.

Проблема 2. *Описать модулярные формы, исходя из условий на дивизор.*

Здесь прежде всего имеется в виду указание порядков в параболических вершинах. В общем случае проблема трудная.

Проблема 3. 1) *Описать все пространства* $S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, *порожденные* η-*частными.*

2) *Описать все подпространства* $V \subset S_k(\Gamma_0(N), \chi)$, *порожденные* η-*частными.*

Основной пример: если $\dim S_k(\Gamma_0(N), \chi) = 1,\ S_k(\Gamma_0(N), \chi) = \mathbf{C}f$, то $f(z)$ является мультипликативным η-произведением (28 пространств). Следовательно, мультипликативные η-произведения являются собственными функциями относительно всех операторов Гекке.

Это еще один способ описания этого замечательного класса параболических форм с мультипликативными коэффициентами. Далее мы увидим, что они обладают еще рядом удивительных свойств.

Далее, найдем базисы пространств $S_k(\Gamma_0(2N), \chi_0)$, для указанных в таблице 2 значений весов и уровней. Здесь χ_0 – тривиальный характер. Эти пространства порождены эта-частными. Мы будем использовать общепринятый в теории эта-функций способ краткого обозначения эта-частных, когда вместо функции записывается соответствующий ей символ $\prod_{\delta|N} \delta^{l_\delta}$. Например, вместо $\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$ запишем $6^2 \cdot 3^2 \cdot 2^2 \cdot 1^2$.

Теорема 7 [2]. *Пусть* $N = 4,\ 6,\ 8,\ 9$, *а* k – *четное,* $k \geqslant k_0$. *Тогда любой элемент из* $S_k(\Gamma_0(N))$ *является однородным многочленом степени* $\frac{k}{2}$ *от функций* $G_1, \dots, G_s$, *делящимся на мультипликативное* η-*произведение* $F(z)$.

Функции $G_i(z) \in M_2(\Gamma_0(N)),\ k_0,\ F(z)$ *указаны в таблице* 3.

Проблема 4 [59] (Дон Цагир, Кай Арцдорф). *Когда сумма двух* η-*частных также является* η-*частным?*

Проблема 5. *Изучить линейные зависимости между* η-*частными: обычными и со сдвигами аргументов.*

Таблица 2

k	$2N$	Базис
2	72	6^4; 12^4; $12\cdot 6\cdot 4\cdot 2$; $36\cdot 18\cdot 12\cdot 6$; $2^{-2}\cdot 4^4\cdot 6^2$
2	64	$4^2\cdot 8^2$; $8^2\cdot 16^2$; $2^{-2}\cdot 4^5\cdot 8$
2	54	$3^2\cdot 9^2$; $6^2\cdot 18^2$; $1\cdot 2^4\cdot 3^{-3}\cdot 6\cdot 18$; $3\cdot 9\cdot 18^{-3}\cdot 27^4\cdot 54$
2	48	$12\cdot 6\cdot 4\cdot 2$; $24\cdot 12\cdot 8\cdot 4$; $3^4\cdot 4^{-2}\cdot 6^{-2}\cdot 8^4$
2	40	$10^2\cdot 2^2$; $20^2\cdot 4^2$; $2^{-1}\cdot 4^4\cdot 10$
2	30	$15\cdot 5\cdot 3\cdot 1$; $30\cdot 10\cdot 6\cdot 2$; $1^3\cdot 3^2\cdot 5^{-3}\cdot 15^2$
2	28	$14\cdot 7\cdot 2\cdot 1$; $28\cdot 14\cdot 4\cdot 2$
2	22	$1^2\cdot 11^2$; $2^2\cdot 22^2$
4	18	3^8; 6^8; $1^3\cdot 2^{-3}\cdot 3^{-2}\cdot 6^{10}\cdot 9^3\cdot 18^{-3}$; $1^{-3}\cdot 2^3\cdot 3^{10}\cdot 6^{-2}\cdot 9^{-3}\cdot 18^3$
4	16	$2^4\cdot 4^4$; $4^4\cdot 8^4$; $2^{-4}\cdot 8^{-4}\cdot 4^{16}$
4	12	$1^2\cdot 2^2\cdot 3^2\cdot 6^2$; $2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot 12^2$; $2\cdot 4\cdot 6^9\cdot 12^{-3}$
4	10	$1^4\cdot 5^4$; $2^4\cdot 10^4$; $1^{-1}\cdot 2^5\cdot 5^5\cdot 10^{-1}$
6	8	2^{12}; 4^{12}; $1^{12}\cdot 2^{-12}\cdot 4^{12}$
6	6	$1^6\cdot 3^6$; $2^6\cdot 6^6$; $1^{-3}\cdot 2^9\cdot 3^9\cdot 6^{-3}$
8	4	$1^8\cdot 2^8$; $2^8\cdot 4^8$
12	2	1^{24}; 2^{24}

Таблица 3

N	k_0	G_i	$F(z)$
4	6	$2^{-4}\cdot 4^8$; $1^{-8}\cdot 2^{20}\cdot 4^{-8}$	$2^{12}=G_1G_2^2-16G_1^2G_2$
6	4	$1^{-2}\cdot 2^4\cdot 3^{-2}\cdot 6^4; 1^4\cdot 2^{-2}\cdot 3^4\cdot 6^{-2}; 1^2\cdot 2^8\cdot 3^{-6}$	$6^2\cdot 3^2\cdot 2^2\cdot 1^2=G_1G_2$
8	4	$2^{-4}\cdot 4^8; 2^8\cdot 4^{-4}; 4^{-4}\cdot 8^8;$	$4^4\cdot 2^4=G_1G_2$
9	4	$1^3\cdot 3^{-2}\cdot 9^3; 1^{-3}\cdot 3^{10}\cdot 9^{-3}; 3^{-2}\cdot 9^6$	$3^8=G_1G_2$

Одну такую красивую форму приводит Радемахер [12]:

$$\sum_{l=0}^{4}\eta(5z)\eta^{-1}\left(\frac{z+24l}{5}\right)=5^{-2}\left(\frac{\eta(5z)}{\eta(z)}\right)^6.$$

Эта задача очень увлекает молодых математиков, и каждый год находятся новые тождества.

