Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

Е. Ф. Лысенко

ВЕТВЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО РАСШИРЕНИЯ СТЕПЕНИ p^2 ПОЛНОГО ДИСКРЕТНО НОРМИРОВАННОГО ПОЛЯ ПРОСТОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ p С НЕСОВЕРШЕННЫМ ПОЛЕМ ВЫЧЕТОВ

§1. Введение

Статья посвящена изучению инвариантов ветвления полных дискретно нормированных полей простой характеристики p с несовершенным полем вычетов.

Для циклических расширений степени p^n полей простой характеристики p существует теория Артина–Шрайера–Витта, дающая явную конструкцию таких расширений. С использованием этой конструкции в данной работе вычисляются скачки ветвления циклического расширения степени p^2 полного дискретно нормированного поля простой характеристики p и выводятся необходимые и достаточные условия для пары натуральных чисел, при выполнении которых она может быть реализована как пара скачков ветвления данного циклического расширения степени p^2. Необходимость данных условий во всех случаях, кроме генома FF, вытекает из сравнений Сена ([1], предложение 3.6.5) и неравенства Хиодо ([1, §7.1]). В данной работе получены дополнительные ограничения для случая генома FF, полностью приведено оригинальное доказательство для всех случаев.

§2. Обозначения и известные результаты

Введем необходимые обозначения.

- K – полное дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$,
- v_K – дискретное нормирование на K,
- $\mathcal{O}_K$ – кольцо целых поля K,
- $\mathfrak{M}_K$ – максимальный идеал кольца $\mathcal{O}_K$,

Ключевые слова: ветвление, циклические расширения, вектора Витта, несовершенное поле вычетов, высшие локальные поля.

- $\bar{K}$ – поле вычетов поля K,
- $\pi_K = \pi$ – простой элемент поля K,
- $\wp : K \to K$, $\wp(x) = x^p - x$,
- $\mathrm{o}_K(\alpha) \in \{\beta \in K \mid v_K(\beta) > v_K(\alpha)\}$, $\alpha \in K$.

Известно, что для любого конечного расширения L/K

$$[L : K] = e_t(L/K)e_w(L/K)f_s(L/K)f_i(L/K),$$

где $e_t(L/K)e_w(L/K) = e(L/K) = v_L(\pi_K)$, $(e_t(L/K), p) = 1$, $e_w(L/K) = p^n$, $f_s(L/K) = [\bar{L} : \bar{K}]_{\mathrm{sep}}$, $f_i(L/K) = [\bar{L} : \bar{K}]_{\mathrm{insep}}$.

Определение 1. *Будем говорить, что конечное расширение L/K*

- *неразветвлено, если $[L : K] = f_s(L/K)$,*
- *дико разветвлено (дикое), если $[L : K] = e_w(L/K)$,*
- *свирепо разветвлено (свирепое), если $[L : K] = f_i(L/K)$,*
- *полностью разветвлено, если $e_t(L/K) = f_s(L/K) = 1$.*

Определение 2. *Пусть L/K – конечное расширение Галуа полных дискретно нормированных полей с группой Галуа G. Подгруппы ветвления G (в нижней нумерации) определяются формулой*

$$G_i = \{\sigma \in G \mid \inf_{a \in \mathcal{O}_L} v_L(\sigma(a) - a) \geqslant i + 1\},\ i \geqslant 1,\ i \in \mathbb{Z},$$

где v_L – нормирование на L, а $\mathcal{O}_L$ – соответствующее кольцо нормирования.

Определение 3. *Скачками ветвления (в нижней нумерации) расширения Галуа L/K полного дискретно нормированного поля K такого, что $\operatorname{char} \bar{K} = p$, называются числа i такие, что $G_i \neq G_{i+1}$, где G_i – подгруппы ветвления $\operatorname{Gal}(L/K)$.*

В §2 работы [1] приведено следующее известное утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле простой характеристики p, $L = K(\gamma)$ – нетривиальное расширение, где $\gamma^p - \gamma = a \in K$. В этом случае:*

1) *если $v_K(a) = 0$, то L/K неразветвлено;*
2) *если $v_K(a) < 0$ и $(p, v_K(a)) = 1$, то L/K дикое и скачок $h(L/K) = -v_K(a)$;*
3) *если $v_K(a) < 0$, $p \mid v_K(a)$ и $\overline{\pi_K^{-v_K(a)} a} \notin \bar{K}^p$, то L/K свирепо разветвлено и скачок $h(L/K) = -v_K(a)/p$.*

Введем понятие генома расширения (см. §2 работы [1]).

