Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

К. Б. Цветков

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ФАКТОРИЗАЦИИ МАТРИЧНОГО КОЛЬЦА

Введение

В доказательстве инъективной стабилизации для функтора K_1 и сюръективной стабилизации для функтора K_2 используется *разложение Денниса–Васерштейна*, которое утверждает, что при $n \geqslant \mathrm{sr}(R)+2$ имеет место равенство

$$E(n,R) = \mathrm{EP}_1 \cdot X_{n1} \cdot \mathrm{EP}_{n-1},$$

где EP_1 и EP_{n-1} – *элементарные* параболические подгруппы, а X_{n1} – корневая подгруппа. Для группы $E(n,R)$ это разложение впервые заметил К. Деннис [1] в связи с сюръективной стабилизацией K_2. Л. Васерштейн [2] использовал разложения такого типа для других классических групп в связи с инъективной стабилизацией K_1. Собственно говоря, в работах Денниса и Васерштейна это разложение записывалось в чуть более слабой форме, окончательный вид оно приобрело в работе А. Суслина и М. Туленбаева [3], посвященной инъективной стабилизации для функтора K_2.

В дальнейшем в работах Н. Вавилова и С. Синчука [4, 5] были получены следующие два результата. Первый утверждает, что при $r-s \geqslant \mathrm{sr}(R)$ имеет место разложение

$$E(n,R) = \mathrm{EP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{EP}_s,$$

где EP_r и EP_s – элементарные параболические подгруппы группы $E(n,R)$, а U^-_{rs} – пересечение унипотентных радикалов противоположных параболических подгрупп. А второй – аналог первого для группы $\mathrm{GL}(n,R)$, который утверждает, что при тех же предположениях на кольцо R имеет место следующее разложение

$$\mathrm{GL}(n,R) = P_r \cdot U^-_{rs} \cdot P_s,$$

где P_r и P_s – параболические подгруппы группы $\mathrm{GL}(n,R)$.

Ключевые слова: матричное кольцо, эрмитово кольцо, стабильный ранг, разложение Денниса–Васерштейна.

Сразу же возникает естественный вопрос о перенесении разложений такого типа на необязательно обратимые матрицы. В настоящей работе доказаны разложения такого типа для кольца матриц $M(n,R)$.

Теорема 1. *Пусть R – левое k-эрмитово кольцо, MP_s – параболическое подкольцо кольца $M(n,R)$, P_r – параболическая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,R)$, EP_r – элементарная параболическая подгруппа группы $E(n,R)$ и U^-_{rs} – пересечение унипотентных радикалов противоположных параболических подгрупп, где $1 \leqslant r \leqslant n-1$, $1 \leqslant s \leqslant n-k+1$ и $n \geqslant k$. Предположим, что $\mathrm{sr}(R) \leqslant |r-s|$. Тогда имеет место разложение*

$$M(n,R) = \mathrm{EP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{MP}_s$$

для $\mathrm{sr}(R) < k$ и

$$M(n,R) = P_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{MP}_s$$

для $\mathrm{sr}(R) = k$.

Теорема 2. *Пусть R – правое k-эрмитово кольцо, MP_r – параболическое подкольцо кольца $M(n,R)$, P_s – параболическая подгруппа группы $\mathrm{GL}(n,R)$, EP_r – элементарная параболическая подгруппа группы $E(n,R)$ и U^-_{rs} – пересечение унипотентных радикалов противоположных параболических подгрупп, где $k-1 \leqslant r \leqslant n-1$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$ и $n \geqslant k$. Предположим, что $\mathrm{sr}(R) \leqslant |r-s|$. Тогда имеет место разложение*

$$M(n,R) = \mathrm{MP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{EP}_s$$

для $\mathrm{sr}(R) < k$ и

$$M(n,R) = \mathrm{MP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot P_s$$

для $\mathrm{sr}(R) = k$.

В предположении $\mathrm{sr}(R) = 1$ теоремы могу быть доказаны даже в случае $r = s$, это сразу же следует из разложения Гаусса.

§1. Основные обозначения

Через R обозначается произвольное ассоциативное кольцо с единицей $1 \neq 0$, а через R^* – его группа обратимых элементов. Как обычно, $M(m,n,R)$ – множество матриц размера $m \times n$, $M(n,R) = M(n,n,R)$ – кольцо квадратных матриц размера n. Далее, $\mathrm{GL}(n,R) = M(n,R)^*$ – полная линейная группа степени n.

Через a_{ij} обозначается коэффициент матрицы a в позиции (i,j), таким образом, $a=(a_{ij})$. Через $a^{-1}=(a'_{ij})$ обозначается обратная к a матрица, а через a^t – транспонированная. Как обычно, e – единичная матрица, а e_{ij} – стандартная матричная единица, т.е. матрица, у которой в позиции (i,j) стоит 1 и нули во всех остальных позициях.

