Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

И. Н. Фаизов

СКАЧОК ВЕТВЛЕНИЯ В МОДЕЛЬНЫХ РАСШИРЕНИЯХ СТЕПЕНИ p

Введение

Один из возможных подходов к изучению ветвления в случае несовершенного поля вычетов изложен в [1] и восходит к программе Делиня вычисления характеристики Эйлера–Пуанкаре для этального пучка на поверхности, или, в более общем контексте, описания ветвления конечного морфизма арифметических или алгебраических поверхностей. Пусть $\mathbf{k}$ – алгебраически замкнутое поле характеристики $p > 0$, S – гладкая проективная поверхность над $\mathbf{k}$, $\mathcal{F}$ – локально-постоянный $\mathbb{F}_l$-пучок на дополнении к дивизору D $(l \neq p)$. Идея Делиня заключалась в том, чтобы рассмотреть регулярные кривые $\mathcal{C}$, трансверсально пересекающие D_0, где D_0 – неприводимая компонента дивизора D. Тогда для каждой кривой $\mathcal{C}$ можно рассмотреть кондуктор Суона $\mathcal{F}_{\mathcal{C}}$ в точке пересечения $\mathcal{C}$ и D_0. Ожидается, что кондуктор зависит только от струи $\mathcal{C}$, причем полунепрерывно снизу (если ввести на множестве струй $T_{1,r}$ структуру векторного расслоения). Более того, если общее значение функции достигается на множестве W, то $T_{1,r} \setminus W$ имеет коразмерность 1.

Подход Делиня может быть применен для изучения ветвления в расширении двумерных локальных полей L/K, на которое наложены некоторые ограничения. А именно, рассмотрим расширение двумерных локальных регулярных колец с общим полем коэффициентов $\mathbf{k}$. Если фиксировать выбор локальных параметров, такое расширение можно представить как вложение

$$h : \mathbf{k}[[t, u]] \hookrightarrow \mathbf{k}[[x, y]].$$

Мы будем называть морфизм h и выбор локальных параметров моделью для расширения двумерных локальных полей L/K, если $L = \mathbf{k}((x))((y))$, $K = \mathbf{k}((t))((u))$. Несколько более общее определение и условие существования модели для данного расширения L/K имеется в

Ключевые слова: ветвление, нормирование, полное поле дискретного нормирования, модельное расширение, скачок.

[5]. Мы будем рассматривать расширения степени p, где $p = \operatorname{char}\mathbf{k}$. Положим $\mathcal{X} = \operatorname{Spec}\mathbf{k}[[t,u]]$, $\mathcal{Y} = \operatorname{Spec}\mathbf{k}[[x,y]]$. Морфизм колец задает эпиморфизм схем

$$\mathcal{Y} \twoheadrightarrow \mathcal{X}.$$

Для каждой неприводимой кривой $\mathcal{C}$ на $\mathcal{X}$ рассмотрим кольцо функций на ней $\mathbf{k}[\mathcal{C}]$ и соответствующий ей идеал $\mathfrak{p}_{\mathcal{C}}$. Пусть $\mathcal{C}'$ – прообраз $\mathcal{C}$ в $\mathcal{Y}$. $\mathcal{C}'$ может либо являться неприводимой кривой, либо состоять из нескольких неприводимых компонент. Рассмотрим те неприводимые кривые $\mathcal{C}$, для которых $\mathcal{C}'$ тоже неприводима. В этом случае обозначим поле частных целого замыкания $\mathbf{k}[\mathcal{C}']$ в $\mathbf{k}[[x,y]]$ через $L_{\mathcal{C}}$. Пусть $K_{\mathcal{C}}$ – поле частных $\mathbf{k}[\mathcal{C}]$. Возникает расширение полных дискретно нормированных полей $L_{\mathcal{C}}/K_{\mathcal{C}}$. В [6] описываются инварианты ветвления такого расширения, если оно является расширением Галуа. В частности, в случае расширения Галуа можно рассмотреть скачок ветвления $h_{\mathcal{C}}(L/K)$, определяемый кривой $\mathcal{C}$. Ниже мы расширим понятие скачка ветвления на произвольное сепарабельное расширение. На множестве тех кривых $\mathcal{C}$, для которых $\mathcal{C}'$ перестает быть неприводимой, положим $h_{\mathcal{C}}(L/K) = 0$.

В случае, когда L/K является расширением Артина–Шрайера, в работе [4] доказаны такие свойства скачка ветвления как полунепрерывность, наличие достаточного порядка струи и наличие общего значения. Целью данной работы является доказательство основных свойств скачка ветвления для модельных расширений.

Автор благодарит И. Б. Жукова за постановку задачи и внимание к работе.

§1. Алгоритм Гамбургера–Нетера в модельных расширениях

Следующее определение удобно при применении подготовительной леммы Вейерштрасса и взято из [3, гл. 1].

Определение. *Ряд $\Theta(x_1,\dots,x_n)$ называется x_i-общим порядка d, если*

$$\operatorname{ord}\Theta(0,\dots,0,x_i,0,\dots,0) = d.$$

Подробно алгоритм Гамбургера–Нетера изложен в [2, гл. 2]. Пусть неприводимая кривая $\mathcal{C} \subset \mathcal{X}$ задана уравнением

$$G(x,y) = 0.$$

Обозначим нормирование, соответствующее особенности уравнения в нуле, через v. Результатом работы алгоритма для этой кривой является параметризация $x = X(\pi)$, $y = Y(\pi)$, такая что

$$G(X(\pi), Y(\pi)) = 0,$$

π – элемент $\mathbf{k}((x))((y))$ с нормированием 1. Следуя [2], мы вкратце опишем процедуру получения элемента π. Она состоит в последовательном делении локальных параметров друг на друга. Пусть $v(x) \geqslant v(y)$. Тогда сделаем замену переменных вида $x = (a_{01} + x_1)y$, где $a_{01} \in \mathbf{k}$ выбирается таким образом, что после замены уравнение сокращается на некоторую степень y. Получим новое уравнение относительно x_1 и y. Для пары локальных параметров (x_1, y) и нового уравнения повторим операцию. Замены вида $x_{k-1} = (a_{0k} + x_k)y$ необходимо производить до тех пор, пока $v(x_{k-1}) \geqslant y$. Если в некоторый момент это неравенство перестанет выполняться, получим $v(y) > v(x_h)$. Положим $z_1 = x_h$ и продолжим процедуру для пары локальных параметров (y, z_1). Если же на каком-то шаге процесс будет продолжаться бесконечно, получим выражение одного локального параметра через другой в виде ряда. Таким образом, в результате описанной процедуры получим систему равенств

$$\begin{array}{rcl} x & = & a_{01}y + a_{02}y^2 + \cdots + a_{0h}y^h + y^h z_1 \\ y & = & a_{12}z_1^2 + a_{22}z_1^3 + \cdots + a_{1h_1}z_1^{h_1} + z_1^{h_1} z_2 \\ & \vdots & \\ z_{r-1} & = & a_{r2}z_r^2 + \cdots \end{array}$$

Иногда для единства обозначений удобно полагать $z_{-1} = x$, $z_0 = y$. Элемент $\pi = z_r$ и является искомым элементом с нормированием 1. Рассматривая эту систему в обратном порядке, получаем парметризации $x = X(\pi)$, $y = Y(\pi)$. Нас будет интересовать, чему равны порядки производных $X'(\pi)$ и $Y'(\pi)$.

Определение. *Назовем ряд $G(x, y)$ полумодельным (по x), если*

$$\frac{\partial}{\partial x} G(x, y) = \gamma(x, y) x^T y^R,$$

где $\gamma(x, y)$ – обратимый ряд, $T \geqslant p$, $R \geqslant 0$.

Для дальнейших рассуждений нам понадобится понятие многоугольника Ньютона.

Определение. *Пусть* $G(x,y) = \sum\limits_{i,j} a_{ij}x^i y^j \in \mathbf{k}[[x,y]]$. *Рассмотрим множество точек* $J = \{(i,j)\colon a_{ij} \neq 0\} \subset \mathbb{Z}^2$. *Многоугольником Ньютона ряда* $G(x,y)$ *называется выпуклая оболочка множества* J. *Будем обозначать его через* $\mathcal{N}(G)$.

Введем обозначение для еще одной фигуры, тесно связанной с многоугольником Ньютона. Положим

$$\overline{\mathcal{N}}(G) = \{Q \in \mathbb{R}^2_{\geqslant 0}\colon [OQ] \cap \mathcal{N}(G) = \varnothing\}.$$

Для рядов, у которых дополнение $\mathcal{N}(G)$ до всей первой четверти ограниченно, это дополнение совпадает с $\overline{\mathcal{N}}(G)$. Если ряд $G(x,y)$ не делится ни на x, ни на y, то множество $\overline{\mathcal{N}}(G)$ ограниченно. В общем случае $\overline{\mathcal{N}}(G)$ является звездным множеством.

Нас будут интересовать ряды, для которых многоугольник Ньютона (далее первая координата соответствует нормированию по x, вторая – по y) состоит из двух вершин: $(\alpha,0)$ и $(0,\beta)$, где α,β – натуральные числа, причем на ребре, соединяющем эти две вершины, других вершин нет. Для краткости мы будем говорить, что таким рядам соответствует *простой многоугольник Ньютона.* Если $\alpha = p$, будем называть такой многоугольник *p-простым.*

На рис. 1 показан многоугольник Ньютона ряда $G(x,y) = x^5 + x^6 + \dots + xy + y^3 + y^4 + \cdots$. На рис. 2 показан простой многоугольник Ньютона.

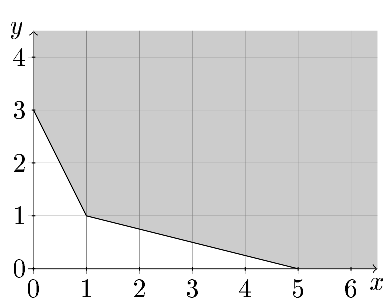

Рис. 1. Пример.

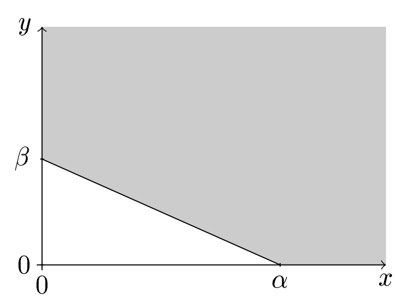

Рис. 2. Простой многоугольник Ньютона.

Лемма 1. *Пусть $G(x,y)$ – полумодельный ряд, x-общий порядка p, не делящийся на x^p. Тогда многоугольник Ньютона ряда $G(x,y)$ p-прост.*

Доказательство. Пусть моном $x^k y^l$, где $0 < k < p$, входит в полумодельный ряд $G(x,y)$ с ненулевым коэффициентом. Тогда в $\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)$ с ненулевым коэффициентом входит моном $x^{k-1}y^l$. По определению полумодельности все мономы в $\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)$ должны делиться на x^p, т.к. $T \geqslant p$. Но $k-1 < p$. Значит, мономы $x^k y^l$, где $0 < k < p$, в $G(x,y)$ входят с нулевым коэффициентом. Если $G(x,y)$ является y-общим порядка β, то многоугольник Ньютона прост. Если же в $G(x,y)$ нет мономов вида y^l, то $G(x,y) = x^p H(x,y)$, что противоречит условию. $\square$

Приведем два утверждения, касающихся многоугольника Ньютона и алгоритма Гамбургера–Нетера в случае, когда ряд $G(x,y)$ неприводим.

Лемма 2. *Пусть $G(x,y)$ – неприводимый ряд, $H(x,z)$ – ряд, полученный на очередном шаге алгоритма Гамбургера–Нетера из $G(x,y)$ заменой $y = (a+z)x$ и сокращением на некоторую степень x:*

$$H(x,z) = x^{-s}G(x,(a+z)x).$$

Тогда $H(x,z)$ неприводим.