Определение 4. *Пусть L/K – циклическое расширение степени p^n. Тогда оно единственным образом раскладывается в башню циклических расширений степени p: $L = M_n/M_{n-1}/\dots/M_1/M_0 = K$. Геномом L/K будем называть слово $T_1\dots T_n$, где*

$$T_i = \begin{cases} W, & \text{если} \quad M_i/M_{i-1} \quad \text{дикое};\\ F, & \text{если} \quad M_i/M_{i-1} \quad \text{свирепое};\\ U, & \text{если} \quad M_i/M_{i-1} \quad \text{неразветвлено}.\end{cases}$$

Для получения более подробных сведений о теории ветвления в случае несовершенного поля вычетов см. работу [1].

Всюду далее будем рассматривать полностью разветвленные расширения.

§3. Вспомогательные утверждения

Всюду далее K – полное дискретно нормированное поле простой характеристики p с несовершенным полем вычетов $\bar{K}$, L_2/K – циклическое расширение с группой Галуа $\mathbb{Z}/p^2$, L_1/K – подрасширение L_2/K степени p.

Лемма 3.1. *Пусть $a \in K$. Тогда условие*

$$v_K(a) \geqslant v_K(a+b^p) \quad \text{для любого } b \in K \tag{1}$$

равносильно тому, что выполняется одно из двух условий:

(i) $p \nmid v_K(a)$;

(ii) $p \mid v_K(a)$ *и* $\overline{\pi_K^{-v_K(a)}a} \notin \bar{K}^p$.

Доказательство. Необходимость. Предположим противное, то есть выполнено условие (1),

$$p \mid v_K(a) \quad \text{и} \quad \overline{\pi_K^{-v_K(a)}a} \in \bar{K}^p.$$

Тогда найдется элемент $b \in K$ такой, что $\bar{b}^p = \overline{\pi_K^{-v_K(a)}a}$, то есть $b^p = \pi_K^{-v_K(a)}a + t$, $t \in \mathfrak{M}_K$. С учетом того, что $p \mid v_K(a)$, положим

$$\gamma = -\pi_K^{\frac{v_K(a)}{p}} b \in K;$$

тогда

$$\gamma^p = -\pi_K^{v_K(a)}b^p = -a - \pi_K^{v_K(a)}t,$$
$$v_K(a+\gamma^p) = v_K(a - a - \pi_K^{v_K(a)}t) = v_K(a) + v_K(t) > v_K(a),$$

так как $t \in \mathfrak{M}_K$. Получили противоречие с условием (1).

Достаточность. Пусть выполняется условие (i). Тогда, поскольку $p \mid v_K(b^p)$,

$$v_K(a+b^p) = \min\{v_K(a),\, v_K(b^p)\},$$

откуда ясно, что

$$v_K(a+b^p) \leqslant v_K(a).$$

Пусть выполняется условие (ii). Тогда, если $v_K(a) \neq v_K(b^p)$, то рассуждения аналогичны предыдущему. Если $v_K(a) = v_K(b^p)$, то, поскольку $b \in K$ влечет

$$\overline{\pi_K^{-v_K(b^p)} b^p} \in \bar{K}^p, \quad \text{то} \quad \overline{\pi_K^{-v_K(b^p)} b^p} \neq \overline{\pi_K^{-v_K(a)} a}.$$

Следовательно,

$$v_K(a+b^p) = \min\{v_K(a),\, v_K(b^p)\},$$

что означает, что

$$v_K(a+b^p) \leqslant v_K(a).$$

$\square$

В дальнейшем будем использовать условие, аналогичное условию (1), для элемента $c \in L_1$

$$v_K(c) \geqslant v_K(c+d^p) \quad \text{для любого} \quad d \in L_1. \tag{2}$$

Лемма 3.2. *Пусть для $a \in K$, $a \notin \mathcal{O}_K$, выполнено условие* (1). *Тогда для любого полинома вида $f(X) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} f_i^p X^i$, $f_i \in K$, выполняется $v_K(f(a)) = \min\limits_i \{f_i^p a^i\}$.*

Доказательство. Согласно лемме 3.1, рассмотрим два случая.

(i) Пусть $p \nmid v_K(a)$. Тогда равенство $v_K(f(a)) = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant p-1} \{f_i^p a^i\}$ очевидно в силу

$$v_K(f_i^p a^i) \not\equiv v_K(f_j^p a^j) \mod p \quad \text{при всех} \quad 0 \leqslant i < j \leqslant p-1.$$

(ii) Пусть $p \mid v_K(a)$. Тогда, в силу леммы 3.1, расширение $K(x)/K$, $x^p - x = a$, свирепое. Обозначим $t = \pi^{-v(a)} a$, $u = \pi^{-v(x)} x$. Тогда $[\bar{K}[\bar{u}] : \bar{K}] = p$. Из уравнения, задающего расширение $K(x)/K$ следует, что $\bar{t} = \bar{u}^p$. Положим $m = \min\limits_{0 \leqslant i \leqslant p-1} v(f_i^p a^i)$. Заметим, что $p \mid m$, так как в этом случае нормирование каждого монома делится на p.