4. Теория фрейм-соответствия.

4.1. Принцип соответствия.

Рассматриваемую в этом параграфе теорию будем называть *теорией фрейм-форм* или *теорией фрейм-соответствия*. Русская терминология не устоялась. В рефератах РЖ "Математика" на статьи американских и японских ученых, в которых это соответствие рассматривалось, А. И. Кострикин и П. Г. Гресь использовали термин "фрейм-форма", который мы и будем применять.

Суть соответствия в следующем.

Пусть G – конечная группа, Φ – такое точное линейное представление G в пространстве V, $24 \mid \dim V$, что для любого элемента $g \in G$ характеристический многочлен $P_g(x)$ имеет вид

$$\prod_{j=1}^{m}(x^{a_j}-1)^{t_j},\ a_j,\ t_j \in \mathbf{N},\ 24|\sum_{j=1}^{m} a_j t_j.$$

Тогда каждому элементу g можно сопоставить функцию

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^{m} \eta(a_j z)^{t_j}.$$

Символ $\prod_{j=1}^{m} a_j^{t_j}$ называется фрейм-формой (Frame-shape – каркас, рамочный шаблон). Описанное выше соответствие называется соответствием с помощью фрейм-формы (Frame-shape-соответствие).

Такое соответствие можно рассмотреть для любой группы. Например, можно подобрать представление в виде суммы регулярного и нескольких тривиальных. Возникает интересная задача нахождения в рассматриваемой ситуации для данной группы минимального l, такого, что $\dim V = 24l$. Так, для группы $\mathbf{Z}_{31}$ минимальное l равно 2. В нескольких следующих пунктах мы рассмотрим множества модулярных форм, которые ассоциируются с элементами конечной группы, и возникающие здесь категории. С точки зрения теории групп эти исследования тесно связаны с непростыми задачами определения групп по классическим спектрам их представлений. С точки зрения теории модулярных форм полученные результаты отвечают часто высказываемой идее о том, что "модулярные формы живут в семействах" [4].

4.2. Категория G-MF-SET.

Определение 3. (G, Φ)*-множеством называется множество параболических форм* $\eta_g(z)$, *ассоциированных с элементами группы* G *по* *принципу фрейм-соответствия с помощью некоторого представления.*

Пример 1. $G \cong S_3$, $\Phi = 4 \cdot T_{\mathrm{reg}}$, T_{reg} – *регулярное представление.*

$G \cong \langle a, b : a^3 = e, b^2 = e, b^{-1}ab = a^2 \rangle$.

$\eta_e(z) = \eta^{24}(z)$, $\eta_a(z) = \eta_{a^2}(z) = \eta^8(3z)$, $\eta_b(z) = \eta_{ab}(z) = \eta_{a^2b}(z) = \eta^{12}(2z)$.

(S_3, T_{reg})*-множество:*

$\left\{\eta^{24}(z),\ \eta^8(3z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{12}(2z)\right\}$.

(G, Φ)-множества образуют категорию, если фиксировать G и менять Φ. Эту категорию можно обозначить G-MF-SET. Пусть A – (G, Φ)-множество, B – (G, Ψ)-множество. Морфизм определяется следующим образом: $f_1(z) = \eta_{g,\Phi}(z) \in A$ переходит в $f_2(z) = \eta_{g,\Psi}(z) \in B$ для любого элемента $g \in G$.

Пример 2. *Пусть* $G \cong S_3$, $T_1(a) = T_1(b) = 1$, $T_2(a) = 1$, $T_2(b) = -1$, T_3 – *двумерное неприводимое представление;* $\Phi = 4 \cdot T_{\mathrm{reg}}$, $\Psi = 10T_1 \oplus 2T_2 \oplus 6\ T_3$.

$$A = \{\eta^{24}(z),\ \eta^8(3z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{12}(2z),\ \eta^{12}(2z)\}$$

– (G, Φ)*-множество,*

$$B = \{\eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^6(3z)\eta^6(z),$$
$$\eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^8(2z)\eta^8(z), \eta^8(2z)\eta^8(z)\}$$

– (G, Ψ)*-множество. Действие морфизма:*

$$\eta_{g,\Phi}(z) = \eta^8(3z) \to \eta_{g,\Psi}(z) = \eta^6(3z)\eta^6(z),\ g = a,\ a^2,$$
$$\eta_{g,\Phi}(z) = \eta^{12}(2z) \to \eta_{g,\Psi}(z) = \eta^8(2z)\eta^8(z),\ g = b,\ ab,\ a^2b,$$
$$\eta_{e,\Phi}(z) = \eta^{24}(z) \to \eta_{e,\Psi}(z) = \eta^{24}(z).$$

Тождественный морфизм: $\eta_{g,\Phi}(z) \to \eta_{g,\Phi}(z)$.

4.3. Категория GR-MF-SET.

Эта категория определится, если не фиксировать конечную группу G и рассматривать морфизм (G, Φ)-множества A в (H, Ψ)-множество B следующим образом: пусть ϕ – гомоморфизм группы G в группу H, тогда $\eta_{g,\Phi}(z) \ \to\ \eta_{\phi(g),\Psi}(z)$.