Как обычно, $t_{ij}(\xi)=e+\xi e_{ij}$, $1\leqslant i\neq j\leqslant n$, $\xi\in R$, обозначает элементарную трансвекцию, а через $X_{ij}=\{t_{ij}(\xi)\mid \xi\in R\}$ обозначается корневая подгруппа. Обозначим через $E(n,R)$ подгруппу в $\mathrm{GL}(n,R)$, порожденную всеми элементарными трансвекциями:

$$E(n,R)=\langle t_{ij}(\xi),\ \xi\in R,\ 1\leqslant i\neq j\leqslant n\rangle\,.$$

Строка $(a_1,\dots,a_n)$ называется унимодулярной, если ее компоненты порождают R как *правый* идеал,

$$a_1R+\dots+a_nR=R$$

или, что то же самое, если найдутся $b_1,\dots,b_n\in R$, такие что

$$a_1b_1+\dots+a_nb_n=1.$$

Стабильным рангом $\mathrm{sr}(R)$ кольца R называется наименьшее n такое, что любая унимодулярная строка $(a_1,\dots,a_{n+1})$ длины $n+1$ стабильна, иными словами, найдутся элементы $b_1,\dots,b_n\in R$, такие что строка

$$(a_1+a_{n+1}b_1,a_2+a_{n+1}b_2,\dots,a_n+a_{n+1}b_n)$$

длины n унимодулярна. Если такого n не существует, то пишут $\mathrm{sr}(R)=\infty$.

Следуя [6, 7], будем говорить, что кольцо R называется правым k-эрмитовым, если для любой строки $(a_1,a_2,\dots,a_k)$ существует матрица $p\in\mathrm{GL}(k,R)$ такая, что

$$(a_1,a_2,\dots,a_k)\ p=(d,0,\dots,0),$$

левым k-эрмитовым, если для любого столбца $(a_1,a_2,\dots,a_k)^t$ существует матрица $q\in\mathrm{GL}(k,R)$ такая, что

$$q\begin{pmatrix}a_1\\a_2\\\vdots\\a_k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}d\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}.$$

Напомним, что кольцо R называется левым (правым) кольцом Безу, если любой левый (правый) конечнопорожденный идеал является главным.

§2. Параболические подмножества

Через MP_i мы обозначаем i-ое параболическое подкольцо кольца $M(n,R)$. В матрицах MP_i реализуется как кольцо верхних блочно треугольных матриц,

$$\mathrm{MP}_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in M(i,R),\ y \in M(i,n-i,R),\ z \in M(n-i,R) \right\}.$$

Похожим образом определяется i-ое параболическое подмножество множества $M(m,n,R)$

$$\mathrm{MP}_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in M(i,R),\ y \in M(i,n-i,R),\ z \in M(m-i,n-i,R) \right\}.$$

Далее, через P_i мы обозначаем i-ю стандартную параболическую подгруппу в $\mathrm{GL}(n,R)$. В матрицах P_i реализуется как группа верхних блочно треугольных матриц,

$$P_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in \mathrm{GL}(i,R),\ y \in M(i,n-i,R),\ z \in \mathrm{GL}(n-i,R) \right\}.$$

Разложение Леви утверждает, что группа P_i представляется в виде полупрямого произведения $P_i = L_i \leftthreetimes U_i$ подгруппы Леви L_i и унипотентного радикала U_i, где

$$L_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in \mathrm{GL}(i,R),\ z \in \mathrm{GL}(n-i,R) \right\},$$

$$U_i = \left\{ \begin{pmatrix} e & y \\ 0 & e \end{pmatrix},\ y \in M(i,n-i,R) \right\}.$$

Иными словами, $U_i \trianglelefteq P_i$, и каждый элемент $g \in P_i$ может быть единственным образом представлен в виде $g = zu$, где $z \in L_i$, а $u \in U_i$. Или, что то же самое, в виде $g = vz$ для того же самого $z \in L_i$ и $v = zuz^{-1} \in U_i$.

Вместе с подгруппой P_i рассматривается также противоположная подгруппа P_i^-. В матрицах P_i^- реализуется как

$$P_i^- = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix},\ x \in \mathrm{GL}(i,R),\ y \in M(n-i,i,R),\ z \in \mathrm{GL}(n-i,R) \right\}.$$

Таким образом, подгруппы Леви групп P_i и P_i^- совпадают, $L_i^- = L_i$, но унипотентный радикал U_i^- группы P_i^- транспонирован к унипотентному радикалу U_i и, таким образом, имеет вид

$$U_i^- = \left\{ \begin{pmatrix} e & 0 \\ y & e \end{pmatrix},\ y \in M(n-i,i,R) \right\}.$$

Разложение Леви для P_i^- утверждает, что $P_i^- = L_i \leftthreetimes U_i^-$. Далее, обозначим через $U_{rs} = U_r \cap U_s$ и $U_{rs}^- = U_r^- \cap U_s^-$.