Тогда, если предположить, что $\overline{\pi^{-m}f(a)} = 0$, то получаем, что

$$\overline{\pi^{-m}\sum_{i=0}^{p-1} f_i^p a^i} = 0,$$

и, так как

$$\overline{\pi^{-v(a)}a} = \overline{\pi^{-v(a)}x^p}, \quad \text{то} \quad \overline{\pi^{-m}\sum_{i=0}^{p-1} f_i^p x^{pi}} = 0.$$

Извлекая корень степени p из обеих частей последнего равенства, получаем

$$\overline{\pi^{-m/p}\sum_{i=0}^{p-1} f_i x^i} = 0,$$

что означает, что $[\bar{K}[\bar{u}] : \bar{K}] < p$. Но $\bar{K}[\bar{u}] = \overline{K(x)}$, $[\overline{K(x)} : \bar{K}] = p$. Получили противоречие, означающее, что $\overline{\pi^{-m}f(a)} \neq 0$. Следовательно, $v_K(f(a)) = \min\limits_i\{f_i^p a^i\}$. □

Лемма 3.3. *Пусть для $a \in K$, $a \notin \mathcal{O}_K$, выполнено условие* (1), $L = K(x)$, $x^p - x = a$. *Тогда для любого элемента $y \in L$ такого, что*

$$v_L(y) \geqslant v_L(y+c) \text{ для любого } c \in K,$$

выполняется

$$y^p = \alpha + \beta x + o_L(\beta x),$$

где $\alpha, \beta \in K$, $v_L(\alpha) = v_L(y^p)$, $\beta = f(a)$, $f \in K^p[X]$, $\deg f \leqslant p-2$, $v_L(\beta) = v_L(\alpha) + p|v_L(x)|$.

Доказательство. Пусть $y \in L$ такой, что $v_L(y) \geqslant v_L(y+c)$ для любого $c \in K$. Представим y в виде

$$y = c_0 + c_1 x + \ldots + c_{p-1}x^{p-1}, \quad c_i \in K,$$

тогда

$$y^p = c_0^p + c_1^p x^p + \ldots + c_{p-1}^p x^{p(p-1)}.$$

Так как $x^p - x = a$, то

$$\begin{aligned} y^p &= c_0^p + c_1^p(a+x) + \ldots + c_{p-1}^p(a+x)^{p-1} \\ &= \left(c_0^p + c_1^p a + \ldots + c_{p-1}^p a^{p-1}\right) \\ &\quad + \left(c_1^p + 2c_2^p a + \ldots + (p-1)c_{p-1}^p a^{p-2}\right)x + \ldots \end{aligned}$$

Получаем

$$y^p = \alpha + \beta x + \ldots,$$

где

$$\alpha = c_0^p + c_1^p a + \ldots + c_{p-1}^p a^{p-1}, \quad \beta = c_1^p + 2c_2^p a \ldots + (p-1)c_{p-1}^p a^{p-2}.$$

Покажем, что выполняются условия:

1) $v_L(y^p - \alpha) > v_L(\alpha)$;
2) $v_L(y^p - \alpha - \beta x) > v_L(\beta x)$;
3) $v_L(\beta) = v_L(\alpha) + p|v_L(x)|$.

Это завершит доказательство леммы.

1) Используя полученное выше представление для y, получаем

$$\begin{aligned} v_L(y^p - \alpha) &\geqslant \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p((a+x)^i - a^i))\right\} \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p(a^{i-1}x))\right\} = \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^i \cdot a^{-1}x)\right\} \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^i)\right\} + (p-1)|v_L(x)| > \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^i)\right\} \\ &\geqslant \min\left\{v_L(c_0^p), \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^i)\right\}\right\} = v_L(\alpha), \end{aligned}$$

так как по лемме 3.2

$$v_L(\alpha) = \min_{0\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^i)\right\}.$$

2) Проверим выполнение неравенства $v_L(y^p - \alpha - \beta x) > v_L(\beta x)$. Поскольку при $i = 0$, $i = 1$ выполняется $(a+x)^i - a^i - ia^{i-1}x = 0$, то

$$\begin{aligned} v_L(y^p - \alpha - \beta x) &\geqslant \min_{0\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L\left(c_i^p((a+x)^i - a^i - ia^{i-1}x)\right)\right\} \\ &= \min_{2\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L\left(c_i^p \frac{i(i-1)}{2} a^{i-2}x^2 \cdot \frac{x}{a} \cdot \frac{a}{x}\right)\right\} \\ &= \min_{2\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^{i-1}x)\right\} + (p-1)|v_L(x)| \\ &> \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^{i-1})\right\} + v_L(x) \\ &= v_L(\beta) + v_L(x) = v_L(\beta x). \end{aligned}$$

В предпоследнем переходе применили лемму 3.2.