При определении композиции морфизмов учитывается область определения (так же, как и при определении композиции гоморфизмов групп).

4.4. Редуцированные (G,Φ)-множества.

Часто удобно рассматривать множества, получающиеся из (G,Φ)-множеств удалением повторяющихся параболических форм. Мы будем называть такие множества редуцированными. Например, редуцированное (S_3,T_{reg})-множество: $\left\{\eta^{24}(z),\ \eta^{8}(3z),\ \eta^{12}(2z)\right\}$.

Проблема 6. *Определить группу по заданным редуцированным (G,Φ)-множествам.*

Технически это задача из теории групп, она по сути является задачей нахождения группы по данным характеристическим многочленам ее представлений.

Можно ввести понятия пересечения и объединения редуцированных (G,Φ)-множеств.

Определение 4. *Пусть S_1 – редуцированное (G_1,Φ_1)-множество, S_2 – редуцированное (G_2,Φ_2)-множество. Пересечением множеств S_1 и S_2 называется максимальное множество S, обладающее следующими свойствами:*

1) *любое редуцированное (H_j,Ψ_j)-множество V_j, которое содержится одновременно в S_1 и в S_2, содержит S;*

2) *S само является редуцированным (H,Ψ)-множеством для некоторой группы H и точного представления Ψ.*

Если описанное множество не существует, то пересечение считается пустым. Пустым будет пересечение рассматриваемых множеств, соответствующих представлениям разной размерности.

Определение 5. *Пусть $S_1=\{f_1,...,f_s\}$ – редуцированное (G_1,Φ_1)-множество, $S_2=\{g_1,\dots,g_t\}$ – редуцированное (G_2,Φ_2)-множество. Объединением (произведением) множеств S_1 и S_2 называется максимальное множество U, получающееся из набора форм $\{f_ig_j\}$, $i=\overline{1,s}$, $j=\overline{1,t}$, удалением повторяющихся функций.*

Это множество U является редуцированным $(G_1\times G_2,T)$-множеством, представление T определяется формулой:

$$T(g)=\Phi_1(g_1)\oplus\Phi_2(g_2),\ g=g_1g_2,\ g_1\in G_1,\ g_2\in G_2.$$

Пример 3. *Пусть* $S_1 = \{\eta^{24}(z),\ \eta^8(3z),\ \eta^{12}(2z)\}$ *– редуцированное* (S_3, Φ_1)*-множество,* $\Phi_1 = 4T_{\mathrm{reg}}$; $S_2 = \{\eta^{24}(z),\ \eta^6(4z),\ \eta^{12}(2z)\}$ *– редуцированное* (D_4, Φ_2)*-множество,* $\Phi_2 = 3T_{\mathrm{reg}}$. *В этом случае пересечение* $S = \{\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\}$, *а объединение равно*

$$U = \{\eta^{48}(z),\ \eta^6(4z)\eta^{24}(z),\ \eta^{12}(2z)\eta^{24}(z),$$
$$\eta^8(3z)\eta^{24}(z),\ \eta^6(4z)\eta^{12}(2z),\ \eta^6(4z)\eta^8(3z),\ \eta^8(3z)\eta^{12}(2z),\ \eta^{24}(2z)\}.$$

Проблема 7. *Изучить свойства введенных понятий.*

Проблема 8. *Изучить феномен однозначного определения группы наборами редуцированных* (G, Φ)*-множеств, а именно: найти множества* $S_1, \ldots, S_t$, *которые могут пониматься как* $(G, \Phi_1)_{\mathrm{red}}$*-,...,* $(G, \Phi_t)_{\mathrm{red}}$*-множества только для единственной группы* G *(одновременно).*

Для указания на это мы используем символ $\bigwedge$ (аналог генетического кода).

Для некоторых групп малых порядков эта задача решена. Ответ для групп порядка 24 можно найти в статье [4]. Здесь приведем теорему для D_p.

Теорема 8 [4]**.** *Пусть* p *– нечетное простое,* $p \neq 3, 7$. *Тогда* D_p *определяется множеством* $\{\eta^{24p}(z),\ \eta^{24}(pz),\ \eta^{12p}(2z)\}$.

Группы D_3 *и* D_7 *определяются следующими множествами:*

$$D_3 \cong S_3 : \{\eta^{24}(z), \eta^8(3z), \eta^{12}(2z)\} \bigwedge \{\eta^{24}(z), \eta^6(3z)\eta^6(z), \eta^{11}(2z)\eta^2(z)\};$$

$$D_7 : \{\eta^{168}(z),\ \eta^{24}(7z),\ \eta^{84}(2z)\} \bigwedge \{\eta^{24}(z),\ \eta^3(7z)\eta^3(z),\ \eta^{10}(2z)\eta^4(z)\}.$$

Определение 6. *Эта-произведения* $f_1, \ldots, f_t$ *называются* G*-связанными, если* $\{f_1, \ldots, f_t\}$ *является* $(G, \Phi)_{\mathrm{red}}$*-множеством. Эта-произведения* $f_1, \ldots, f_t$ *называются* G*-зависимыми, если* $\{f_1, \ldots, f_t\} \subset S$, S *–* $(G, \Phi)_{\mathrm{red}}$*-множество.*

Проблема 9. *Привести пример* G*-независимых* η*-произведений.*

Такой пример пока неизвестен.

5. $M\eta P$-группы.