Доказательство. Сначала покажем, что лемму достаточно доказать в случае $a = 0$. Рассмотрим ряд $\widehat{G}(x,t) = G(x,t+ax)$. Ряд $\widehat{G}$ также неприводим, первая замена переменных в алгоритме Гамбургера–Нетера имеет вид $t = zx$. После сокращения на подходящую степень x получим то же самое уравнение $H(x,z) = 0$.

Итак, $a = 0$. $G(0,y) \neq 0$, поэтому ряд G является y-общим. По подготовительной лемме Вейерштрасса найдется обратимый ряд $U(x,y)$, такой что

$$\bar{G}(x,y) = U(x,y)G(x,y) \in \mathbf{k}[[x]][y].$$

При этом соответствующий ряд $\bar{H}(x,z)$ отличается от ряда $H(x,z)$ умножением на обратимый ряд $\bar{U}(x,z) = U(x,zx)$, поэтому достаточно доказать лемму в случае, когда $G(x,y)$ – многочлен по y с коэффициентами из $\mathbf{k}[[x]]$.

Поскольку $G(x,y)$ – многочлен по y, $H(x,z)$ – многочлен по z, причем $\deg H = s$. Пусть

$$H(x,z) = H_1(x,z)H_2(x,z),$$

где $H_1, H_2 \in \mathbf{k}[[x,z]]$ – необратимые элементы. По лемме Гаусса можно считать, что $H_1(x,z)$ и $H_2(x,z)$ являются многочленами по z с коэффициентами в $\mathbf{k}[[x]]$. Поскольку

$$\deg H_1 + \deg H_2 = \deg H = s,$$

рациональные функции

$$F_1(x,y) = x^{\deg H_1} H_1\Big(x, \frac{y}{x}\Big) \quad \text{и} \quad F_2(x,y) = x^{\deg H_2} H_2\Big(x, \frac{y}{x}\Big)$$

на самом деле лежат в $\mathbf{k}[[x]][y]$. Но

$$G(x,y) = F_1(x,y)F_2(x,y),$$

что противоречит неприводимости G. □

Лемма 3. *Если ряд $G(x,y)$ неприводим, то его многоугольник Ньютона прост.*

Доказательство этого утверждения хорошо известно.

Следующие утверждения характеризуют порядки $X'(\pi)$ и $Y'(\pi)$. Будем считать, что мы применяем алгоритм Гамбургера–Нетера к уравнению

$$G(x,y) = 0.$$

Положим

$$\begin{array}{rcl} M & = & \operatorname{ord} \frac{\partial}{\partial x} G(X(\pi), Y(\pi)), \\ N & = & \operatorname{ord} \frac{\partial}{\partial y} G(X(\pi), Y(\pi)). \end{array}$$

Тогда, дифференцируя исходное уравнение и сравнивая порядки, легко видеть, что

$$M + \operatorname{ord} X' = N + \operatorname{ord} Y' \tag{1}$$

Заметим, что если G полумодельный, то

$$M = T \operatorname{ord} X + R \operatorname{ord} Y.$$

Сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 4. *Пусть ряду G соответствует простой многоугольник Ньютона, причем α и β взаимно просты. Тогда*

$$\operatorname{ord} X(\pi) = \beta, \operatorname{ord} Y(\pi) = \alpha.$$

Доказательство. Очевидно из сравнения нормирований в исходном уравнении. □

С уравнением $G(x,y)=0$ можно связать дифференциальную форму

$$\mathrm{d}G = \frac{\partial}{\partial x}G(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\mathrm{d}y.$$

Лемма 5. *Пусть ряду G соответствует простой многоугольник Ньютона с вершинами $(k,0)$ и $(0,mp)$, замена в алгоритме Гамбургера–Нетера имеет вид $y=(a+y_1)x$ и приводит к уравнению $G^{[1]}(x,y_1)=0$. Тогда*

$$\mathrm{d}G^{[1]} = x^{-mp}\mathrm{d}G.$$

Доказательство. Вид замены подразумевает, что $k \geqslant mp$, и после замены уравнение сокращается на x^{mp}.

Из соотношения на переменные очевидно, что

$$\mathrm{d}y_1 = \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2}.$$

Сами ряды связаны соотношением

$$G^{[1]}(x,y_1) = x^{-mp}G(x,(a+y_1)x).$$

Дифференцируя это соотношение, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}G^{[1]}(x,y_1) \\
&\quad = x^{-mp}\frac{\partial}{\partial x}G(x,(a+y_1)x) + x^{-mp}(a+y_1)\frac{\partial}{\partial y}G(x,(a+y_1)x) \\
&\qquad\qquad = x^{-mp}\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\right),
\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial y_1}G^{[1]}(x,y_1) = x^{1-mp}\frac{\partial}{\partial y}G(x,(a+y_1)x) = x^{1-mp}\frac{\partial}{\partial y}G(x,y).$$

Поэтому

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}G^{[1]} &= \frac{\partial}{\partial x}G^{[1]}(x,y_1)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y_1}G^{[1]}(x,y_1)\mathrm{d}y_1 \\
&= x^{-mp}\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x,y) + \frac{y}{x}\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\right)\mathrm{d}x + x^{1-mp}\frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2} \\
&\qquad = x^{-mp}\left(\frac{\partial}{\partial x}G(x,y)\mathrm{d}x + \frac{\partial}{\partial y}G(x,y)\mathrm{d}y\right) = x^{-mp}\mathrm{d}G.
\end{aligned}$$

□

Мы будем довольно часто применять лемму 5 в случае, когда G соответствует p-простой многоугольник Ньютона, т.е. $k = p$, $m = 1$.

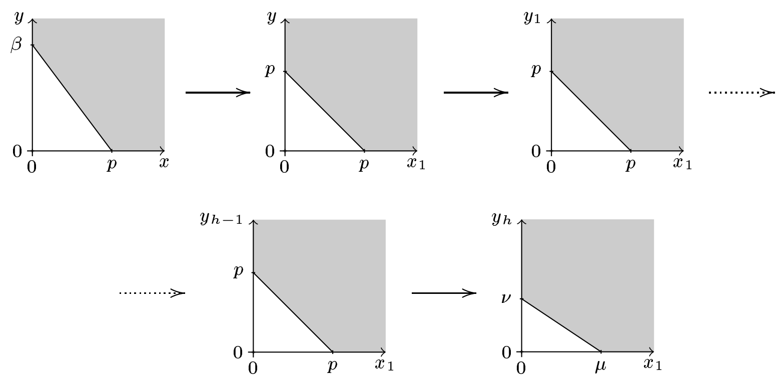

Рис. 3. Многоугольник Ньютона в процессе Гамбургера–Нетера.

Прежде чем сформулировать основную теорему о порядках X' и Y', необходимо пояснить некоторые обозначения, связанные с процессом работы алгоритма Гамбургера–Нетера. Пусть основное уравнение задается неприводимым полумодельным рядом, которому соответствует p-простой многоугольник Ньютона, причем $p \mid \beta$. Полагая $\beta = (q+1)p$, можно сделать замену $x = y^q x_1$ и сократить уравнение на y^{qp}. Тогда получим уравнение, которому соответствует многоугольник Ньютона с вершинами $(p, 0)$ и $(0, p)$. К ряду в этом уравнении можно применить подготовительную лемму Вейерштрасса, после чего уравнение будет иметь вид

$$y^p + b_{p-1}(x_1)y^{p-1} + \cdots + b_0(x_1) = 0,$$

где $b_i(x_1) \in \mathbf{k}[[x_1]]$. Обозначим получившийся ряд через $G^{[0]}(x_1, y)$. В этом уравнении, согласно алгоритму Гамбургера–Нетера, требуется производить замены вида $y_{k-1} = (a_{0,k} + y_k)x_1$ и сокращения на необходимую степень x_1 до тех пор, пока $v(y_k) \geqslant v(x_1)$. Количество сделанных при этом шагов обозначим через h. Ряд, получившийся на

k-м шаге, обозначим через

$$G^{[k]}(x_1, y_k) = y_k^p + b_{p-1}^{[k]}(x_1) y_k^{p-1} + \cdots + b_0^{[k]}(x_1). \tag{2}$$

Введем обозначения для коэффициентов:

$$b_i^{[k]}(x) = \sum_{j \geqslant 0} b_{i,j}^{[k]} x^j.$$

На очередном шаге $a_{0,k}$ ищется из уравнения

$$a_{0,k}^p + b_{p-1,1}^{[k-1]} a_{0,k}^{p-1} + \cdots + b_{0,p}^{[k-1]} = 0. \tag{3}$$

Новые коэффициенты получаются по следующей рекуррентной формуле:

$$b_i^{[k]}(x) = x^{-p} \sum_{j=i}^{p-1} \binom{j}{i} a_{0,k}^{j-i} x^j b_j^{[k-1]}(x) + \begin{cases} 0, & i > 0, \\ a_{0,k}^p, & i = 0. \end{cases} \tag{4}$$

На шаге с номером h неравенство $v(y_h) \geqslant v(x_1)$ нарушается. Ряд $G^{[h]}$ по лемме 2 неприводим, а потому по лемме 3 его многоугольник Ньютона прост. Обозначим вершины многоугольника Ньютона через $(0, \mu)$ и $(\nu, 0)$. Очевидно, что $\mu \leqslant p$. Поскольку $v(x_1) > v(y_h)$, имеем

$$\nu < \mu \leqslant p.$$

На рис. 3 показано, как меняется многоугольник Ньютона в процессе работы алгоритма Гамбургера–Нетера.

После того, как алгоритм Гамбургера–Нетера завершит работу, можно говорить о рядах $Y_k(\pi)$, которые дают решение

$$G^{[k]}(X, Y_k) = 0.$$

Положим

$$M_k = \operatorname{ord} \frac{\partial}{\partial x} G^{[k]}(X, Y_k),$$
$$N_k = \operatorname{ord} \frac{\partial}{\partial y_k} G^{[k]}(X, Y_k).$$

Теорема 1. *Пусть дано уравнение*

$$G(x, y) = 0,$$

где G – неприводимый полумодельный ряд, которому соответствует p-простой многоугольник Ньютона с вершинами $(p, 0)$ и $(0, \beta)$. Числа

h, ν, μ определим как выше. Тогда

$$\operatorname{ord} Y'(\pi) = \begin{cases} T\beta + Rp - (p-1)(\beta - 1), & p \nmid \beta, \\ T\beta + Rp - (p-1)(\beta + p(h-1) + \nu - 1), & p \mid \beta, \mu = p, \\ \mu - 1, & p \mid \beta, \mu < p. \end{cases}.$$

Доказательство. Начнем с первой части теоремы ($p \nmid \beta$). Запишем алгоритм Евклида для чисел p и β:

$$\begin{array}{rcl} \beta & = & q_0 p + r_1, \\ p & = & q_1 r_1 + r_2, \\ r_1 & = & q_2 r_2 + r_3, \\ & \dots & \\ r_{n-2} & = & q_{n-1} r_{n-1} + r_n, \\ r_{n-1} & = & q_n r_n. \end{array}$$

Здесь $r_n = 1$, $q_i \in \mathbb{N}$. Для единообразия обозначений положим $z_{-1} = x$, $z_0 = y$, $r_{-1} = \beta$, $r_0 = p$. Равенствам в алгоритме Евклида соответствуют шаги алгоритма Гамбургера–Нетера:

$$\begin{array}{rcl} x & = & y^{q_0} z_1, \\ y & = & z_1^{q_1} z_2, \\ & \dots & \\ z_{n-2} & = & z_{n-1}^{q_{n-1}} z_n. \end{array}$$

Несложно видеть, что на очередном шаге будет получаться уравнение вида

$$A z_{i+1}^{r_i} + B z_i^{r_{i+1}} + \text{слагаемые более высокого порядка} = 0.$$

При $i = n-1$ ряд в этом уравнении станет z_{n-1}-общим порядка 1, поэтому по подготовительной лемме Вейерштрасса, полагая $\pi = z_n$, получим, что

$$z_{n-1} = \varphi(\pi),$$

где $\operatorname{ord} \varphi = r_{n-1}$. Рассматривая равенства в обратном порядке, легко видеть, что $\operatorname{ord} Z_k(\pi) = r_k$. В частности, $\operatorname{ord} Y(\pi) = p$, $\operatorname{ord} X(\pi) = \beta$. Из полумодельности получаем выражение для M. Поскольку $p \nmid \beta$, $\operatorname{ord} X'(\pi) = \operatorname{ord} X(\pi) - 1 = \beta - 1$.