3) По лемме 3.2

$$\begin{aligned} v_L(\beta) &= \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^{i-1})\right\} \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^{i})\right\} - v_L(a) \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^{i})\right\} + p|v_L(x)|. \end{aligned}$$

Поскольку для элемента y по условию леммы выполняется

$$v_L(y) \geqslant v_L(y+c) \quad \text{для любого} \quad c \in K,$$

то

$$\begin{aligned} v_L(c_0^p) &= pv_L(c_0) \geqslant p\min\{v_L(y), v_L(y-c_0)\} \geqslant pv_L(y-c_0) \\ &\geqslant p \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i x^i)\right\} = \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p x^{pi})\right\} \\ &= \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p (a+x)^i)\right\} = \min_{1\leqslant i\leqslant p-1} \left\{v_L(c_i^p a^i)\right\}. \end{aligned}$$

Поэтому можем продолжить равенство

$$\begin{aligned} \min_{1\leqslant i\leqslant p-1}\{v_L(c_i^p a^i)\} + p|v_L(x)| &= \min_{0\leqslant i\leqslant p-1}\{v_L(c_i^p a^i)\} + p|v_L(x)| \\ &= v_L(\alpha) + p|v_L(x)|. \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 3.4. *Пусть для элемента $a \in K$, $a \notin \mathcal{O}_K$, выполнено условие* (1), *$L = K(x)$, $x^p - x = a$. Тогда для любого $b \in K$ такого, что выполняется условие*

$$v_K(b) \geqslant v_K(b+c^p) \quad \textit{для любого} \quad c \in K,$$

и для любого $y \in L$ такого, что $v_L(b - y^p) > v_L(b)$, выполняются условия:

1) *$b - y^p = \gamma + \beta x + o_L(\beta x)$, где $\gamma, \beta \in K$;*
2) *$v_L(b) \leqslant v_L(\gamma) \leqslant v_L(b) + (p-1)|v_L(x)|$ или $\gamma = 0$;*
3) *$v_L(\beta) = v_L(b) + p|v_L(x)|$, $\beta = f(a)$, $f \in K^p[X]$, $\deg f \leqslant p-2$.*

Доказательство. По лемме 3.3

$$y^p = \alpha + \beta' x + \mathrm{o}_L(\beta' x),$$

где $\alpha, \beta' \in K$, $v_L(\alpha) = v_L(y^p)$, $\beta' = f(a)$, $f \in K^p[X]$, $\deg f \leqslant p-2$, $v_L(\beta') = v_L(\alpha) + p|v_L(x)|$. Тогда

$$b - y^p = (b-\alpha) - \beta' x + \mathrm{o}_L(\beta x).$$

Положим $\gamma = b - \alpha \in K$, $\beta = -\beta'$. Тогда

$$b = y^p + \gamma + \beta x + \mathrm{o}_L(\beta x).$$

Так как по лемме 3.3 $v_L(\alpha) = v_L(y^p)$, и по условию данной леммы $v_L(b - y^p) > v_L(b)$, то

$$v_L(y^p) = v_L(y^p + b - b) = v_L(b).$$

Отсюда следует, что

$$v_L(\gamma) = v_L(b - \alpha) \geqslant v_L(b).$$

Полагая $\gamma = 0$ при $v_L(\gamma) > v_L(\beta x)$, можем считать, что

$$v_L(b) \leqslant v_L(\gamma) \leqslant v_L(b) + (p-1)|v_L(x)|.$$

Пункт 3) данной леммы следует из того, что $v_L(\alpha) = v_L(b)$, и леммы 3.3. □

Лемма 3.5. *Если L_1/K – дикое расширение со скачком h, то существуют униформизирующие элементы π_K, π_{L_1} полей K и L_1 соответственно, такие, что $\pi_K = \pi_{L_1}^p + \delta$, где $\delta \in \mathcal{O}_{L_1}$, $v_{L_1}(\delta) = (p-1)h + p$.*

Доказательство. Пусть π_0 – некоторый униформизирующий элемент поля K, расширение L_1/K задается уравнением Артина–Шрайера $x^p - x = \gamma\pi_0^{-h}$, где $\gamma \in \mathcal{O}_K$, $v_K(\gamma) = 0$. Поскольку L_1/K – дикое расширение, то $(h,p) = 1$. Следовательно, найдутся такие целые числа d, r, что $-dh + rp = 1$. Возведем обе части уравнения $x_1^p - x_1 = \gamma\pi_0^{-h}$, задающего расширение L_1/K, в степень d и заменим $-dh = -rp + 1$, получим

$$(x_1^p - x_1)^d = \gamma^d \pi_0^{-rp+1}.$$

Домножим обе части уравнения на π_0^{rp}:

$$\pi_0^{rp} x_1^{dp}\left(1 - x_1^{1-p} + x_1^{2(1-p)} + \ldots + x_1^{d(1-p)}\right) = \gamma^d \pi_0.$$