Основной факт [64]**.** *Если* g *– такой элемент в* G, *что* $\eta_g(z)$, *ассоциированная с* g *с помощью некоторого представления, является мультипликативным* η*-произведением, то* $\eta_h(z)$ *для* $h = g^k$ *также являются мультипликативными* η*-произведениями.*

Пример 4. $G \cong Z_{15} \cong \langle g \rangle$. *Если*

$$g \leftrightarrow \ \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z),$$

то

$$\begin{aligned} g^2,\ g^4, g^7,\ g^8, g^{11},\ g^{13}, g^{14} &\leftrightarrow \eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z), \\ g^3, g^6, g^9, g^{12} &\leftrightarrow \eta^4(5z)\eta^4(z), \\ g^5, g^{10} &\leftrightarrow \ \eta^6(3z)\eta^6(z), \\ e &\leftrightarrow \ \eta^{24}(z). \end{aligned}$$

Определение 7. *$M\eta P$-группа – это такая конечная группа, что все модулярные формы, ассоциированные с элементами группы с помощью некоторого точного представления, являются мультипликативными η-произведениями.*

Название – это фактически сокращение фразы “группа, ассоциированная с мультипликативными η-произведениями”. Такого типа подгруппы содержатся в любой группе. Единичная группа является $M\eta P$-группой. Исследование таких групп было стимулировано открытием Дж. Мейсоном того интересного факта, что группа Матье M_{24} является $M\eta P$-группой. Однако, легко видеть, что не все такие группы являются подгруппами в M_{24}. Кроме того, для одной и той же группы часто возможны различные варианты фрейм-соответствия.

Проблема 10. *Классифицировать все $M\eta P$-группы.*

Проблема 11. *Описать $M\eta P$-подгруппы в различных группах и соответствующие представления.*

Теорема 9 [3]. *Конечная простая группа G является простой $M\eta P$-группой тогда и только тогда, когда G – простая подгруппа в M_{24}.*

Результаты по проблеме 10 [3, 6, 51, 52, 64, 66]:

1) Описаны $M\eta P$-группы вида $\langle a, b : a^m = e,\ b^s = e, b^{-1}ab = a^r \rangle$, где пересечение подгрупп $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ – тривиально.

2) Описаны абелевы $M\eta P$-группы.

3) Если G – $M\eta P$-группа порядка p^k, p – нечетное простое, то G – одна из следующих групп:

$\mathbf{Z}_3,\ \mathbf{Z}_3 \times \mathbf{Z}_3,\ \mathbf{Z}_9,$

$\langle a, b, c : a^3 = e, b^3 = e, c^3 = e, ab = bac, ac = ca, bc = cb \rangle,$

$\mathbf{Z}_5, \mathbf{Z}_7,\ \mathbf{Z}_{11},\ \mathbf{Z}_{23}.$

4) $M\eta P$-группы нечетного порядка являются подгруппами в следующих группах:

$G_1 \cong \langle a, b, c : a^3 = b^3 = c^3 = e,\ ab = bac,\ ac = ca,\ bc = cb \rangle$,

$G_2 \cong \langle a, b : a^{21} = b^3 = e,\ b^{-1}ab = a^4 \rangle$,

$G_3 \cong \langle a, b : a^{23} = b^{11} = e,\ b^{-1}ab = a^{10} \rangle$,

$G_4 \cong \langle a, b : a^{11} = b^5 = e,\ b^{-1}ab = a^5 \rangle$,

$G_5 \cong \mathbf{Z}_9$,

$G_6 \cong \mathbf{Z}_{15}$.

5) Все группы порядка 16 и 24 являются $M\eta P$-группами.

6) Описаны $M\eta P$-группы в $\mathrm{SL}(5, \mathbf{C})$.

6. $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ и η-произведения.

Теорема 10 [6]. *Пусть* Ad – *присоединенное представление группы* $\mathrm{SL}(5, \mathbf{C})$, *и* $g \in \mathrm{SL}(5, \mathbf{C})$, $\mathrm{ord}(g) \neq 3, 6, 9, 21$, *таков, что характеристический многочлен оператора* $\mathrm{Ad}(g)$ *имеет вид* $P_g(x) = \prod_{j=1}^{m} (x^{a_j} - 1)^{t_j}$, $a_j \in \mathbf{N}$, $t_j \in \mathbf{N}$. *(Здесь и далее* $\mathrm{ord}(g)$ *обозначает порядок элемента* g.*) Тогда соответствующая параболическая форма*

$$\eta_g(z) = \prod_{j=1}^{m} \eta^{t_j}(a_j z)$$

является мультипликативным η*-произведением веса* $k(g) > 1$, *и все мультипликативные* η*-произведения веса* $k(g) > 1$ *можно получить этим путем.*

Если $\mathrm{ord}(g) = 3, 6, 9, 21$ *то этим путем можно получить все мультипликативные* η*-произведения веса* $k(g) > 1$. *Кроме этого, в этом соответствии возникают пять модулярных форм, которые не являются мультипликативными* η*-произведениями:*

$$\eta^4(3z)\eta^{12}(z),\ \eta^7(3z)\eta^3(z),\ \eta^2(6z)\eta^6(2z),\ \eta^2(9z)\eta(3z)\eta^3(z),\ \eta(21z)\eta^3(z).$$

Конечные подгруппы в $\mathrm{SL}(5, \mathbf{C})$, элементы которых могут быть ассоциированы с мультипликативными η-произведениями с помощью присоединенного представления, описываются следующей теоремой.