Чтобы найти N, вспомним, что многоугольник Ньютона исходного ряда состоял из ребра, соединяющего $(p, 0)$ и $(0, \beta)$. Пусть моном $x^i y^j$ входит в ряд $G(x, y)$ с ненулевым коэффициентом, $i > 0$, $j > 0$. Тогда $\beta i + pj > p\beta$, откуда $\beta i + p(j-1) > p(\beta - 1)$. Из этого следует, что все мономы кроме $y^{\beta-1}$, входящие в $\frac{\partial}{\partial y} G(x, y)$ при подстановке в них

$x = X(\pi)$ и $y = Y(\pi)$, имеют нормирование строго большее, чем $Y^{\beta-1}$. Поэтому

$$N = \operatorname{ord} \frac{\partial}{\partial y} G(X, Y) = \operatorname{ord} Y^{\beta-1} = p(\beta - 1).$$

Порядок Y' вычисляется после этого непосредственно из уравнения (1).

Теперь перейдем к случаю $p \mid \beta$, $\mu = p$. Напомним, что $\beta = (q+1)p$. Выпишем уравнение (1) для рядов $G^{[0]}$ и $G^{[h]}$:

$$\begin{aligned} M_0 + \operatorname{ord} X_1' &= N_0 + \operatorname{ord} Y', \\ M_h + \operatorname{ord} X_1' &= N_h + \operatorname{ord} Y_h'. \end{aligned}$$

Вычитая одно из другого, находим, что

$$\operatorname{ord} Y' = M_0 - M_h - (N_0 - N_h) + \operatorname{ord} Y_h'. \tag{5}$$

Вспомним, что

$$G^{[0]}(x_1, y) = y^{-qp} G(y^q x_1, y).$$

Дифференцируя по x_1, получаем, что

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_1} G^{[0]}(x_1, y) &= y^{-q(p-1)} \frac{\partial}{\partial x} G(y^q x_1, y) \\ &= y^{-q(p-1)} \gamma(y^q x_1, y)(y^q x_1)^T y^R = \widetilde{\gamma}(x_1, y) x_1^T y^{q(T-p+1)+R}. \end{aligned}$$

Из этого равенства следует, что

$$\begin{aligned} M_0 &= \operatorname{ord} G^{[0]}(X_1, Y) = T \operatorname{ord} X_1 + (q(T-p+1)+R) \operatorname{ord} Y \\ &= T \operatorname{ord}(Y^q X_1) + R \operatorname{ord} Y - (p-1) q \operatorname{ord} Y = M - (p-1) q \operatorname{ord} Y. \end{aligned}$$

Далее, по определению чисел μ и ν

$$G^{[h]}(x_1, y_h) = A x_1^{\nu} + B y_h^{\mu} + \text{мономы более высокого порядка}.$$

По лемме 4 $\operatorname{ord} X_1 = \mu = p$, $\operatorname{ord} Y_h = \nu$. Так же, как и в первом случае теоремы, можно показать, что

$$M_h = \operatorname{ord} \frac{\partial}{\partial x_1} G^{[h]}(X_1, Y_h) = (\nu - 1) \operatorname{ord} X_1 = p(\nu - 1).$$

Поскольку $\nu < p$, $\operatorname{ord} Y_h' = \nu - 1$.

Отметим, что $a_{0,1} \neq 0$, а потому

$$Y = (\text{обратимый ряд}) X_1 + X_1^h Y_h.$$

Отсюда следует, что $\operatorname{ord} Y = \operatorname{ord} X_1 = \mu = p$, откуда

$$M_0 = M - (p-1)qp.$$

Чтобы найти разность $N_0 - N_h$, применим лемму 5 к рядам $G^{[0]}, \dots, G^{[h]}$:

$$\mathrm{d}G^{[0]} = x^{ph}\mathrm{d}G^{[h]}.$$

Вспомним, что

$$y = a_{0,1}x_1 + \dots + a_{0,h}x_1^h + x_1^h y_h.$$

Дифференцируя получаем

$$\mathrm{d}y = (a_{0,1} + \dots + ha_{0,h}x_1^{h-1} + hx_1^{h-1}y_h)\mathrm{d}x_1 + x_1^h \mathrm{d}y_h.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\mathrm{d}G^{[0]}(x_1, y) &= \frac{\partial}{\partial x_1}G^{[0]}(x_1, y)\mathrm{d}x_1 + \frac{\partial}{\partial y}G^{[0]}(x_1, y)\mathrm{d}y \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_1}G^{[0]}(x_1, y) + a_{0,1} + \dots + ha_{0,h}x_1^{h-1} + hx_1^{h-1}y_h\right)\mathrm{d}x_1 \\ &\qquad + x_1^h \frac{\partial}{\partial y}G^{[0]}(x_1, y)\mathrm{d}y_h\end{aligned}$$

В то же время

$$x^{ph}\mathrm{d}G^{[h]}(x_1, y_h) = x_1^{ph}\frac{\partial}{\partial x_1}G^{[h]}(x_1, y_h)\mathrm{d}x_1 + x_1^{ph}\frac{\partial}{\partial y_h}G^{[h]}(x_1, y_h)\mathrm{d}y_h.$$

Сравнивая коэффициенты при $\mathrm{d}y_h$ в двух дифференциальных формах, получаем

$$\frac{\partial}{\partial y}G^{[0]}(x_1, y) = x_1^{(p-1)h}\frac{\partial}{\partial y_h}G^{[h]}(x_1, y_h),$$

откуда

$$N_0 = N_h + (p-1)h \operatorname{ord} X_1 = N_h + (p-1)ph.$$

Наконец, у нас есть все слагаемые в правой части равенства (5):

$$\begin{aligned}\operatorname{ord} Y' &= M_0 - M_h - (N_0 - N_h) + \operatorname{ord} Y_h' \\ &= M - (p-1)q \operatorname{ord} Y - p(\nu - 1) - (p-1)ph + \nu - 1 \\ &= T\beta + Rp - (p-1)(qp + ph + \nu - 1) = T\beta + Rp - (p-1)(\beta + p(h-1) + \nu - 1).\end{aligned}$$

В последнем переходе мы использовали то, что $\operatorname{ord} X = \beta$. Это легко увидеть из соотношения

$$X = Y^q X_1.$$

Третий случай, $p \mid \beta$, $\mu < p$, тривиален. Как мы видели, из уравнения

$$G^{[h]}(x_1, y_h) = 0$$

следует, что $\operatorname{ord} X_1 = \mu$. Также при разборе предыдущего случая мы показали, что $\operatorname{ord} Y = \operatorname{ord} X_1$. Если $\mu < p$, отсюда немедленно следует, что $\operatorname{ord} Y' = \mu - 1$. □

Следующее следствие поясняет, почему на самом деле порядок Y' ограничен.

Следствие 1. *Пусть G – неприводимый полумодельный ряд, которому соответствует p-простой многоугольник Ньютона. Тогда*

$$M \geqslant \operatorname{ord} Y', N \geqslant \operatorname{ord} X'.$$

Доказательство. В силу равенства (1) два неравенства в теореме равносильны, поэтому достаточно проверить любое из них. Во всех трех случаях теоремы 1 неравенство $M \geqslant \operatorname{ord} Y'$ выполнено по очевидным соображениям. □

Следствие 2. *Если G – неприводимый полумодельный ряд, которому соответствует p-простой многоугольник Ньютона, то найдется такая константа C, зависящая только от β, T, R, что $\operatorname{ord} Y' \leqslant C$.*

Доказательство. Как видно из теоремы 1, число M можно оценить, например, константой $T\beta + Rp$. □

Следствие 3. *Если G – неприводимый полумодельный ряд, которому соответствует p-простой многоугольник Ньютона, то*

$$h \leqslant T\beta + R.$$

Доказательство. В случае $p \nmid \beta$ утверждение очевидно, т.к. $h = 0$.

В случае $p \mid \beta$, $\mu = p$ оценка верна, т.к.

$$h \leqslant 1 + \frac{T\beta + Rp - (p-1)(\beta + \nu - 1)}{(p-1)p} < T\beta + R.$$

Остается случай $p \mid \beta$, $\mu < p$. Тогда

$$N_0 - N_h = (p-1)ph,$$

откуда

$$h \leqslant \frac{N_0}{(p-1)p} \leqslant \frac{M_0 + \operatorname{ord} X_1'}{(p-1)p} \leqslant \frac{M + p}{(p-1)p} \leqslant T\beta + R.$$

□

Все сказанное выше относилось к случаю, когда ряд $G(x, y)$ неприводим. Если ряд $G(x, y)$ приводим, то алгоритм Гамбургера–Нетера, строго говоря, неприменим к уравнению $G(x, y) = 0$. Разумеется, он применим к каждому неприводимому сомножителю ряда G, но задача разложения ряда на неприводимые сомножители сама по себе довольно сложна. Чтобы в дальнейшем охарактеризовать множество приводимых рядов G, нам потребуется ряд утверждений.

В случае, когда характеристика базового поля равна нулю, для поиска ветви решения используется алгоритм Пьюизо. Мы перенесем соответствующую теорему из [9] на случай $\operatorname{char} \mathbf{k} = p > 0$ с некоторыми ограничениями.