В дальнейшем мы также будем рассматривать соответствующие *элементарные* параболические подгруппы EP_i группы $E(n,R)$. По определению

$$\mathrm{EP}_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in E(i,R),\ y \in M(i,n-i,R),\ z \in E(n-i,R) \right\}.$$

Обратите внимание, что, вообще говоря, EP_i *строго* меньше, чем $P_i \cap E(n,R)$.

Ясно, что элементарная параболическая подгруппа EP_i представляется в виде полупрямого произведения $\mathrm{EP}_i = \mathrm{EL}_i \leftthreetimes U_i$ элементарной подгруппы Леви EL_i и унипотентного радикала U_i. Унипотентный радикал совпадает с рассматривавшимся ранее, а вот элементарная подгруппа Леви имеет вид

$$\mathrm{EL}_i = \left\{ \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & z \end{pmatrix},\ x \in E(i,R),\ z \in E(n-i,R) \right\}.$$

Иными словами, она состоит из блочных матриц, для которых *каждый* блок – а не просто вся матрица! – элементарен.

Начиная с этого места мы фиксируем индексы $1 \leqslant s < r \leqslant n-1$. В дальнейшем элементы кольца $M(n,R)$ записываются как блочные матрицы в соответствии с разбиением $(s, r-s, n-r)$ степени n. Таким образом, подгруппы P_r и P_s, так же как и соответствующие им подкольца MP_r и MP_s, имеют вид

$$P_r = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad P_s = \begin{pmatrix} * & * & * \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix},$$

а противоположные к ним подгруппы P_r^- и P_s^- – вид

$$P_r^- = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ * & * & * \end{pmatrix}, \quad P_s^- = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.$$

Для этого разбиения подгруппы Леви выглядят следующим образом

$$L_r = \begin{pmatrix} * & * & 0 \\ * & * & 0 \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix}, \quad L_s = \begin{pmatrix} * & 0 & 0 \\ 0 & * & * \\ 0 & * & * \end{pmatrix}.$$

С другой стороны, для того же разбиения унипотентные радикалы имеют вид

$$U_r = \begin{pmatrix} e & 0 & * \\ 0 & e & * \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad U_s = \begin{pmatrix} e & * & * \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix}, \quad U_{rs} = \begin{pmatrix} e & 0 & * \\ 0 & e & 0 \\ 0 & 0 & e \end{pmatrix},$$

а противоположные унипотентные радикалы, соответственно, вид

$$U_r^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ * & * & e \end{pmatrix}, \quad U_s^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ * & e & 0 \\ * & 0 & e \end{pmatrix}, \quad U_{rs}^- = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 \\ 0 & e & 0 \\ * & 0 & e \end{pmatrix}.$$

§3. Основная редукция

Напомним следующие три факта, которые понадобятся нам в дальнейшем, и доказательства, которых можно найти в статье [6]. Во-первых, это оценка на стабильный ранг k-эрмитового кольца.

Лемма 1. *Стабильный ранг левого (правого) k-эрмитового кольца меньше или равен k.*

Во-вторых, напомним следующее утверждение, характеризующее правые k-эрмитовы кольца. Но таким же образом можно сформулировать аналог и для левых колец Безу.

Лемма 2. *Пусть R – правое кольцо Безу стабильного ранга $\mathrm{sr}(R)=n$, тогда для любой строки $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$, где $m \geqslant n+1$, существует элементарная матрица $p \in E(m, R)$ такая, что строка*

$$(a_1, a_2, \ldots, a_m)p = (d, 0, \ldots, 0)$$

для некоторого $d \in R$.

В частности, в этом случае R является правым $(n+1)$-эрмитовым кольцом. Заметим, что в статье [6] эта лемма сформулирована для полной элементарной группы $\mathrm{GE}(m,R)$, но тот же метод доказательства работает и для элементарной группы $E(m,R)$. И в-третьих, напомним, что каждое левое (правое) k-эрмитово кольцо является, соответственно, левым (правым) кольцом Безу.

Далее, сформулируем следующие две ключевые леммы.

Лемма 3. *Пусть R – левое k-эрмитово кольцо и $m \geqslant k$, и пусть $a \in M(m,n,R)$. Если*

- $\mathrm{sr}(R) < k$, *то существует элементарная матрица $g \in E(m,R)$*
- $\mathrm{sr}(R) = k$, *то существует обратимая матрица $g \in \mathrm{GL}(m,R)$*

такая, что матрица ga имеет вид

$$ga = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где $A \in M(m-k+1,R)$ – верхнетреугольная, $B \in M(m-k+1, n-m+k-1,R)$, $C \in M(k-1,n-m+k-1,R)$.