Теорема 11 [6]. *Максимальные конечные* $M\eta P$*-подгруппы в* $\mathrm{SL}(5, \mathbf{C})$, *с элементами которых мультипликативные* η*-произведения ассоциируются через фрейм-форму с помощью присоединенного представления, являются прямыми произведениями группы* $\mathbf{Z}_5$ *(которая порождается скалярной матрицей) и одной из следующих групп:* S_4,

Таблица 4

собственные значения	параболические формы
1,1,1,1,1	$\eta^{24}(z)$
$-1,-1,-1,-1,1$	$\eta^8(2z)\eta^8(z)$
$-1,-1,1,1,1$	$\eta^{12}(2z)$
$\zeta_3,\zeta_3,\zeta_3,$ 1,1	$\eta^6(3z)\eta^6(z)$
$\zeta_3^2,\zeta_3^2,\zeta_3,\zeta_3,1$	$\eta^8(3z)$
$\zeta_4^3,\zeta_4^2,\zeta_4,\zeta_4,\zeta_4$	$\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$
$\zeta_4^3,\zeta_4^3,\zeta_4,\zeta_4,1$	$\eta^4(4z)\eta^4(2z)$
$\zeta_4^3,\zeta_4^2,\zeta_4^2,\zeta_4,1$	$\eta^6(4z)$
$\zeta_5^3,\zeta_5,\zeta_5,$ 1,1	$\eta^4(5z)\eta^4(z)$
$\zeta_6^4,\zeta_6^3,\zeta_6^3,\zeta_6,\zeta_6$	$\eta^2(6z)\eta^2(3z)\eta^2(2z)\eta^2(z)$
$\zeta_6^5,\zeta_6^3,\zeta_6^2,\zeta_6^2,1$	$\eta^3(6z)\eta^3(2z)$
$\zeta_6^5,\zeta_6^4,\zeta_6^2,\zeta_6,1$	$\eta^4(6z)$
$\zeta_8^7,\zeta_8^5,\zeta_8^3,\zeta_8,1$	$\eta^2(8z)\eta^2(4z)$
$\zeta_8^5,\zeta_8^5,\zeta_8^3,\zeta_8^2,\zeta_8,$	$\eta^2(8z)\eta(4z)\eta(2z)\eta^2(z)$
$\zeta_9^8,\zeta_9^5,\zeta_9^3,\zeta_9^2,1$	$\eta^2(9z)\eta^2(3z)$
$\zeta_{10}^8,\zeta_{10}^6,\zeta_{10}^5,\zeta_{10},1$	$\eta^2(10z)\eta^2(2z)$
$\zeta_{11}^9,\zeta_{11}^5,\zeta_{11}^4,\zeta_{11}^3,\zeta_{11}$	$\eta^2(11z)\eta^2(z)$
$\zeta_{12}^9,\zeta_{12}^7,\zeta_{12}^4,\zeta_{12}^3,\zeta_{12},$	$\eta(12z)\eta(6z)\eta(4z)\eta(2z)$
$\zeta_{14}^{11},\zeta_{14}^9,\zeta_{14}^7,\zeta_{14},\zeta_{14},$	$\eta(14z)\eta(7z)\eta(2z)\eta(z)$
$\zeta_{15}^{12},\zeta_{15}^{10},\zeta_{15}^7,\zeta_{15},1$	$\eta(15z)\eta(5z)\eta(3z)\eta(z)$

$A_4\times\mathbf{Z}_2$, $Q_8\times\mathbf{Z}_3$, $D_4\times\mathbf{Z}_3$, *бинарная группа тетраэдра, метациклическая группа порядка порядка* 21, D_6, *метациклическая группа порядка* 12*:* $\langle S,\ T\ :\ S^3=T^2=(ST)^2\rangle$, *все группы порядка* 16, $\mathbf{Z}_3\times\mathbf{Z}_3$, $\mathbf{Z}_{15}$, $\mathbf{Z}_{14}$, $\mathbf{Z}_{11}$, $\mathbf{Z}_{10}$, $\mathbf{Z}_9$.

Собственные значения элементов, соответствующих модулярным формам, находятся однозначно с точностью до перестановки и замены первообразных корней. Мы их выпишем в таблице 4.

Проблема 12. *Описать такие элементы* $g\in\mathrm{SL}(n,\mathbf{C})$, *что*

$$P_g(x)=\prod_{j=1}^{m}(x^{a_j}-1)^{t_j},\ a_j\in\mathbf{N},\ t_j\in\mathbf{N},\ \Phi=\mathrm{Ad},$$

и ассоциированные функции $\eta_{g,\Phi}(z)$.

Здесь при возрастании размерностей, видимо, без компьютерных вычислений не обойтись.

6. Характеры Рамануджана и характеры Вейля.

В этом пункте мы рассмотрим связь между характерами Рамануджана, которые мы можем определить для модулярных форм и которые для форм, собственных относительно всех операторов Гекке, фигурируют в формулах для эйлеровых произведений, и характерами Вейля.

Для эта-произведений характеры Рамануджана определяются формулой

$$\psi_p(g) = \begin{cases} p^{k(g)-1}\chi_g(p), & (\mathrm{ord}(g), p) = 1, \\ 0, & (\mathrm{ord}(g), p) = p. \end{cases}$$

Здесь $\mathrm{ord}(g)$ – порядок элемента g; $k(g)$, $\chi_g(p)$ – вес и характер $\eta_g(z)$ [51].

Рассмотрим простую группу Ли G_0 и ее алгебру Ли $\mathrm{Lie}(G_0)$ четного ранга. Пусть G – такая конечная подгруппа этой группы Ли, что каждый ее элемент g имеет в присоединенном представлении характеристический многочлен вида $\prod_{j=1}^m (x^{a_j}-1)^{t_j}$, с которым ассоциируется функция $\prod_{j=1}^m \eta(a_j z)^{t_j}$. Обозначим через $\mathrm{ch}_{(p-1)\rho}$ характер Вейля неприводимого представления группы Ли G_0 со старшим весом $(p-1)\rho$, где ρ – полусумма положительных корней алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_0)$.