Лемма 6. *Пусть дано уравнение $G(x, y) = 0$, где ряду G соответствует многоугольник Ньютона с вершинами $(\alpha, 0)$ и $(0, \beta)$. Если $\alpha < p$, то найдутся $n \in \mathbb{N}$ и $\varphi \in \mathbf{k}[[t]]$, такие что $p \nmid n$ и*

$$G(\varphi(t), t^n) = 0.$$

Доказательство. Мы в точности следуем доказательству из [9, глава 2.1]. Выберем (единственное) ребро $\mathcal{N}(G)$. Это отрезок, соединяющий вершины $(0, \beta)$ и $(\alpha, 0)$. Положим $d = \gcd(\alpha, \beta)$, $\alpha = ad$, $\beta = bd$. Множество целых точек на этом ребре суть

$$\{(ak,\, b(d-k)) : k = 0, \ldots, d\}.$$

Искомая параметризация находится путем последовательных замен вида ($x_0 = x$, $y_0 = y$)

$$y_i = y_{i+1}^{a_i}, \quad x_i = (c_i + x_{i+1}) y_{i+1}^{b_i},$$

где $c_i \in \mathbf{k}$. После такой замены и сокращения на подходящую степень y_{i+1} получается новый ряд

$$G_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_{i+1}^{-s_i} G_i(x_i, y_i).$$

Число c_i подбирается из единственного условия, чтобы после замены $G_i(x_i, y_i)$ не имел свободного члена. При этом для доказательства утверждения леммы достаточно показать, что с некоторого момента i_0 все $a_i = 1$. Тогда

$$y_{i_0} = y_{i_0+1} = \cdots .$$

Полагая $t = y_{i_0}$, получаем требуемую параметризацию, так как x_{i_0} есть ряд от t, а следовательно, и $x = x_0$ есть ряд от t, в то время как

$$y = y_0 = y_1^{a_0} = \cdots = y_{i_0}^{a_0 \cdots a_{i_0}} = t^n.$$

Теперь углубимся в детали и покажем, что b_i с некоторого момента обращаются в 1. Положим

$$G(x,y)=\sum_{r,s\geqslant 0} a_{r,s}x^r y^s.$$

По определению многоугольника Ньютона

$$G(x,y)=\underbrace{\sum_{\alpha s+\beta r=\alpha\beta} a_{r,s}x^r y^s}_{\Phi(x,y)}+\sum_{\alpha s+\beta r>\alpha\beta} a_{r,s}x^r y^s.$$

Сравнивая нормирования в $\Phi(x,y)$, несложно видеть, что на первом шаге $b_0=b$, $a_0=a$, поэтому замена имеет вид

$$y=y_1^a,\quad x=(c_0+x_1)y_1^b.$$

Вспоминая параметризацию целых точек на ребре многоугольника Ньютона, получаем

$$\Phi(x,y)=\sum_{\alpha s+\beta r=\alpha\beta} a_{r,s}(c_0+x_1)^r y_1^{as+br}=y_1^{abd}\sum_{k=0}^{d} a_{ak,b(d-k)}(c_0+x_1)^{ak}.$$

Далее положим $\Psi(x_1)=y_1^{-abd}\Phi(x,y)\in\mathbf{k}[x_1]$. Во-первых, из выражения для Φ видно, что $s_0=abd$, т.е. максимальная степень y_1, на которую делится $G(x,y)$ после замены переменных, равна $abd=\frac{\alpha\beta}{d}=\mathrm{lcd}(\alpha,\beta)$. Во-вторых, приравнивая нулю свободный член многочлена $\Psi(x_1)$, мы получаем уравнение на c_0. Вид уравнения не важен, важно лишь то, что в нем ненулевой коэффициент при мономе c_0^{ad}, а потому оно разрешимо в $\mathbf{k}$. Наконец, заметим, что после подстановки найденного c_0 коэффициент в $\Psi(x_1)$ при $x_1^{ad}=x_1^{\alpha}$ не обнуляется, а потому

$$\operatorname{ord}G_1(x_1,0)\leqslant\operatorname{ord}G(x,0)=\alpha.$$

Введем числа $\alpha_i=\operatorname{ord}G_i(x_i,0)$. Рассуждение, приведенное выше, которое легко обобщается на случай любого i, показывает, что

$$\alpha=\alpha_0\geqslant\alpha_1\geqslant\cdots\geqslant\alpha_i\geqslant\cdots.$$

Ключевым местом в доказательстве является следующее утверждение: если $a_i>1$, то $\alpha_i>\alpha_{i+1}$. Именно здесь в [9] используется то, что характеристика базового поля равна 0. Мы же воспользуемся тем, что $\alpha<p$.

Сперва проверим это утверждение в случае $i = 0$. Пусть $\alpha = \alpha_0 = \alpha_1$. Это означает, что многочлен $\Psi(x_1)$ на самом деле не содержит мономов, отличных от x_1^α. Очевидно, это влечет $a = 1$.

Чтобы распространить то же самое рассуждение на все i, достаточно показать, что $\alpha_i < p$. Но это очевидно в силу того, что последовательность α_i нестрого убывает.

Числа a_i были делителями α_i, которые меньше p, а потому и $n = a_0 \cdots a_{i_0}$ не делится на p. □

Следствие 4. *Указанное в лемме* 6 *число* n *не превосходит* $(p-1)^p$.

Доказательство. В обозначениях предыдущего доказательства

$$\{i\colon a_i > 1\} \subset \{i\colon \alpha_i > \alpha_{i+1}\},$$

а последнее множество содержит не более α элементов. В то же время

$$n = a_0 \cdots a_{i_0} \leqslant (p-1)^\alpha < (p-1)^p.$$

□

Лемма 7. *Ряд* $G(x,y)$, *которому соответствует* p-*простой многоугольник Ньютона, приводим тогда и только тогда, когда найдутся натуральное* $n < (p-1)^p$ *и ряд* $\varphi \in \mathbf{k}[[t]]$, *такие что* $p \nmid n$ *и*

$$G(\varphi(t), t^n) = 0.$$

Доказательство. Напомним, что по определению p-простого многоугольника Ньютона

$$G(x,y) = x^p + y^\beta + \cdots .$$

Пусть ряд $G(x,y)$ приводим. Рассмотрим один его неприводимый сомножитель $H(x,y)$. По очевидным соображениям

$$\overline{\mathcal{N}}(H) \subset \overline{\mathcal{N}}(G),$$

а потому $\deg_x H(x,0) < \deg_x G(x,0) = p$. Выберем ребро многоугольника Ньютона ряда H, лежащее на границе $\overline{\mathcal{N}}(H)$. К уравнению

$$H(x,y) = 0$$

можно применить алгоритм Пьюизо, т.е. лемму 6. В результате получим решение этого уравнения в виде

$$y = t^n, \quad x = \varphi(t),$$

где $p \nmid n$.

Обратно, пусть
$$G(\varphi(t), t^n) = 0.$$
Рассмотрим поле $L = \mathbf{k}((t))$ как расширение поля $K = \mathbf{k}((y))$, заданное уравнением $t^n - y = 0$. Это сепарабельное расширение степени n. Поскольку $p \nmid n$ и $\mathbf{k}$ алгебраически замкнуто, в $\mathbf{k}$ есть n различных корней степени n из единицы, а потому и уравнение $t^n - y = 0$ имеет n различных корней. Тем самым показано, что расширение L/K является нормальным.

Поскольку $G(x, y)$ является x-общим порядка p, к нему можно применить подготовительную лемму Вейерштрасса:
$$G(x, y) = U(x, y)\left(x^p + c_{p-1}(y)x^{p-1} + \cdots + c_0(y)\right),$$
где $U(x, y) \in \mathbf{k}[[x, y]]^*$. Рассмотрим ряд
$$H(x, t) = G(x, t^n).$$
Из разложения выше следует, что
$$H(x, t) = \widetilde{U}(x, t)\left(x^p + c_{p-1}(t)x^{p-1} + \cdots + c_0(t)\right),$$
где $\widetilde{U}(x, t) \in \mathbf{k}[[x, t]]^*$. Многочлен в правой части с коэффициентами из K по предположению имеет корень $\varphi(t) \in L$. Пусть $\varphi_1 = \varphi, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ – образы φ под действием $\mathrm{Gal}(L/K)$. Все они являются корнями многочлена
$$P(x) = x^p + c_{p-1}(y)x^{p-1} + \cdots + c_0(y),$$
а потому многочлен
$$Q(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \varphi_i(t))$$
делит $P(x)$. По построению $Q(x) \in K[x]$, т.е. все его коэффициенты суть рациональные функции от y, а потому после избавления от знаменателей можно считать, что $Q(x)$ делит $G(x, y)$. Ясно, что это собственный делитель. $\square$

§2. Дерево решений алгоритма Гамбургера–Нетера

Нам понадобятся некоторые обозначения, связанные с тем, как принимается решение о продолжении или остановке процесса Гамбургера–Нетера.

На каждом шаге алгоритма Гамбургера–Нетера для текущего уравнения строится многоугольник Ньютона, в нем выбирается ребро (для определенности будем считать, что выбирается ребро, одна вершина которого лежит на оси OY) и в соответствии с тем, какие вершины у этого ребра, делается соответствующая замена переменных.

Рассмотрим множество всех полумодельных x-общих порядка p, y-общих какого-либо конечного порядка рядов с едиными T и R, которым соответствует p-простой многоугольник Ньютона. Обозначим это множество через $\widehat{\mathcal{U}}$. В нем выделим подмножество $\mathcal{U}$, состоящее из неприводимых рядов. Выше мы вводили различные обозначения, связанные с фиксированным неприводимым рядом G: β, M, N, h, ν, μ, X, Y. Далее мы будем писать $\beta[G]$, $M[G]$, $N[G]$, $h[G]$, $\nu[G]$, $\mu[G]$, $X[G]$, $Y[G]$. Для всякого $G \in \widehat{\mathcal{U}}$ положим

$$\Phi(G) = \begin{cases} \operatorname{ord} Y[G]', & G \text{ неприводим}, \\ 0, & \text{иначе}. \end{cases}$$

Теперь рассмотрим алгоритм Гамбургера–Нетера. Положим

$$\mathcal{V}_\beta = \{G \in \mathcal{U} \colon \beta[G] \geqslant \beta\},$$
$$\mathcal{U}_\beta = \mathcal{V}_\beta \setminus \mathcal{V}_{\beta+1}.$$

На первом шаге по очереди для каждого натурального β проверяется: верно ли, что $G \in \mathcal{V}_\beta$. Заметим, что каждой такой проверке соответствует ровно один многочлен P_β с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ от коэффициентов ряда G, т.е. на самом деле

$$\mathcal{U}_\beta = \{G \in \mathcal{V}_\beta \colon P_\beta(G) \neq 0\}.$$

В данном случае многочлен имеет простой вид: $P_\beta = g_{0,\beta}$, где $g_{i,j}$ – коэффициенты ряда G.

Рассмотрим множество целых точек

$$\widehat{\mathfrak{D}} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon \xi \geqslant 0, 0 \leqslant \eta \leqslant p\}.$$

В нем рассмотрим подмножество точек в треугольнике с вершинами $A = (0, p)$, $B = (0, 0)$, $C = (p, 0)$ с исключенными вершинами A и B:

$$\mathfrak{D} = \{(\xi, \eta) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon 0 \leqslant \xi, \eta \leqslant p, \xi + \eta \leqslant p\} \setminus \{(0, p), (0, 0)\} \subset \widehat{\mathfrak{D}}.$$

Также рассмотрим его подмножество, состоящее из точек на ребрах AB и BC:

$$\mathfrak{D}_0 = \{(0, p-1), (0, p-2), \ldots, (0, 1), (1, 0), \ldots, (p, 0)\} \subset \mathfrak{D}.$$

На рис. 4 светло-серым показана область, содержащая $\widehat{\mathfrak{D}} \setminus \mathfrak{D}$, темно-серым выделена область, содержащая $\mathfrak{D}$, чёрные точки соответствуют множеству $\mathfrak{D}_0$.

Введем порядок на множестве $\widehat{\mathfrak{D}}$ следующим образом:

$$Q_1 \succ Q_2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \widehat{BAQ_1} > \widehat{BAQ_2}, \\ \widehat{BAQ_1} = \widehat{BAQ_2}, |AQ_1| > |AQ_2| \end{array} \right.$$

Такое отношение порядка можно сузить на $\mathfrak{D}$ и $\mathfrak{D}_0$. В обоих множествах при этом есть наибольший элемент C, для любого элемента $Q \neq C$ корректно определен следующий за ним элемент Q'. На рис. 5 показан пример, когда $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3$.

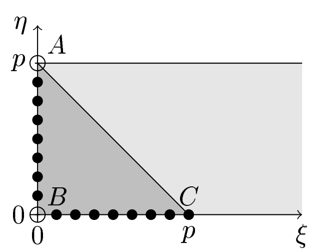

Рис. 4. Множества $\widehat{\mathfrak{D}} \supset \mathfrak{D} \supset \mathfrak{D}_0$.

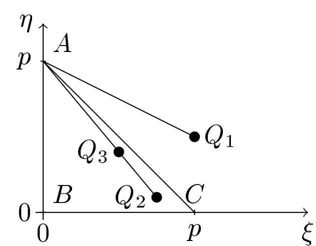

Рис. 5. Порядок на множестве $\widehat{\mathfrak{D}}$, $Q_1 \succ Q_2 \succ Q_3$.