Поскольку $v_K(\pi_0\gamma^d) = 1$, $v_{L_1}(\pi_0^r x_1^d) = rp - hd = 1$, то можем положить

$$\pi_K = \pi_0\gamma^d, \quad \pi_{L_1} = \pi_0^r x_1^d.$$

Предполагая также, что

$$x_1 = \pi_{L_1}^{-h} u, \text{ где } u \in \mathcal{O}_{L_1},\ v_{L_1}(u) = 0,$$

получаем искомое выражение

$$\pi_K = \pi_{L_1}^p (1 - u^{1-p}\pi_{L_1}^{h(p-1)} + u^{2(1-p)}\pi_{L_1}^{2h(p-1)} + \ldots) = \pi_{L_1}^p + \delta,$$

где
$$\delta = -u^{1-p}\pi_{L_1}^{h(p-1)+p} + u^{2(1-p)}\pi_{L_1}^{2h(p-1)+p} + \dots .$$
Иначе говоря,
$$\delta = -x_1^{1-p}\pi_{L_1}^{p} + x_1^{2(1-p)}\pi_{L_1}^{p} + \dots .$$
Следовательно, $\pi_K = \pi_{L_1}^p + \delta$, где $\delta \in \mathcal{O}_{L_1}$, $v_{L_1}(\delta) = (p-1)h + p$. □

Лемма 3.6. *Пусть L/K – свирепое расширение поля K, $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$. Тогда $\bar{L}^p = \bar{K}$.*

Доказательство. Предположим, что $L = K(x)$, $x^p - x = a \in K$, $v_K(a) = -pN$. Тогда
$$\bar{L} = \bar{K}(\overline{\pi^N x}), \quad \bar{L}^p = \bar{K}^p(\overline{\pi^{pN} x^p}).$$
Так как
$$\overline{\pi^{pN} x^p} = \overline{\pi^{pN}(a + x)} = \overline{\pi^{pN} a} \in \bar{K},$$
то $\bar{L}^p \subset \bar{K}$.

Поскольку $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$ и $\bar{L}^p \neq \bar{K}^p$, то $\bar{L}^p = \bar{K}$. □

§4. Основной результат

Теорема 4.1. *Пусть K – полное дискретно нормированное поле простой характеристики p с несовершенным полем вычетов $\bar{K}$. L_2/K – полностью разветвленное циклическое расширение степени p^2. Тогда пара натуральных чисел (h_1, h_2) может являться набором скачков ветвления (в нижней нумерации) расширения L_2/K тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

1) *геном WW, $p \nmid h_1$, $h_2 \equiv h_1 \mod p$,*
   $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1$;
2) *геном WF, $p \nmid h_1$, $h_2 > (p^2 - p + 1)\dfrac{h_1}{p}$;*
3) *геном FW, $p \nmid h_2$, $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1$;*
4) *геном FF, $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)\dfrac{h_1}{p}$ и либо $[\bar{K} : \bar{K}^p] > p$,*
   либо $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$, $p \mid h_1$.

Доказательство. Поскольку L_2/K – циклическое расширение степени p^2, то, согласно теории Артина–Шрайера–Витта ([6, Теорема 5]),
$$L_2 = K(x_1, x_2), \quad \text{для} \quad \wp(x_1, x_2) = (a_1, a_2) \in W_2(K),$$

где $\wp = \mathrm{Frob} - \mathrm{id} : W_2(K) \to W_2(K)$, то есть

$$\wp(x_1, x_2) = (x_1^p, x_2^p) -_{W_2(K)} (x_1, x_2).$$

Сложив вектора Витта, получим в явном виде два уравнения Артина–Шрайера, задающие циклические расширения степени p L_1/K и L_2/L_1, соответственно:

$$x_1^p - x_1 = a_1, \quad x_2^p - x_2 = a_2 - p^{-1} \sum_{i=1}^{p-1} C_p^i x_1^i a_1^{p-i} = a_2 - x_1 a_1^{p-1} + \dots$$

Обозначим $I = x_1 a_1^{p-1}$. Поскольку из уравнения $x_1^p - x_1 = a_1$ следует, что $pv_{L_1}(x_1) = v_{L_1}(a_1)$, то

$$v_{L_1}(I) = v_{L_1}(x_1 a_1^{p-1}) = \frac{p^2 - p + 1}{p} v_{L_1}(a_1) = -(p^2 - p + 1)|v_{L_1}(x_1)|.$$

Положим $v_{L_1}(x_1) = -N$, $v_K(a_2) = -M$, где $N \in \mathbb{N}$, $M \in \mathbb{Z}$.