Теорема 12 [63]. *Для любого элемента $g \in G$ и любого нечетного простого числа p, взаимно простого с порядком элемента g, имеет место равенство*

$$\psi_p(g) = \left(\frac{-1}{p}\right)^{\frac{\dim G_0}{2}} p^{\frac{r}{2}-1}\,\mathrm{ch}_{(p-1)\rho},$$

где r – ранг алгебры Ли $\mathrm{Lie}(G_0)$.

Проблема 13. *Изучить связи между характерами Рамануджана и характерами Стейнберга.*

Определение характера Стейнберга можно найти в [45].

7. L-ряды с грессенхарактерами и аналогичные формулы.

Пусть $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-D})$ – мнимое квадратичное поле с дискриминантом $-D$, и пусть O_K – его кольцо целых. Пусть M – нетривиальный идеал в O_K, и $I(M)$ – группа дробных идеалов, взаимно простых с M.

Грессенхарактер Гекке ϕ веса $k \geqslant 2$ с модулем M – это такой гомоморфизм

$$\phi : I(M) \to \mathbf{C}^*,$$

что для каждого $\alpha \in K^*$, $\alpha \equiv 1 \pmod{M}$, имеем $\phi(\alpha O_K) = \alpha^{k-1}$.

Пусть $\omega_\phi(n) = \frac{\phi((n))}{n^{k-1}}$ для каждого целого n, взаимно простого с M,

$$\Psi(z) = \sum_A \phi(A) q^{N(A)},$$

где сумма берется по всем идеалам A, взаимно простым с M.

Теорема 13 (Гекке) [59].

$$\Psi(z) \in S_k\left(\Gamma_0(DN(M)), \left(\frac{-D}{\cdot}\right)\omega_\phi\right).$$

Даммит, Кисилевски и МакКей нашли для 16 из 28 мультипликативных η-произведений целого веса L-функции с грессенхарактерами мнимых квадратичных полей, которые совпадают с преобразованиями Меллина этих форм. Они доказали, что для оставшихся 12 мультипликативных η-произведений целого веса такое соответствие невозможно.

Пример 5.

$$\Psi(z) = \eta^6(4z),\ K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}),\ M = (2), \Psi(z) \in S_3\left(\Gamma_0(16), \left(\frac{-4}{\cdot}\right)\right).$$

В статье [5] находятся аналогичные формулы, в которых вместо кольца целых мнимых квадратичных полей рассматриваются порядки в алгебрах кватернионов и алгебре Кэли.

Теорема 14 [5]. *Пусть* $\mathbf{H}$ *– алгебра кватернионов над* $\mathbf{Q}$ *и* Γ_4 *– решетка кватернионов Гурвица:*

$$\alpha = \frac{a + bi + cj + dk}{2},$$

$$a \equiv b \equiv c \equiv d \pmod{2}, \quad a, b, c, d \in \mathbf{Z}.$$

Тогда

$$\frac{1}{12}\sum_{\alpha\in\Gamma_4\subset\mathbf{H}}\alpha^6 e^{2\pi izN(\alpha)}=\eta^8(z)\eta^8(2z).$$

Далее,

$$\frac{1}{8}\sum_{\substack{\alpha\in\mathbf{H}\\ a+b+c+d\equiv 1\pmod 2}}\alpha^4 e^{2\pi izN(\alpha)}=\eta^{12}(2z),$$

где суммирование ведется по всем таким кватернионам $a+bi+cj+dk$, *что* $a+b+c+d\equiv 1 \pmod 2)$, $a,b,c,d\in\mathbf{Z}$.

Теорема 15 [5]**.** *Пусть* **Ca** *– алгебра Кэли. Можно построить в* **Ca** *порядок, на котором билинейная форма* $\langle\alpha,\beta\rangle=\alpha\bar\beta+\beta\bar\alpha$ *определяет структуру четной унимодулярной решетки типа* E_8*, причем система корней* E_8 *замкнута относительно умножения в алгебре Кэли.*

Тогда сумма

$$\frac{1}{12}\sum_{\alpha\in E_8\subset\mathbf{Ca}}\alpha^8 e^{2\pi izN\alpha}$$

по всем элементам этого порядка равна $\eta^{24}(z)$.

Проблема 14. *Найти аналогичные формулы для всех мультипликативных* η*-произведений.*

8. Сравнения для коффициентов Фурье.

Это завораживающе красиво, и исследования здесь настолько обширны, что даже обзор стал бы объемной книгой. Мы укажем ссылки на книги [12, 59].

Новые результаты появляются каждый год. Большую работу ведут американский ученый К. Оно и его ученики. Здесь мы укажем лишь две открытые проблемы, приведенные в книге [59].

Проблема 15. *Пусть* $r\geqslant 5$, *числа* $a_r(n)$ *определяются формулой* $\sum\limits_{n=r}^{\infty}a_r(n)q^n=\eta^r(24z)$. *Показать, что* $\mathrm{card}\{n\leqslant X : a_r(n)\neq 0\}\gg X$.

Проблема 16. *Рассмотрим*

$$\eta^{24}(z)=\Delta(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\tau(n)q^n.$$

1) *Доказать или опровергнуть гипотезу Лемера о том, что все коэффициенты* $\Delta(z)$ *ненулевые.*

2) *Доказать, что существует бесконечно много таких простых* p, *что* $p|\tau(p)$.

По проблеме Лемера можно посмотреть статью [46].

9. Суммы Шимуры.

Определение этих сумм было впервые дано К.Оно в статье 1994 года [58]. Они возникают в исследованиях Г.Шимуры перехода от модулярных форм полуцелого веса к формам целого веса. Но Шимура не давал их явного определения. К.Оно рассматривает эти суммы для функции $\eta^4(4z)\eta^2(2z)\eta^4(z)$, которая является мультипликативным η-произведением.