Для точки $Q \in \widehat{\mathfrak{D}}$ мы будем называть ее проекцией точку $\min(Q, C) \in \mathfrak{D}$. Проекция является монотонным отображением из $\widehat{\mathfrak{D}}$ в $\mathfrak{D}$.

Если $G \in \mathcal{U}_\beta$, $p \nmid \beta$, то по теореме 1 мы знаем, чему равно $\Phi(G)$. Если же $p \mid \beta$, то необходимо применить подготовительную лемму Вейерштрасса, сделать замену $x = y^q x_1$, после чего вычислить $a_{0,1}$ и сделать замену $y = (a_{0,1} + y_1)x_1$. Обозначим через $(\xi_1[G], \eta_1[G])$ проекцию из $\widehat{\mathfrak{D}}$ на $\mathfrak{D}$ вершины, ближайшей к A в многоугольнике Ньютона полученного ряда (в смысле порядка $\succ$, определенного выше). Напомним, что уравнение принимает вид, описанный в формуле (2), поэтому в множестве $\widehat{\mathfrak{D}}$ действительно есть вершины многоугольника Ньютона. Если вершина $(\xi_1[G], \eta_1[G])$ не лежит в $\mathfrak{D}$, то $(\xi_1[G], \eta_1[G]) = C$. Более того, поскольку исходный ряд G был неприводим, то $(\xi_1[G], \eta_1[G]) \in \mathfrak{D}_0$. На самом деле для неприводимого ряда

$$(\xi_1[G],\eta_1[G]) = \begin{cases} (0,\mu[G]), & \text{если} \quad h[G]=1, \mu[G]<p, \\ (\nu[G],0), & \text{если} \quad h[G]=1, \nu[G]<p, \\ (p,0), & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для всех точек (ξ_1,η_1) в множестве $\mathfrak{D}$, упорядоченных так, как сказано выше, можем рассмотреть

$$\mathcal{V}^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1} = \{G \in \mathcal{U}_\beta \colon (\xi_1[G],\eta_1[G]) \succeq (\xi_1,\eta_1)\}.$$

При таком порядке пара $(p,0)$ оказывается наибольшей (среди всех рассматриваемых). Если обозначить через (ξ_1',η_1') следующую за (ξ_1,η_1) точку в $\mathfrak{D}$ (такая есть всегда кроме случая $(p,0)$), то можно определить

$$\mathcal{U}^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1} = \mathcal{V}^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1} \setminus \mathcal{V}^{(1)}_{\beta,\xi_1',\eta_1'} = \{G \in \mathcal{V}^{(1)}_{\beta,1\xi_1,\eta_1} : \xi_1[G]=\xi_1, \eta_1[G]=\eta_1\}.$$

Для единообразия обозначений будем полагать

$$\mathcal{U}^{(1)}_{\beta,p,0} = \mathcal{V}^{(1)}_{\beta,p,0}.$$

С множеством $\mathcal{U}^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1}$ можно связать многочлен $P^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1}$ от коэффициентов G, который характеризует это множество:

$$\mathcal{U}^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1} = \{G \in \mathcal{V}^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1} : P^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1}(G) \neq 0\}.$$

Действительно, рассмотрим коэффициент с номером (ξ_1,η_1) в ряду, получившемся из ряда G после нескольких соответствующих шагов алгоритма. Обозначим его через $g^{[1]}_{\xi_1,\eta_1}$. Согласно формуле (4) этот коэффициент выражается через коэффициенты исходного ряда G и число $a_{0,1}$. Присоединив к $\mathbb{F}_p$ достаточное количество коэффициентов ряда G, мы увидим, что $a_{0,1}$ является алгебраическим над получившимся расширением $\mathbb{F}_p$. Тогда и $g^{[1]}_{\xi_1,\eta_1}$ является алгебраическим элементом над этим же расширением. Запишем его минимальный многочлен. Свободный коэффициент этого многочлена является многочленом от коэффициентов исходного ряда G. Его мы и обозначим через $P^{(1)}_{\beta,\xi_1,\eta_1}$.

Если $(\xi_1[G],\eta_1[G]) = (p,0)$, то необходимо продолжать процесс: вычислять $a_{0,2}$ и делать соответствующую замену переменных. Обозначим через $(\xi_2[G],\eta_2[G])$ ближайшую к $(0,p)$ вершину в многоугольнике Ньютона получившегося ряда (снова положив ее равной $(p,0)$, если она не попала в D). Абсолютно аналогичным образом определяются множества

$$\mathcal{V}^{(2)}_{\beta,\xi_2,\eta_2} = \{G \in \mathcal{V}^{(1)}_{\beta,p,0} \colon (\xi_2[G],\eta_2[G]) \succeq (\xi_2,\eta_2)\},$$
$$\mathcal{U}^{(2)}_{\beta,\xi_2,\eta_2} = \mathcal{V}^{(2)}_{\beta,\xi_2,\eta_2} \setminus \mathcal{V}^{(2)}_{\beta,\xi_2',\eta_2'}.$$

Аналогичные рассуждения позволяют построить многочлены $P^{(2)}_{\beta,\xi_2,\eta_2}$, характеризующие $\mathcal{U}^{(2)}_{\beta,\xi_2,\eta_2}$.

Продолжая процесс, на h-м шаге мы получим набор множеств $\mathcal{V}^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$, $\mathcal{U}^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$ и многочленов $P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$ (индексы у ξ и η специально опущены). Остается пояснить конечность процесса. Согласно теореме 3, при фиксированном β найдется число $h(\beta)$, такое что после не более чем $h(\beta)$ замен вида $y=(a+y')x$ многоугольник Ньютона получившегося ряда будет иметь вершину, отличную от $(0,p)$ и $(p,0)$. Число $h(\beta)$, как было отмечено, зависит только от β, T и R, но мы рассматриваем полумодельные ряды с фиксированными T и R. Поэтому можно считать, что множества $\mathcal{V}^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$ определены только при $h \leqslant h(\beta)$.

Включения множеств можно изобразить следующим образом:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{V}_1 & \cdots \arrow[l] & \mathcal{V}_p \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & & & \\
\mathcal{U}_1 \arrow[u, dashed] & \cdots & \mathcal{U}_p \arrow[u, dashed] \arrow[d, equal] & \cdots & & & \\
& & \mathcal{V}^{(1)}_{p,0,p-1} & \mathcal{V}^{(1)}_{p,0,p-2} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & \mathcal{V}^{(1)}_{p,1,0} \arrow[l] & \cdots \arrow[l] \\
& & \mathcal{U}^{(1)}_{p,0,p-1} \arrow[u, dashed] & \mathcal{U}^{(1)}_{p,0,p-2} \arrow[u, dashed] & \cdots & \mathcal{U}^{(1)}_{p,1,0} \arrow[u, dashed] &
\end{tikzcd} \qquad (6)$$

Стрелки соответствуют включениям множеств, каждое множество является дизъюнктным объединением множеств, из которых в данное направлены стрелки. Пунктирные стрелки подразумевают, что соответствующее подмножество определяется соотношением $P \neq 0$, где P – многочлен с соответствующим номером. Как мы отмечали выше, при фиксированном β глубина алгоритма Гамбургера–Нетера ограничена, поэтому на самом деле у любой вершины $\mathcal{U}_\beta$ имеется лишь конечное число потомков.

Нам потребуется оценка для количества коэффициентов исходного ряда G, от которых зависит многочлен $P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$. Для краткости мы будем называть *радиусом зависимости* многочлена $P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$ число

$$\rho^{(h)}_{\beta,\xi,\eta} = \max\{i+j : P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta} \text{ зависит от } g_{i,j}\}.$$

Положим

$$\rho_\beta = \max_{h,\xi,\eta} \rho^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}.$$

Лемма 8. *Найдется положительное число N, зависящее только от T и R, такое что*

$$\rho_\beta \leqslant N\beta.$$

Доказательство. Рассмотрим многочлен $P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$. Он зависит от коэффициента с номером (ξ,η) ряда, получившегося из исходного на h-м шаге алгоритма Гамбургера–Нетера. Обозначим этот ряд через $G^{[h]}$. Его коэффициенты вычисляются через коэффициенты ряда $G^{[h-1]}$ по формулам (4). В частности, коэффициент с номером (ξ,η) в $G^{[h]}$ зависит от коэффициентов $G^{[h-1]}$ с номерами (i,j), для которых $i+j \leqslant \xi+\eta+p \leqslant 2p$. Продолжая это рассуждение по индукции, получим, что

$$\rho^{(h)}_{\beta,\nu,\mu} \leqslant 2ph.$$

Как отмечалось выше, $h \leqslant h(\beta)$, но последняя величина оценивалась как раз через β линейным образом, что ясно из следствия 3. $\square$

На множестве $\mathcal{V}_1$ можно ввести топологию Зарисского: замкнутыми называются множества общих нулей конечных систем многочленов от коэффициентов G (сами многочлены с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$). Несложно видеть, что сплошные стрелки на диаграмме (6) соответствуют замкнутым включениям, а пунктирные – открытым.

В заключение скажем, что на множестве $\mathcal{U}^{(h)}_{\beta,\xi,\eta}$ функция Φ постоянна, и ее значение можно найти из теоремы 1:

$$\begin{array}{lcll}
\Phi\big|_{\mathcal{U}_\beta} & = & T\beta + Rp - (p-1)(\beta-1), & p \nmid \beta \\
\Phi\big|_{\mathcal{U}^{(h)}_{\beta,\nu,p}} & = & T\beta + Rp - (p-1)(\beta + p(h-1) + \xi - 1), & p \mid \beta \\
\Phi\big|_{\mathcal{U}^{(h)}_{\beta,0,\mu}} & = & \mu - 1 \ (\mu < p), & p \mid \beta
\end{array} \qquad (7)$$

Определение. *Пусть D – топологическое пространство. Функция $f\colon D \to \mathbb{R}$ называется полунепрерывной снизу (сверху), если для любого $a \in \mathbb{R}$ множество $f^{-1}((-\infty, a])$ $(f^{-1}([a, +\infty)))$ замкнуто в D.*

Полунепрерывные снизу функции обладают следующими свойствами.

(1) Пусть f, g полунепрерывны снизу, α, β – неотрицательные вещественные числа. Тогда $\alpha f + \beta g$ полунепрерывна снизу.
(2) Пусть f, g полунепрерывны снизу, тогда $\max(f, g)$ полунепрерывна снизу.
(3) Пусть f полунепрерывна снизу, тогда $-f$ полунепрерывна сверху.

Теорема 2. *Пусть $p \mid \beta$. Тогда для любого $S \geqslant p - 1$ множество*

$$\{G \in \mathcal{U}_\beta \colon \Phi(G) > S\}$$

открыто в $\mathcal{U}_\beta$.

Доказательство. В теореме сформулировано свойство, довольно близкое к полунепрерывности функции Φ. Рассмотрим на $\mathcal{U}_\beta$ функцию

$$\Psi(G) = T\beta + Rp - (p-1)(\beta + p(h-1) + \nu - 1).$$

Покажем, что Ψ полунепрерывна снизу. Для этого достаточно проверить, что функция

$$H(G) = ph[G] + \nu[G]$$

полунепрерывна сверху на $\mathcal{U}_\beta$. Рассмотрим произвольное $z \in \mathbb{Z}$. Разделим z с остатком на p: $z = pz_1 + z_2$, $0 \leqslant z_2 < p$. Тогда

$$\{G \colon H(G) \geqslant z\} = \{P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta} = 0 \colon h \leqslant z_1 - 1\} \cup \{P^{(h)}_{\beta,\xi,\eta} = 0 \colon h \leqslant z_1, \nu \leqslant z_2\}$$

замкнуто в $\mathcal{U}_\beta$. Это доказывает полунепрерывность сверху функции H.