Можем считать, что для элемента $a_2 \in K$ выполнено условие (1), то есть

$$v_K(a_2) \geqslant v_K(a_2 + b^p) \quad \text{для любого} \quad b \in K,$$

иначе выберем элемент $a_2'' = a_2 + b^p - b \equiv a_2 \mod \wp(K)$ для некоторого $b \in K$ такой, что $v_K(a_2'') \geqslant v_K(\tilde{a}_2)$ для любого $\tilde{a}_2 \equiv a_2 \mod \wp(K)$. Для элемента $a_2'' \in K$ выполняется условие (1), причем, так как

$$(a_1, a_2'') = (a_1, a_2) +_{W_2(K)} \wp(0, b) \equiv (a_1, a_2) \mod \wp(W_2(K)),$$

то вектор Витта (a_1, a_2'') задает то же расширение L_2/K, что и вектор Витта (a_1, a_2).

Если существует элемент $a_2' \equiv a_2 \mod \wp(L_1)$ такой, что $v_{L_1}(a_2') > v_{L_1}(a_2)$, и $v_{L_1}(a_2') \geqslant v_{L_1}(\tilde{a}_2)$ для любого $\tilde{a}_2 \equiv a_2 \mod \wp(L_1)$, то для него выполняется условие

$$v_{L_1}(a_2') \geqslant v_{L_1}(a_2' + b^p) \quad \text{для любого} \quad b \in L_1.$$

Возьмем y такой, что $a_2' = a_2 - y^p + y$. По лемме 3.4 верно представление

$$a_2 - y^p = \gamma + \beta x_1 + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1),$$

где для y, β, γ выполняются условия

1) $a_2 - y^p = \gamma + \beta x_1 + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1)$, где $\gamma, \beta \in K$;
2) $v_{L_1}(a_2) \leqslant v_{L_1}(\gamma) \leqslant v_{L_1}(a_2) + (p-1)|v_{L_1}(x_1)|$ или $\gamma = 0$;
3) $v_{L_1}(\beta) = v_{L_1}(a_2) + p|v_{L_1}(x_1)|$, $\beta = f(a_1)$, $f \in K^p[X]$, $\deg f \leqslant p - 2$.

В частности, $v_{L_1}(\gamma) \leqslant v_{L_1}(\beta x_1)$. Тогда

$$a_2' = y + \gamma + \beta x_1 + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1) \equiv a_2 \mod \wp(L_1).$$

Обозначим $\widetilde{x_2} = x_2 + y$. Уравнение, задающее расширение L_2/L_1, примет вид:

$$\widetilde{x_2}^p - \widetilde{x_2} = y + \gamma + \beta x_1 + I + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1 + I).$$

Случай, когда такого a_2' нет, аналогичен дальнейшим пунктам 1.1 и 1.2, где роль γ играет элемент a_2, поэтому отдельно его рассматривать не будем.

По лемме 3.4 $v_{L_1}(y) = \frac{1}{p} v_{L_1}(a_2)$ и $v_{L_1}(\beta x_1) = v_{L_1}(a_2) + (p-1)|v_{L_1}(x_1)|$. Предположим, что $v_{L_1}(y) \leqslant v_{L_1}(\beta x_1)$. Тогда

$$\frac{1}{p} v_{L_1}(a_2) \leqslant v_{L_1}(a_2) + (p-1)|v_{L_1}(x_1)|,$$

$$v_{L_1}(a_2) \geqslant -p|v_{L_1}(x_1)| > -(p^2 - p + 1)|v_{L_1}(x_1)| = v_{L_1}(I).$$

Следовательно, либо $v_{L_1}(y) > v_{L_1}(\beta x_1)$, либо $v_{L_1}(a_2) > v_{L_1}(I)$. Случай $v_{L_1}(a_2) > v_{L_1}(I)$ рассматривается в нижеследующем пункте 1.2. Так как

$$\beta + a_1^{p-1} = g(a_1), \quad g \in K^p[X], \quad \deg g = p - 1.$$

то по лемме 3.2

$$v_{L_1}(\beta + a_1^{p-1}) = \min\{v_{L_1}(\beta), v_{L_1}(a_1^{p-1})\},$$

поэтому

$$v_{L_1}(\beta x_1 + I) = v_{L_1}((\beta + a_1^{p-1})x_1) = \min\{v_{L_1}(\beta x_1), v_{L_1}(I)\}.$$

Следовательно, $y \in \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1 + I)$. Поэтому можем считать, что уравнение, задающее расширение L_2/L_1, имеет вид

$$\widetilde{x_2}^p - \widetilde{x_2} = \gamma + \beta x_1 + I + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1 + I).$$

1. Рассмотрим случай $\gamma \neq 0$.

1.1. Предположим, что $v_{L_1}(\gamma) < v_{L_1}(I)$.