Пусть $a(n)$ – арифметическая функция, доопределим эту функцию до функции, определенной на множестве неотрицательных рациональных чисел, положив значение этой функции равным нулю, если ее аргумент не является натуральным числом.

Определение 8. *Пусть* $a(n)$ *– функция, описанная выше,* c *– положительное целое число. Тогда для* $m \geqslant 1$ *сумма Шимуры* $\mathrm{Sh}(m,a,c)$ *определяется формулой:*

$$\mathrm{Sh}(m,a,c) = \sum_{j=1}^{m-1} a\left(\frac{m^2-j^2}{c}\right).$$

$\mathrm{Sh}(1,a,c) = 0$ *по определению.*

Проблема 17. *Изучить различные свойства сумм Шимуры.*

В [65] вычислены суммы Шимуры для классических арифметических функций и найдена их связь с арифметикой квадратичных полей. Приведем одну из теорем.

Теорема 16 [65]. *Пусть*

$$f(z) = \eta^2(12z) = \sum_{n=1}^{\infty} a(n)q^n.$$

Тогда

1) *Если* p *инертно в* $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, *то* $p = -2\,\mathrm{Sh}(p^2,a,1) - 1$.

2) *Если* p *расщепляется в* $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, *то* $p = l^2 + 3m^2$, *и* $(\frac{l}{3})\ l = \mathrm{Sh}(p,a,1) + 2$,

$p = (2\,\mathrm{Sh}(p,a,1) + a^2(p))^2 - 2\,\mathrm{Sh}(p^2,a,1) - a^2(p^2) - 2\,\mathrm{Sh}(p,a,1)$.

В этом обзоре мы рассказали лишь о некоторых проблемах, существенную роль в которых играет эта-функция Дедекинда. Заинтересовавшийся читатель сможет продолжить изучение этой увлекательной области, используя следующую библиографию.

Литература

1. К. Айерлэнд, М. Роузен, *Классическое введение в современную теорию чисел.* Мир, М. 1987.
2. Г. В. Воскресенская, *Пространства модулярных форм, содержащих мультипликативные эта-произведения.* — Вестн. СамГУ **97** (2012), 5–11.
3. Г. В. Воскресенская, *Конечные простые группы и мультипликативные η-произведения.* Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 71–91.
4. Г. В. Воскресенская, *Конечные группы и ассоциированные с ними семейства модулярных форм.* — Матем. заметки **87**, No. 4 (2010), 528–541.
5. Г. В. Воскресенская, *Гиперкомплексные числа, системы корней и модулярные формы.* — Сб. "Арифметика и геометрия многообразий", Самара, (1992), 48–59.
6. Г. В. Воскресенская, *Параболические формы и конечные подгруппы в* $SL(5, \mathbf{C})$. — Функц. анализ и его прил. **29**, No. 2, (1995), 71–73.
7. И. М. Гельфанд, М. И. Граев, И. И. Пятецкий-Шапиро, *Теория представлений и автоморфные функции.* Наука, М. 1966.
8. Э. Кнэпп, *Эллиптические кривые.* Факториал Пресс, М. 2004.
9. Н. Коблиц, *Введение в эллиптические кривые и модулярные формы.* Мир, М. 1988.
10. С. Ленг, *Введение в теорию модулярных форм.* Мир, М. 1977.
11. С. Ленг, *Эллиптические функции.* Наука, М. 1984.
12. О. М. Фоменко, *Приложения теории модулярных форм к теории чисел.* М., ВИНИТИ, серия "Алгебра. Топология. Геометрия" **15** (1977), 5–91.
13. Г. Шимура, *Введение в арифметическую теорию автоморфных функций.* Мир, М. 1972.
14. A. G. van Asch, *Modular forms and root systems.* — Math. Ann. **222** (1976), 145–170.
15. A. J. F. Biagioli, *The construction of modular forms as products of transforms of the Dedekind eta-function.* — Acta Arithm. **LIV.4** (1990), 273–300.
16. K. Bringmann, K. Ono, *Identities for traces of singular moduli.* — Acta Arithm. **119.4** (2005), 317–327.
17. J. H. Bruiner, K. Ono, *The arithmetic of Borcherds exponents.* — Math. Ann. **327** (2003), 293–303.
18. J. P. Buhler, *Icosahedral Galois representations.* — Lect. Notes Math. **654** (1978).
19. B. Cipra, *On the Shimura lift, apres Selberg.* — J. Number Th. **32** (1989), 58–64.