Таким образом, мы показали, что Ψ полунепрерывна снизу на $\mathcal{U}_\beta$. Теперь остается заметить, что в силу формулы (7) при $S \geqslant p - 1$

$$\{\Phi > S\} = \{\Psi > S\}.$$

Но последнее множество открыто в силу полунепрерывности снизу функции Ψ. □

Все вышесказанное относилось к множеству $\mathcal{U}$, которое состояло лишь из неприводимых полумодельных рядов. Теперь осталось охарактеризовать множество приводимых рядов $\widehat{\mathcal{U}} \setminus \mathcal{U}$.

Лемма 9. *Множество $\mathcal{U}$ открыто в $\widehat{\mathcal{U}}$ в смысле топологии Зарисского. Иными словами, существует набор многочленов $P_1, \ldots, P_N$ с коэффициентами из $\mathbb{F}_p$ от коэффициентов ряда G, таких что полумодельный ряд G с p-простым многоугольником Ньютона приводим тогда и только тогда, когда*

$$P_1(G) = \cdots = P_N(G) = 0.$$

Доказательство. Согласно лемме 7 ряд G приводим, если и только если найдется $n < (p-1)^p$, такое что ряд $H(x,t) = G(x,t^n)$ имеет нуль $x = \varphi(t)$. Для каждого натурального n от 1 до $(p-1)^p$, которое не делится на p, положим

$$H_n(x,t) = G(x,t^n).$$

Достаточно показать, что множество рядов G, для которых $H_n(x,t)$ (при фиксированном n) имеет нуль $x = \varphi(t)$, замкнуто. Коэффициенты H_n очевидным образом связаны с коэффициентами G, поэтому достаточно указать многочлены от коэффициентов H_n (они же автоматически будут многочленами от коэффициентов G). Таким образом, достаточно построить систему многочленов $\{P_i, 1 \leqslant i \leqslant N\}$, таких что $H(x,t)$ имеет нуль тогда и только тогда, когда $P_i(H) = 0$ для всех i.

Наличие решения $x = \varphi(t)$ означает, что если запустить процесс Гамбургера–Нетера для уравнения

$$H(x,t) = 0,$$

то на каждом шаге $v(x_i) \geqslant v(t)$, и все замены имеют вид $x_i = (a_i + x_{i+1})t$ (разумеется, $x_0 = x$). Поскольку $\mathcal{N}(G)$ был прост (это следует из полумодельности благодаря лемме 1), то таким же будет и $\mathcal{N}(H)$, с той лишь разницей, что $\mathcal{N}(H)$ будет состоять из вершин $(p,0)$ и $(0,n\beta)$, где $\beta = \deg_y G(0,y)$.

Опишем более подробно процесс Гамбургера–Нетера для ряда $H(x,t)$. Прежде всего отметим, что

$$\frac{\partial}{\partial x} H(x,t) = \frac{\partial}{\partial x} G(x,t^n) = \widetilde{\gamma}(x,t) x^T t^{nR}.$$

Пусть $x_0 = x$, $H^{[0]}(x_0,t) = H(x,t)$. Процесс состоит в проведении замен вида $x_i = (a_{i+1} + x_{i+1})t$ и сокращении на некоторую степень t. В процессе получаются ряды

$$H^{[i+1]}(x_{i+1},t) = t^{-s_i} H^{[i]}((a_{i+1} + x_{i+1})t, t).$$

Так будет продолжаться пока $v(x_i) \geqslant v(t)$. Нам требуется построить систему многочленов, которая обнуляется, если и только если неравенство для нормирований будет выполнено всегда.

Как мы видели, последовательность чисел $\operatorname{ord} H^{[i]}(x_i, 0)$ нестрого убывает. Изначально ряд H был x-общим порядка p, а потому наступит момент, в который $\operatorname{ord} H^{[i]}(x_i, 0)$ станет меньше p. После этого делается не более чем $(p-1)^p$ замен, после которых ряд обязан стать x_i-общим порядка 1. Обозначим через k номер, такой что $\operatorname{ord} H^{[k]}(x_k, 0) = p$, но $\operatorname{ord} H^{[k+1]}(x_{k+1}, 0) < p$. Выясним, насколько велико может быть k. Положим

$$\mathrm{d}H^{[i]}(x_i, t) = A_i(x_i, t)\mathrm{d}x_i + B_i(x_i, t)\mathrm{d}t.$$

По лемме 5

$$t^{pi}\mathrm{d}H^{[i]}(x_i, t) = \mathrm{d}H^{[0]}(x_0, t) = \mathrm{d}H(x, t). \tag{8}$$

Поскольку

$$x = x_0 = a_1 t + a_2 t^2 + \cdots + a_i t^i + x_i t^i,$$

имеем

$$\mathrm{d}x = (a_1 + 2a_2 t + \cdots + i a_i t^{i-1} + i x_i t^{i-1})\mathrm{d}t + t^i \mathrm{d}x_i.$$

Подставляя это в (8), получаем, что

$$\begin{aligned} &t^{pi} A_i(x_i, t)\mathrm{d}x_i + t^{pi} B_i(x_i, t)\mathrm{d}t \\ &= A_0(x, t)\left((a_1 + 2a_2 t + \cdots + i a_i t^{i-1} + i x_i t^{i-1})\mathrm{d}t + t^i \mathrm{d}x_i\right) + B_0(x, t)\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при $\mathrm{d}x_i$, видим, что

$$t^{(p-1)i} A_i(x_i, t) = A_0(x, t).$$

Остается вспомнить, что

$$A_0(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} H(x, t) = \widetilde{\gamma}(x, t) x^T t^{nR}.$$

Следовательно, $(p-1)i \leqslant nR$. Мы хотели получить оценку на число k. Из этих рассуждений вытекает, что $k < \frac{nR}{p-1}$.

Наконец, мы можем указать требуемую систему многочленов. Пусть

$$H^{[i]}(x_i, t) = \sum_{r,s \geqslant 0} h^{[i]}_{r,s} x_i^r t^s.$$

Пусть $H^{[i]}$ является x_i-общим порядка хотя бы r. Тогда условие $v(x_i) \geqslant v(t)$ равносильно тому, что

$$h^{[i]}_{r,0} \neq 0 \Rightarrow \left(h^{[i]}_{r_1,s_1} = 0 \quad \forall r_1 + s_1 < r\right).$$

Это условие можно переформулировать так:

$$h_{r,0}^{[i]} h_{r_1,s_1}^{[i]} = 0 \quad \forall r_1 + s_1 < r.$$

Последнее суть набор многочленов от коэффициентов ряда H.

Множество рядов H, для которых $H^{[i]}$ является x_i-общим порядка хотя бы r, также замкнуто. Действительно, это множество определяется набором уравнений

$$\begin{cases} h_{1,0}^{[j]} = h_{2,0}^{[j]} = \cdots = h_{p-1,0}^{[j]} = 0, \quad j < i \\ h_{1,0}^{[i]} = \cdots = h_{r-1,0}^{[i]} = 0. \end{cases} \qquad \square$$

§3. Ветвление в простом расширении

Сначала нам потребуется определить понятие скачка ветвления для конечных сепарабельных расширений полных дискретных нормированных полей, которые не являются расширениями Галуа. Основные понятия для расширений Галуа подробно рассмотрены в [6].

Определение. *Пусть L/K – сепарабельное расширение. Пусть M – нормальное замыкание поля L. Пусть $\varphi_{M/L}$ и $\varphi_{M/K}$ – функции Эрбрана расширений M/L и M/K соответственно, $\psi_{M/L}$ и $\psi_{M/K}$ – обратные к ним. Положим*

$$\psi_{L/K} = \psi_{M/L}^{-1} \circ \psi_{M/K}.$$

Скачками ветвления в расширении L/K будем называть точки разрыва производной $\psi_{L/K}$, т.е. такие числа h, что

$$\lim_{x \to h-0} \psi'_{L/K}(x) \neq \lim_{x \to h+0} \psi'_{L/K}(x).$$

Определение корректно, т.е. функция $\psi_{L/K}$ не зависит от выбора нормального расширения M/L и в случае, когда L/K нормально, совпадает с классическим определением функций Эрбрана.

Рассмотрим расширение полей вида $\mathbf{k}((x))/\mathbf{k}((f(x)))$, где $f \in \mathbf{k}[[x]]$ – произвольный необратимый ряд. Положим $L = \mathbf{k}((x))$, $K = \mathbf{k}((f(x)))$.

Предложение 1. *Степень расширения L/K равна порядку ряда f:*

$$[L : K] = \operatorname{ord} f.$$

Доказательство. Положим $b = \operatorname{ord} f$. Пусть $y = f(x)$ – новая переменная, т.е. $K = \mathbf{k}((y))$. Тогда L получается присоединением к K

новой переменной x, заданной уравнением $y = f(x)$. По подготовительной лемме Вейерштрасса в $\mathbf{k}[[x,y]]$ имеем равенство

$$y - f(x) = U(x,y)\left(x^b - \alpha_1(y)x^{b-1} - \cdots - \alpha_b(y)\right),$$

где коэффициенты $\alpha_i(y)$ определяются однозначно, а ряд $U(x,y)$ обратим. При этом все ряды целые, т.е. $\alpha_i(y) \in \mathbf{k}[[y]], U(x,y) \in \mathbf{k}[[x,y]]^*$.

Таким образом, новая переменная x задается уравнением

$$x^b - \alpha_1(y)x^{b-1} - \cdots - \alpha_b(y) = 0, \tag{9}$$

откуда $[L : K] \leqslant b$. Чтобы проверить равенство, нужно убедиться в неприводимости полученного многочлена. Предположим противное: пусть многочлен в правой части приводим в $K[x]$. Обозначим сомножители через $p_1(x,y)$, $p_2(x,y)$. По лемме Гаусса можно считать, что эти многочлены имеют целые по y коэффициенты (т.е. из $\mathbf{k}[[y]]$). Тогда в $\mathbf{k}[[x,y]]$ имеем равенство

$$y - f(x) = U(x,y)p_1(x,y)p_2(x,y).$$

Итого, осталось убедиться в неприводимости ряда $y - f(x)$. Пусть это не так, и пусть

$$y - f(x) = q_1(x,y)q_2(x,y),$$
$$q_1(x,y) = \sum_{k=0}^{\infty}\beta_k(x)y^k, \quad q_2(x,y) = \sum_{l=0}^{\infty}\gamma_l(x)y^l.$$

После перемножения получаем, что

$$\beta_0(x)\gamma_0(x) = f(x), \quad \beta_0(x)\gamma_1(x) + \beta_1(x)\gamma_0(x) = 1.$$

Из второго соотношения видно, что β_0 и γ_0 порождают единичный идеал в кольце $\mathbf{k}[[x]]$, поэтому ровно один из них делится на x^b, а второй не делится на x. Не умаляя общности, считаем, что $\beta_0(x)$ не делится на x, т.е. обратим в $\mathbf{k}[[x]]$. Но тогда $q_1(x,y)$ обратим в $\mathbf{k}[[x,y]]$. $\square$

Далее будем рассматривать сепарабельное расширение степени p (степень совпадает с характеристикой базового поля).

Предложение 2. *Расширение $\mathbf{k}((x))/\mathbf{k}((f(x)))$ не сепарабельно тогда и только тогда, когда найдется $\widehat{f} \in \mathbf{k}[[t]]$, такой что $f(x) = \widehat{f}(x^p)$.*

Доказательство. Пусть $f(x) = x^p g(x)$, где $g(x) = a_0 + a_1 x + \cdots$ – обратимый ряд. Нам придется воспроизвести процедуру нахождения коэффициентов $\alpha_i(y)$ в подготовительной лемме Вейерштрасса, т.е. фактически повторить ее доказательство.