1.1.a. Если расширение L_1/K дикое, то $v_{L_1}(I + \gamma) = v_{L_1}(\gamma) \,\vdots\, p$, так как $\gamma \in K$. Поскольку $p \nmid v_{L_1}(x_1)$ и $\beta \in K$, то $v_{L_1}(\beta x_1) \not\vdots\, p$. Следовательно,

$$v_{L_1}(I + \gamma) \neq v_{L_1}(\beta x_1).$$

Поэтому

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I) = \min\{v_{L_1}(I + \gamma), v_{L_1}(\beta x_1)\} = v_{L_1}(\gamma).$$

Если расширение L_1/K свирепое, то $\overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(x_1)}x_1} \notin \bar{K}$. Если $v_{L_1}(\gamma) \neq v_{L_1}(\beta x_1)$, то получаем

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I) = v_{L_1}(\gamma).$$

Если $v_{L_1}(\gamma) = v_{L_1}(\beta x_1)$, то

$$\overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\gamma)}(\gamma + \beta x_1 + I)} = \overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\gamma)}(\gamma + \beta x_1)} \neq 0.$$

Следовательно,

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I) = v_{L_1}(\gamma).$$

Итак, в случаях и дикого, и свирепого расшиения L_1/K выполняется равенство

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I) = v_{L_1}(\gamma).$$

1.1.б. Пусть $b \in L_1$. Тогда

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I + b^p) = v_{L_1}((a_2' + b^p) + (\gamma - a_2' + \beta x_1 + I)).$$

Поскольку

$$a_2' = \gamma + \beta x_1 + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1),$$

то

$$v_{L_1}(a_2') < v_{L_1}(\gamma - a_2' + \beta x_1 + I).$$

Так как для элемента a_2' выполняется условие (2), то

$$\begin{aligned} v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I + b^p) = v_{L_1}(a_2' + b^p) \leqslant v_{L_1}(a_2') = v_{L_1}(\gamma + \beta x_1) \\ = v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I). \end{aligned}$$

Следовательно, для элемента $\gamma + \beta x_1 + I$ выполняется условие (2).

1.1.в. Из пункта 1.1.б, согласно лемме 3.1, следует, что нормирование правой части уравнения

$$\widetilde{x_2}^p - \widetilde{x_2} = \gamma + \beta x_1 + I + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1 + I)$$

определяет тип расширения L_2/L_1. Из пункта 1.1.а и леммы 3.4 получаем

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I) = v_{L_1}(\gamma) \in [v_{L_1}(a_2'), v_{L_1}(a_2') + (p-1)|v_{L_1}(x_1)|].$$

Если L_1/K дикое, то

$$v_{L_1}(\gamma) \in [-pM, -pM + (p-1)N],\ p \mid v_{L_1}(\gamma),$$

так как $\gamma \in K$. Если L_1/K свирепое, то

$$v_{L_1}(\gamma) \in [-M, -M + (p-1)N].$$

Учитывая, кроме того, что в рассматриваемом случае

$$v_{L_1}(a_2') = v_{L_1}(\gamma) < v_{L_1}(I),$$

можем получить неравенства для скачков ветвления.

В случае, если L_1/K дикое, то L_2/L_1 свирепое и для соответствующего скачка ветвления имеем

$$\max\left\{M - \frac{p-1}{p}N,\ \frac{1}{p}|v_{L_1}(I)|\right\} \leqslant h_{L_2/L_1} \leqslant M.$$

Если L_1/K свирепое и $p \nmid v_{L_1}(\gamma)$, то L_2/L_1 дикое и для скачка выполняется

$$M - (p-1)N \leqslant h_{L_2/L_1} \leqslant M,\ h_{L_2/L_1} > |v_{L_1}(I)|,\ p \nmid h_{L_2/L_1}.$$

Если L_1/K свирепое и $p \mid v_{L_1}(\gamma)$, то L_2/L_1 свирепое, и для скачка выполняется

$$\frac{M}{p} - \frac{p-1}{p}N \leqslant h_{L_2/L_1} \leqslant \frac{M}{p}, \quad h_{L_2/L_1} > \frac{|v_{L_1}(I)|}{p}.$$

Этот случай возможен, если $[\bar{K} : \bar{K}^p] > p$. Иначе, если $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$, в силу леммы 3.6, $\overline{L_1}^p = \bar{K}$. Тогда найдется элемент $\gamma' \in \mathcal{O}_{L_1}$ такой, что $v_{L_1}(\gamma') = 0$ и

$$\overline{\gamma'}^p = \overline{\pi_K^{-v_K(\gamma)}\gamma}.$$

Следовательно,

$$v_{L_1}(a_2' - (\pi_K^{p^{-1}v_K(\gamma)}\gamma')^p) > v_{L_1}(a_2'),$$

что противоречит выбору a_2'.