20. H. Cohen, J. Oesterle, *Dimensions des espaces de formes modulaires.* — Lect. Notes Math. **627** (1976), 69–78.
21. J. Conway, S. Norton, *Monstrous Moonshine.* — Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 308–339.
22. J. Conway et al. *Atlas of finite groups.* Clarendon Press. Oxford 1985.
23. B. Gross, D. Zagier, *On singular moduli.* — J. reine angew. Math. **355** (1985), 191–220.
24. J. E. Cremona, *Algorithms for modular elliptic curves.* Cambridge University Press 1997.
25. P. Deligne, J.-P. Serre, *Formes modulaires de poids 1.* — Ann. Sci. École Normale Sup. **7** (1974), 507–530.
26. D. Dummit, H. Kisilevsky, J. McKay, *Multiplicative products of η-functions.* — Contemp. Math. **45** (1985), 89–98.
27. S. Fukuhara, *Dedekind symbols with polynomial reciprocity laws.* — Math. Ann. **329** (2004), 315–324.
28. B. Gordon, D. Sinor, *Multiplicative properties of η-products.* — Lect. Notes Math. **1395** (1987), 173–200.
29. B. Gordon, S. Robins, *Lacunarity of Dedekind η-products.* — Glasgow Math. J. **37**, No. 1 (1995), 1–14.
30. B. Gordon, K. Hughes, *Multiplicative properties of η-products*, II. — Contemp. Math. **143** (1993), 415–430.
31. T. Hiramatsu, *Higher reciprocity law and modular forms of weight one.* — Comm. Math. Univ. St. Paul. **31** (1982), 75–85.
32. T. Hiramatsu, Y. Mimura, *The modular equation and modular forms of weight one.* — Nagoya Math. J. **100** (1985), 145–162.
33. T. Hiramatsu, *Theory of automorphic forms of weight 1.* — Adv. Stud. Pure Math. **13** (1988), 503–584.
34. T. Hiramatsu, M. Sato, I. Takada, *On S_3-type modular forms of weight 1.* — Math. Japonica **32**, No. 6 (1987), 915–925.
35. N. Ishii, *Cusp forms of weight one, quartic reciprocity and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 117–137.
36. M. Knopp, G. Mason, *Generalized modular forms.* — J. Number Th. **99** (2003), 1–18.
37. M. Koike, *On McKay's conjecture.* — Nagoya Math. J. **95** (1984), 85–89.
38. M. Koike, *Higher reciprocity law, modular forms of weight 1 and elliptic curves.* — Nagoya Math. J. **98** (1985), 109–115.
39. M. Koike, *Mathieu group M_{24} and modular forms.* — Nagoya Math. J. **99** (1985), 147–157.
40. M. Koike, *Modular forms and the automorphism group of Leech lattice.* — Nagoya Math. J. **112** (1988), 63–79.
41. T. Kondo, *Examples of multiplicative η-functions.* — J. Fac. Sci. Univ. Tokyo. Sect. 1A Math. **153** (1987), 133–149.
42. T. Kondo, *The automorphism group of the Leech lattice and elliptic modular functions.* — J. Math. Soc. Japan **37** (1985), 337–362.
43. T. Kondo, T. Tasaka, *The theta functions of sublattice of the Leech lattice.* — Nagoya Math. J. **101** (1986), 151–179.

44. G. Ligozat, *Courbes modulaires de gendre 1.* — Bull. Soc. Math. France **43** (1972), 1–80.
45. G. Lusztig, *Characters of reductive groups over a finite field.* — Ann. Math. Stud. Princeton Univ.Press, **107** (1984).
46. N. Lygeros, O. Rozier, *A new solution to the equation* $\tau(p) \equiv 0 \pmod p$. — J. Integer Seq. **13**, No. 7 Article ID 10.7.4 (2010).
47. I. G. Macdonald, *Affine root systems and Dedekind's* η*-function.* — Invent. Math. **15** (1972), 91–143.
48. Y. Martin, *Multiplicative eta-quotients.* — Trans. Amer. Math. Soc. **348** (1996), 4825–4856.
49. Y. Martin, *On Hecke operators and products of the Dedekind* η*-function.* — C. R. Acad. Sci. Paris **322** (1996), 307–312.
50. G. Mason, *Frame shapes and rational characters of finite groups.* — J. Algebra **89** (1984), 236–246.
51. G. Mason, M_{24} *and certain automorphic forms.* — Contemp. Math. **45** (1985), 223–244.
52. G. Mason, *Finite groups and modular functions.* — Proceedings of Symposia in Pure Math. **47** (1987), 181–207.
53. G. Mason, *Finite groups and Hecke operators.* — Math. Ann. **283** (1989), 381–409.
54. G. Mason, *On a system of elliptic modular forms attached to the large Mathieu group.* — Nagoya Math. J. **118** (1990), 177–193.
55. M. Newman, *Construction and application of a certain class of modular forms.* — Proc. London Math. Soc. **7** (1956), 334–350.
56. M. Newman, *Construction and application of a certain class of modular forms,* II. — Proc. London Math. Soc. **9** (1959), 373–387.
57. W. Raji, *Generalized modular forms representable as eta products.* — Acta Arithm. **129** (2007), 41–51.
58. K. Ono, *Shimura sums related to imaginary quadratic fields.* — Proc. Japan Acad. **70(A)** (1994), 146–151.
59. K. Ono, *The web of modularity: Arithmetic of the coefficients of modular forms and* q*-series.* AMS, Providence 2004.
60. J.-P. Serre, H. Stark, *Modular forms of weight* $\frac{1}{2}$. — Lect. Notes Math. **627** (1977), 27–67.
61. G. Shimura, *On modular forms of half-integral weight.* — Ann. Math. **97** (1973), 440–481.
62. J. Thompson, *Finite groups and modular functions.* — Bull. London Math. Soc. **11** (1979), 347–351.
63. G. V. Voskresenskaya, *One special class of modular forms and group representations.* — J. Théor. Nombres Bordx. **11** (1999), 247–262.
64. G. V. Voskresenskaya, *Multiplicative Dedekind* η*-functions and representations of finite groups.* — J. Théor. Nombres Bordx. **17** (2005), 359–380.

65. G. V. Voskresenskaya, *Modular forms, Shimura sums and arithmetic of quadratic fields.* — MPI-preprint **95** (2006).
66. G. V. Voskresenskaya, *Finite groups associated to multiplicative η-products.* — MPI-preprint **96** (2006).

Voskresenskaya G. V. Dedekind's eta-function in algebra and number theory: old and new problems.

In this paper we survey open problems concerning the Dedekind eta-function. These problems appear in various areas of algebra and number theory.

Самарский госуниверситет,
кафедра алгебры и геометрии,
Самара, Россия
E-mail: galvosk@mail.ru

Поступило 2 июля 2012 г.