Далее работаем в кольце $R[[x]]$, где $R = \mathbf{k}[[y]]$. Рассмотрим R-линейный оператор $H : R[[x]] \to R[[x]]$, задаваемый по формуле

$$H(w_0 + w_1 x + \cdots) = w_p + w_{p+1} x + \cdots .$$

Этот оператор отрезает начало ряда (по p-й член не включительно) и делит ряд на x^p. Мы хотим добиться равенства

$$\begin{gathered} y - f(x) = U(x,y)\left(x^p - \alpha_1(y)x^{p-1} - \cdots - \alpha_p(y)\right) \Leftrightarrow \\ x^p = U(x,y)^{-1}(y - x^p g(x)) + \alpha_1(y)x^{p-1} + \cdots + \alpha_p(y). \end{gathered}$$

Применим к обеим частям уравнения оператор H. Заранее скажем, что в уравнении в качестве неизвестной останется лишь ряд U. Коэффициенты α_i после нахождения U определяются однозначно, этим мы займемся позже. Пусть $V(x,y) = U(x,y)^{-1}$. Итак, после применения H получаем

$$1 = yH(V) - Vg.$$

Обозначим $g(x)^{-1}$ через $h(x)$. Тогда уравнение переписывается в виде, пригодном для итераций:

$$\begin{aligned} V = -h + yhH(V) = -h + yhH(-h + yhH(V)) = \\ = -h - yhH(h) + y^2 hH(hH(V)) = \cdots . \end{aligned}$$

Несложно видеть, что коэффициенты при y^k (с точностью до знака) образуются по следующему правилу:

$$\sigma_0 = h, \qquad \sigma_1 = hH(h), \quad \sigma_k = hH(\sigma_{k-1}).$$

Окончательно получаем, что

$$V(x,y) = -\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(x) y^k.$$

Теперь вспомним и перепишем исходное уравнение (которое было еще до применения оператора H):

$$x^p(1 + V(x,y)g(x)) - V(x,y)y = \alpha_1(y)x^{p-1} + \cdots + \alpha_p(y).$$

Последнее равенство можно профакторизовать по (x^p), т.е. рассмотреть его в $R[[x]]/(x^p)$; образ переменной x в факторе обозначим через $\bar{x}$. Получим, что

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sigma_k(\bar{x}) y^{k+1} = \alpha_1(y)\bar{x}^{p-1} + \cdots + \alpha_p(y).$$

Расширение L/K не сепарабельно, если и только если все $\alpha_i(y) = 0$ при $1 \leqslant i < p$. В нашем случае это означает, что $\sigma_k(\bar{x}) = \sigma_k \in \mathbf{k}$. Выразим коэффициенты $\sigma_k(\bar{x})$ через коэффициенты ряда $h(x)$ (напомним, что $h(x)g(x) = 1$, поэтому коэффициенты h выражаются через $f(x) = x^p g(x)$). Пусть

$$h(x) = b_0 + b_1 x + \cdots, \quad \sigma_k(\bar{x}) = c_0^{(k)} + c_1^{(k)}\bar{x} + \cdots + c_{p-1}^{(k)}\bar{x}^{p-1}.$$

Условием несепарабельности является набор уравнений $c_i^{(k)} = 0$ при всех $k = 0, 1, \ldots$ и всех $i = 1, \ldots, p-1$. $\sigma_0(x) = h(x)$, поэтому $c_i^{(0)} = b_i$, откуда имеем

$$b_1 = \cdots = b_{p-1} = 0, \quad h(x) = b_0 + x^p h_1(x).$$

Далее,

$$\sigma_1(x) = h(x)H(h(x)) = (b_0 + x^p h_1(x))h_1(x) \Rightarrow$$
$$\sigma_1(\bar{x}) = b_0 h_1(\bar{x}) = b_0\left(b_p + b_{p+1}\bar{x} + \cdots + b_{2p-1}\bar{x}^{p-1}\right),$$

откуда $c_i^{(1)} = b_{p+i}$, и, значит,

$$b_{p+1} = \cdots = b_{2p-1} = 0.$$

Продолжая процесс, на каждом шаге будем получать, что $b_{kp+1} = \cdots = b_{kp+p-1} = 0$, т.е. в конечном итоге $h(x) = \varphi(x^p)$, что равносильно тому, что исходный ряд $f(x)$ являлся рядом от x^p. □

Если расширение степени p сепарабельно, можно говорить о (единственном) скачке ветвления в указанном выше смысле. Мы будем далее обозначать его через $h_{L/K}$.

Следующий факт относится к математическому фольклору (см. также [7]).

Теорема 3. *Пусть* $L = \mathbf{k}((x))$, $K = \mathbf{k}((f(x)))$, *где* $f \in \mathbf{k}[[t]]$ – *ряд порядка* p, *не являющийся рядом от* x^p. *Пусть* $N(f) = 1 + \operatorname{ord} f'(t)$.

Тогда скачок ветвления в расширении L/K единственен и равен

$$h_{L/K} = \frac{N(f) - p}{p - 1}.$$

Заметим, что если расширение L/K является расширением Галуа, то это число должно быть целым. Также отметим, что $N(f)$ является наименьшим не кратным p показателем монома, входящего в f с ненулевым коэффициентом, т.е. если $f = \sum c_i t^i$, то

$$N(f) = \min\{i\colon c_i \neq 0, p \nmid i\}.$$

§4. Ветвление в модельном расширении

Рассмотрим вложение колец $\mathbf{k}[[t,u]] \hookrightarrow \mathbf{k}[[x,y]]$. Такое вложение определяется двумя рядами $t(x,y)$ и $u(x,y)$. Вложению колец соответствует расширение полей L/K, где $L = \mathbf{k}((x))((y))$, $K = \mathbf{k}((t))((u))$. Следуя [5], мы рассмотрим специальный класс таких вложений.

Определение. *Расширение L/K называется модельным, если*

(1) $t(x,y) = \delta(x,y)x^a$, *где $\delta(x,y)$ – обратимый ряд;*
(2) $u(x,y) \equiv \varepsilon(y)y^b \pmod{x}$, *где $\varepsilon(y)$ – обратимый ряд;*

где $a, b \geqslant 0$, b – целая неотрицательная степень p.

Мы также добавим в определение модельности специальное ограничение: $J = \det\begin{pmatrix} t_x & t_y \\ u_x & u_y \end{pmatrix} = \gamma(x,y)x^T$, где $\gamma(x,y)$ – обратимый ряд, $T \geqslant 0$.

Положим $\mathcal{X} = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[[t,u]]$, $\mathcal{Y} = \operatorname{Spec} \mathbf{k}[[x,y]]$. Вложению колец соответствует эпиморфизм двумерных схем

$$\mathcal{Y} \twoheadrightarrow \mathcal{X}.$$

Мы будем рассматривать модельные расширения степени p, т.е. те, для которых $ab = p$. Обозначим через $\mathcal{R}_1$ и $\mathcal{R}_2$ дивизоры, отвечающие локальным параметрам (ниже уточним, каким именно). Модельные расширения степени p, тем самым, бывают двух видов:

- $a = p$, $b = 1$. В этом случае $\mathcal{R}_1$ локально задается уравнением $u = 0$, $\mathcal{R}_2$ задается уравнением $t = 0$.
- $a = 1$, $b = p$. В этом случае $\mathcal{R}_1$ локально задается уравнением $t = 0$, $\mathcal{R}_2$ задается уравнением $u = 0$.

В обоих случаях мы будем рассматривать неособые кривые на схеме $\mathcal{X}$, проходящие через $(0,0)$, которые трансверсально пересекают дивизор $\mathcal{R}_1$. Введем обозначения для множеств таких кривых. Для каждого натурального числа r обозначим через T_r множество регулярных кривых $\mathcal{C}$ на $\mathcal{X}$, проходящих через $(0,0)$, таких что $(\mathcal{C}.\mathcal{R}_1)=1$, $(\mathcal{C}.\mathcal{R}_2)=r$.

Определение. *Пусть $\mathcal{C}$ – неприводимая кривая на $\mathcal{X}$. Струей порядка n называется множество всех неприводимых кривых на $\mathcal{X}$, таких что индекс их пересечения с $\mathcal{C}$ не меньше $n+1$:*

$$J_n(\mathcal{C})=\{\mathcal{C}'\colon (\mathcal{C}'.\mathcal{C})\geqslant n+1\}$$

Обозначим через $T_{r,n}$ множество струй порядка n кривых из множества T_r:

$$T_{r,n}=\{J_n(\mathcal{C})\colon \mathcal{C}\in T_r\}.$$

Определим скачок ветвления как функцию кривой на $\mathcal{X}$. Пусть $\mathcal{C}$ – неприводимая регулярная кривая на $\mathcal{X}$, проходящая через $(0,0)$. Рассмотрим ее прообраз на схеме $\mathcal{Y}$, обозначим его через $\mathcal{C}'$. Если эта кривая окажется приводимой, положим скачок ветвления $h_{\mathcal{C}}(L/K)$ равным нулю. Если же $\mathcal{C}'$ неприводима, рассмотрим ее разрешение особенности в $(0,0)$. Пусть $\mathcal{C}''$ – строгий прообраз $\mathcal{C}'$ при этом разрешении особенности. Пусть L_1 – поле функций на кривой $\mathcal{C}''$, K_1 – поле функций на исходной кривой $\mathcal{C}$. Расширение L_1/K_1 может не быть расширением Галуа, но обязано быть сепарабельным расширением степени p, поэтому для этого расширения определен (вероятно, нецелый) скачок ветвления. Его мы обозначим за $h_{\mathcal{C}}(L/K)$. Таким образом, для каждого натурального r скачок ветвления является функцией

$$h_{\cdot}(L/K)\colon T_r\longrightarrow \frac{1}{p-1}\mathbb{Z}.$$

Чтобы сформулировать свойства скачка ветвления, нам потребуется ввести структуру аффинного пространства на множестве $T_{r,n}$. Для этого рассмотрим подробнее модельные расширения.

• $a=p$, $b=1$. В этом случае не умаляя общности можно считать, что расширение задается уравнениями

$$\begin{aligned} t(x,y)&=\delta(x,y)x^p,\\ u(x,y)&=y. \end{aligned}$$

Условие на якобиан означает, что

$$\frac{\partial}{\partial x} t(x,y) = \gamma(x,y) x^T.$$

Дивизоры при этом задаются уравнениями $\mathcal{R}_1 \colon u = 0$, $\mathcal{R}_2 \colon t = 0$. Рассмотрим кривую $\mathcal{C} \in T_r$. Ей соответствует простой идеал высоты 1 в $\mathbf{k}[[t,u]]$. Такой идеал является главным, т.е. кривая задается просто одним уравнением. Поскольку $(\mathcal{C}.\mathcal{R}_1) = 1$, это уравнение в силу подготовительной леммы Вейерштрасса можно представить в виде $t - f_{\mathcal{C}}(u) = 0$. Условие $(\mathcal{C}, \mathcal{R}_2) = r$ означает, что $\operatorname{ord} f_{\mathcal{C}}(u) = r$. Тогда уравнение кривой $\mathcal{C}'$ на $\mathcal{Y}$ имеет вид

$$G_{\mathcal{C}}(x,y) = t(x,y) - f_{\mathcal{C}}(y) = 0. \tag{10}$$

Тем самым множеству прообразов кривых T_r соответствует множество полумодельных x-общих порядка p y-общих порядка r рядов. Применяя к уравнению (10) алгоритм Гамбургера–Нетера, получаем параметризацию $x = X(\pi)$, $y = Y(\pi)$. Кольцо функций на кривой $\mathcal{C}''$ (если $\mathcal{C}'$ неприводима) есть $\mathbf{k}[[\pi]]$, а кольцо функций на кривой $\mathcal{C}$ есть $\mathbf{k}[[u]] = \mathbf{k}[[y]]$, поэтому расширение L_1/K_1 имеет вид $\mathbf{k}((\pi))/\mathbf{k}((Y(\pi)))$, откуда по теореме 3

$$h_{\mathcal{C}}(L/K) = \frac{1 + \operatorname{ord} Y'(\pi) - p}{p-1}. \tag{11}$$

Добавим также, что при таком выборе уравнения кривой две кривых $\mathcal{C}, \mathcal{D} \in T_r$ имеют индекс пересечения хотя бы $n+1$ в том и только том случае, если

$$f_{\mathcal{C}}(u) \equiv f_{\mathcal{D}}(u) \pmod{u^{n+1}}.$$

Пусть

$$f_{\mathcal{C}}(u) = f_1 u + f_2 u^2 + \cdots .$$

Тогда $J_n(\mathcal{C})$ на самом деле можно отождествить с набором $(f_1, \ldots, f_n)$. Тем самым, определено вложение

$$T_{r,n} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}.$$

Условие $(\mathcal{C}.\mathcal{R}_2) = r$ означает, что при описанном выше выборе уравнения кривой имеем $f_1 = \cdots = f_{r-1} = 0$, $f_r \neq 0$. Ясно, что эти условия описывают в точности $T_{r,n}$. Таким образом, $T_{r,n}$ является аффинным многообразием размерности $n - r + 1$ (здесь и далее мы будем считать $n > r$).