Лемма 4. *Пусть R – правое k-эрмитово кольцо и $n \geqslant m \geqslant k$, тогда для любой матрицы $a \in M(m,n,R)$ и если*

- $\mathrm{sr}(R) < k$, *то существует элементарная матрица $g \in E(n,R)$*
- $\mathrm{sr}(R) = k$, *то существует обратимая матрица $g \in \mathrm{GL}(n,R)$*

такая, что матрица ag имеет вид

$$ag = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix},$$

где $A \in M(k-1,R)$, $B \in M(k-1,n-k+1,R)$ и $C \in M(m-k+1, n-k+1,R)$ – верхнетреугольная.

Эти две леммы могут быть доказаны простой индукцией по размеру матрицы a и по сути есть не что иное, как метод Гаусса. Таким образом, доказательство теорем 1 и 2 – есть последовательное применение лемм 3 и 4, соответственно, и разложений групп $E(n,R)$ и $\mathrm{GL}(n,R)$. Более того, теоремы 1 и 2 можно сформулировать для необязательно *квадратных* матриц, заменив параболические подкольца MP_i на соответствующие им параболические подмножества MP_i в $M(m,n,R)$, и остается заметить, что используемый метод доказательства проходит и в более общем случае.

Теорема $1'$**.** *Пусть* R *– левое* k*-эрмитово кольцо,* MP_s *– параболическое подмножество множества* $M(m,n,R)$*,* P_r *– параболическая подгруппа группы* $\mathrm{GL}(m,R)$*,* EP_r *– элементарная параболическая подгруппа группы* $E(m,R)$ *и* U^-_{rs} *– пересечение унипотентных радикалов противоположных параболических подгрупп, где* $1 \leqslant r \leqslant m-1$*,* $1 \leqslant s \leqslant \min(m-k+1,n)$ *и* $m \geqslant k$*. Предположим, что* $\mathrm{sr}(R) \leqslant |r-s|$*, тогда имеет место разложение*

$$M(m,n,R) = \mathrm{EP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{MP}_s$$

для $\mathrm{sr}(R) < k$ *и*

$$M(m,n,R) = P_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{MP}_s$$

для $\mathrm{sr}(R) = k$*.*

Теорема $2'$**.** *Пусть* R *– правое* k*-эрмитово кольцо,* MP_r *– параболическое подмножество множества* $M(m,n,R)$*,* P_s *– параболическая подгруппа группы* $\mathrm{GL}(n,R)$*,* EP_r *– элементарная параболическая подгруппа группы* $E(n,R)$ *и* U^-_{rs} *– пересечение унипотентных радикалов противоположных параболических подгрупп, где* $k-1 \leqslant r \leqslant m-1$*,* $1 \leqslant s \leqslant n-1$ *и* $n \geqslant m \geqslant k$*. Предположим, что* $\mathrm{sr}(R) \leqslant |r-s|$*, тогда имеет место разложение*

$$M(m,n,R) = \mathrm{MP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot \mathrm{EP}_s$$

для $\mathrm{sr}(R) < k$ *и*

$$M(m,n,R) = \mathrm{MP}_r \cdot U^-_{rs} \cdot P_s$$

для $\mathrm{sr}(R) = k$*.*

В заключение автор благодарит С. Синчука за многочисленные полезные обсуждения и помощь, оказанную при написании данной статьи.

Литература

1. K. Dennis, *Stability for* K_2. — Lect. Notes Math. **353** (1973), 85–94.
2. Л. Н. Васерштейн, *Стабилизация для классических групп над кольцами.* — Мат. Сб. **93**, No. 2 (1974), 268–295.
3. А. А. Суслин, М. С. Туленбаев, *Теорема о стабилизации для* K_2*-функтора Милнора.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **64** (1976), 131–152.
4. Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Разложения типа Денниса–Васерштейна.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 48–60.
5. Н. А. Вавилов, С. С. Синчук, *Параболические факторизации расщепимых классических групп.* — Алгебра и анализ **23**, No. 4 (2011), 1–30.

6. B. V. Zabavsky, *Diagonalizability theorems for matrices over rings with finite stable range.* — Algebra Discrete Math. **1** (2005), 151–165.
7. I. Kaplansky, *Elementary divisors and modules.* — Trans. Amer. Math. Soc. **66**, No. 2 (1949), 464–491.

Tsvetkov K. B. Parabolic factorization for a matrix ring.

In the present paper, we prove Dennis–Vaserstein type decomposition (or a parabolic factorization) for some pairs of parabolic subsets P_r and MP_s in the matrix ring $M(n, R)$ over Hermite ring R. We also formulate and prove analogous results for *non-square* matrices.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: tsvetkos9@gmail.com

Поступило 13 мая 2013 г.