• $a = 1$, $b = p$. После применения подготовительной леммы Вейерштрасса можно считать, что расширение описывается уравнениями

$$\begin{aligned} t(x,y) &= x, \\ u(x,y) &= \varepsilon(y)y^p + \Theta(x,y)x. \end{aligned}$$

В силу условия на якобиан $\frac{\partial}{\partial y}u(x,y) = \gamma(x,y)x^T$. Из этого следует, что, во-первых, $\varepsilon'(y) = 0$, во-вторых, $\frac{\partial}{\partial y}\Theta(x,y) = \gamma(x,y)x^{T-1}$. В частности, $\varepsilon(y) = \widehat{\varepsilon}(y^p)$. Произвольная кривая $\mathcal{C} \in T_r$ в этом случае задается уравнением

$$u - f_{\mathcal{C}}(t) = 0,$$

кольцо функций на кривой $\mathcal{C}$ имеет вид $\mathbf{k}[[t]]$, ее прообраз $\mathcal{C}'$ задается уравнением

$$G_{\mathcal{C}}(x,y) = \widehat{\varepsilon}(y^p)y^p + x\Theta(x,y) - f_{\mathcal{C}}(x) = 0. \tag{12}$$

Применяя алгоритм Гамбургера–Нетера к уравнению (12), получаем параметризацию $x = X(\pi)$, $y = Y(\pi)$. Кольцо функций на кривой $\mathcal{C}''$ есть $\mathbf{k}[[\pi]]$, расширение L_1/K_1 имеет вид $\mathbf{k}((\pi))/\mathbf{k}((X(\pi)))$. В этом случае скачок ветвления по теореме 3 равен

$$h_{\mathcal{C}}(L/K) = \frac{1 + \operatorname{ord} X'(\pi) - p}{p - 1}. \tag{13}$$

Вложение $T_{r,n} \hookrightarrow \mathbb{A}^n_{\mathbf{k}}$ определяется абсолютно аналогично предыдущему случаю и обладает тем же свойством: $T_{r,n}$ оказывается аффинным многообразием размерности $n - r + 1$.

Теперь мы готовы перейти к основным теоремам о поведении скачка ветвления.

Теорема 4 (Существование достаточного порядка струи)**.** *Для любого $r \geqslant 1$ найдется s, такое что для любых $\mathcal{C} \in T_r$, $\mathcal{D} \in J_s(\mathcal{C})$*

$$h_{\mathcal{C}}(L/K) = h_{\mathcal{D}}(L/K).$$

Пусть $\mathrm{su}_{1,r}(L/K)$ – минимальное такое s. Тогда существует $N \geqslant 0$, такое что для любого r

$$\mathrm{su}_{1,r}(L/K) \leqslant Nr.$$

Доказательство. Начнем со случая $a = p, b = 1$. Итак, пусть дана неприводимая неособая кривая $\mathcal{C} \in T_r$ на поверхности $\mathcal{X}$, пусть $\mathcal{C}'$ – её прообраз на $\mathcal{Y}$. Кривая $\mathcal{C}'$ задается уравнением (10). Как отмечалось выше, ряд $G_{\mathcal{C}}(x,y)$ является x-общим порядка p и y-общим порядка r, поэтому по лемме 9 множество кривых $\mathcal{C}$, для которых $G_{\mathcal{C}}$ приводимо, замкнуто. Это тем более означает, что приводимость ряда $G_{\mathcal{C}}$ зависит лишь от конечного числа коэффициентов этого ряда. Тем самым, найдется s_1, такое что для любых $\mathcal{C} \in T_r$ и $\mathcal{D} \in J_{s_1}(\mathcal{C})$ из того, что $h_{\mathcal{C}}(L/K) = 0$, следует, что $h_{\mathcal{D}}(L/K) = 0$.

Случай кривых, прообраз которых неприводим, разбирается аналогично. В силу теоремы 2 и формулы (11) условие $h_{\mathcal{C}}(L/K) \geqslant \tau$ описывается неким набором многочленов от коэффициентов $G_{\mathcal{C}}(x,y)$ (для любого $\tau > 0$), а потому скачок зависит лишь от конечного числа коэффициентов в ряду $G_{\mathcal{C}}$. Потому можно указать s_2, такое что для любой кривой $\mathcal{C} \in T_r$ из того, что $\mathcal{D} \in J_{s_2}(\mathcal{C})$, следует, что $h_{\mathcal{C}}(L/K) = h_{\mathcal{D}}(L/K)$. Окончательно остается взять $s = \max(s_1, s_2)$.

Ограничение для $\mathrm{su}_{1,r}(L/K)$ непосредственно вытекает из леммы 8.

Случай $a = 1$, $b = p$ разбирается таким же образом, нужно только при применении утверждений из параграфа 2 поменять местами буквы x и y. Действительно, кривая $\mathcal{C}'$ задается уравнением (12). Поскольку $\widehat{\varepsilon}(y^p)$ обратим, ряд $G_{\mathcal{C}}(x,y)$ является y-общим порядка p. Приводимость этого ряда в силу леммы 9 зависит от конечного числа коэффициентов в уравнении кривой $\mathcal{C}$, а потому утверждение теоремы верно для случая $h_{\mathcal{C}} = 0$. Если же $\mathcal{C}'$ оказывается неприводимой, утверждение верно в силу теоремы 2. $\square$

Теорема 5 (Общее значение скачка ветвления)**.** *Величина*

$$h_r(L/K) = \sup\{h_{\mathcal{C}}(L/K) \colon \mathcal{C} \in T_r\}$$

конечна.

Доказательство. Достаточно рассматривать кривые, прообраз которых неприводим. Рассмотрим случай $a = p, b = 1$, когда $\mathcal{C}'$ задается уравнением (12). Скачок ветвления в этом случае вычисляется по формуле (11). В свою очередь, учитывая, что $R = 0$, по теореме 1

$$\operatorname{ord} Y'(\pi) \leqslant T\beta,$$

где $\beta = \operatorname{ord} G_{\mathcal{C}}(0,y) = \operatorname{ord} f_{\mathcal{C}}(y) = r$. Из этого вытекает ограниченность скачка ветвления.

Случай $a = 1, b = p$ рассматривается аналогично. Необходимо только отметить, что в этом случае

$$\beta = \operatorname{ord}\left(x\Theta(x,0) - f_{\mathcal{C}}(x)\right).$$

Необходимо пояснить зависимость β от r. Как говорилось выше, достаточно рассматривать кривые, прообраз которых неприводим. Это означает, что многоугольник Ньютона ряда $G_{\mathcal{C}}(x,y)$ должен быть прост. Заметим, что в этом многоугольнике есть точки $(0,p)$ и $(T,1)$. Вторая точка возникает из условия

$$\frac{\partial}{\partial y}\Theta(x,y) = \gamma(x,y)x^{T-1}.$$

Таким образом, если многоугольник Ньютона прост, то точка $(\beta,0)$ должна лежать внутри треугольника, высекаемого в первой четверти прямой, соединяющей точки $(0,p)$ и $(T,1)$. Это значит, что

$$\beta \leqslant \frac{Tp}{p-1}.$$

□

Пусть $n > \mathrm{su}_{1,r}(L/K)$. Тогда на множестве $T_{r,n}$ можно ввести топологию Зарисского, как было сказано выше.

Теорема 6 (Полунепрерывность снизу скачка ветвления)**.** *Пусть $n > \mathrm{su}_{1,r}(L/K)$. Тогда для любого $s \geqslant 0$ множество*

$$\{\mathcal{C} \in T_{r,n} \colon h_{\mathcal{C}}(L/K) \leqslant s\}$$

замкнуто в $T_{r,n}$.

Доказательство. Снова требуется разбирать два случая. Мы разберем случай $a = p$, $b = 1$. В силу формулы (11) имеем

$$h_{\mathcal{C}}(L/K) = \frac{\operatorname{ord} Y'_{\mathcal{C}}}{p-1} - 1.$$

Отдельно заметим, что множество

$$\{\mathcal{C} \in T_{r,n} \colon h_{\mathcal{C}}(L/K) = 0\}$$

замкнуто, а потому достаточно доказывать теорему в случае $s > 0$. Положим $S = \lceil (p-1)(s+1) \rceil$. Ясно, что $S \geqslant p-1$. Тогда

$$\{\mathcal{C} \colon h_{\mathcal{C}}(L/K) > s\} = \{G \colon \Phi(G) > S\}.$$

Последнее множество открыто в $T_{r,n}$ по теореме 2.

Случай $a = 1$, $b = p$ разбирается абсолютно аналогично, требуется поменять местами буквы x и y. □

Литература

1. L. Xiao, I. B. Zhukov, *Ramification of Higher Local Fields, Approaches and Questions.* Preprint (2012).
2. A. Campillo, *Algebroid Curves in Positive Characteristic.* Springer-Verlag, New York, 1980.
3. G.-M. Greuel, C. Lossen, E. Shustin, *Introduction to Singularities and Deformations.* Springer, 2007.
4. I. B. Zhukov, *Ramification of surfaces: Artin–Schreier extensions.* — In: Algebraic Number Theory and Algebraic Geometry, Contemp. Math., 300, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2002), pp. 211-220.
5. И. Б. Жуков, *Полуглобальные модели расширений двумерных локальных полей.* — Вестник С.-Петерб. ун-та. Сер. матем., мех., астрон. **1** (2010), 33–38.
6. J.-P. Serre, *Local Fields.* Springer, New York, 1979.
7. T. T. Moh, *Galois theory of power series rings in characteristic p.* — Amer. J. Math. **92** (1970), 919–950.
8. И. Б. Жуков, *Коммутативная алгебра.* Изд. С.-Петербургского университета, 2009.
9. C. T. C. Wall, *Singular Points of Plane Curves.* Cambridge University Press, 2004.

Faizov I. Ramification jump in model extensions of degree p.

An extension of complete dicrete valuation fields with imperfect residue fields is naturally viewed as an epimorphism between algebraic surfaces with distinguished point. Each regular curve that meets this point with irreducible preimage gives rise to an extension of fields of functions. In this paper a ramification jump of this extension is considered as a function of a jet of a curve. After a topology on a set of jets is introduced, lower semicontinuity and existence of common value for the jump are proved.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: ildar_faizov@mail.ru

Поступило 15 апреля 2013 г.