1.2. Предположим, что $v_{L_1}(\gamma) \geqslant v_{L_1}(I)$. Так как по лемме 3.4 $v_{L_1}(\gamma) \leqslant v_{L_1}(\beta x_1)$, получаем

$$v_{L_1}(I) \leqslant \min\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(\beta x_1)\} \leqslant v_{L_1}(a_2').$$

1.2.a. Обозначим $\beta' = \beta + a_1^{p-1}$, где по лемме 3.4 $\beta = \beta_0 + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{p-2}a_1^{p-2}$. Тогда

$$\beta' = \beta_0 + \beta_1 a_1 + \ldots + \beta_{p-2}a_1^{p-2} + a_1^{p-1} = f(a_1),$$

$f(X) \in K^p[X]$, $\deg f = p-1$, и выполняется

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I) = v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1).$$

Если расширение L_1/K дикое, то $p \mid v_{L_1}(\gamma)$, так как $\gamma \in K$. По лемме 3.2 $v_{L_1}(\beta') \neq 0$. Так как $\beta' \in K$ и $p \nmid v_{L_1}(x_1)$, то $p \nmid v_{L_1}(\beta' x_1)$. Следовательно, $v_{L_1}(\gamma) \neq v_{L_1}(\beta' x_1)$. Поэтому

$$v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1) = \min\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(\beta' x_1)\}.$$

Если расширение L_1/K свирепое и $v_{L_1}(\gamma) \neq v_{L_1}(\beta' x_1)$, то

$$v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1) = \min\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(\beta' x_1)\}.$$

Если $v_{L_1}(\gamma) = v_{L_1}(\beta' x_1)$, то

$$\overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\gamma)}(\gamma + \beta' x_1)} = \overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\gamma)}\gamma} + \overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\gamma)}\beta' x_1} \neq 0,$$

так как первое слагаемое принадлежит $\bar{K}$, а второе – нет. Поэтому в обоих случаях, используя лемму 3.2, получаем

$$\begin{aligned}
&v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1) = \min\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(\beta' x_1)\}\\
&= \min\Big\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(x_1) + \min\{v_{L_1}(\beta_0), \ldots, v_{L_1}(\beta_{p-2}a_1^{p-2}), v_{L_1}(a_1^{p-1})\}\Big\}\\
&= \min\Big\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(x_1) + \min\{v_{L_1}(\beta), v_{L_1}(a_1^{p-1})\}\Big\}\\
&= \min\Big\{v_{L_1}(\gamma), \min\{v_{L_1}(\beta x_1), v_{L_1}(a_1^{p-1}x_1)\}\Big\}\\
&= \min\{v_{L_1}(\gamma), v_{L_1}(\beta x_1), v_{L_1}(I)\} = v_{L_1}(I).
\end{aligned}$$

1.2.б. Пусть $b \in L_1$. Тогда

$$v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I + b^p) = v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1 + b^p).$$

Если расширение L_1/K дикое, то по пункту 1.2.а

$$v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1) = v_{L_1}(I) \not\vdots\, p, \quad v_{L_1}(b^p) \vdots\, p.$$

Следовательно,

$$v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1 + b^p) = \min\{v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1), v_{L_1}(b^p)\}.$$

Если расширение L_1/K свирепое и $v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1) = v_{L_1}(b^p)$, то

$$\overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\beta' x_1)}(\gamma + \beta' x_1 + b^p)} = \overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\beta' x_1)}(\gamma + \beta' x_1)} + \overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\beta' x_1)}b^p} \notin \bar{K},$$

так как $\overline{L_1}^p = \bar{K}$. Следовательно, $\overline{\pi_{L_1}^{-v_{L_1}(\beta' x_1)}(\gamma + \beta' x_1 + b^p)} \neq 0$. Отсюда

$$\begin{aligned}
v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1 + b^p) &= \min\{v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1), v_{L_1}(b^p)\}\\
&\leqslant v_{L_1}(\gamma + \beta' x_1) = v_{L_1}(\gamma + \beta x_1 + I).
\end{aligned}$$

Итак, для элемента $\gamma + \beta x_1 + I$ выполняется условие (2).

1.2.в. Из пункта 1.2.б, согласно лемме 3.1, следует, что нормирование правой части уравнения

$$\widetilde{x_2}^p - \widetilde{x_2} = \gamma + \beta x_1 + I + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1 + I)$$

определяет тип расширения L_2/L_1. Поскольку

$$v_{L_1}(I) = -(p^2 - p + 1)|v_{L_1}(x_1)| = -(p^2 - p + 1)N$$

в обоих случаях, то если L_1/K дикое, L_2/L_1 дикое со скачком ветвления

$$h_{L_2/L_1} = (p^2 - p + 1)N.$$

Если L_1/K свирепое и $p \mid v_{L_1}(x_1)$, то L_2/L_1 свирепое, скачок ветвления

$$h_{L_2/L_1} = \frac{p^2 - p + 1}{p}N.$$

Если L_1/K свирепое и $p \nmid v_{L_1}(x_1)$, то L_2/L_1 дикое, скачок ветвления

$$h_{L_2/L_1} = (p^2 - p + 1)N.$$

Объединяя результаты, полученные в пунктах 1.1 и 1.2, получаем, что при $\gamma \neq 0$ реализуются следующие пары скачков ветвления (h_1, h_2):

для генома WW :	$h_2 = (p^2 - p + 1)h_1,\ p \nmid h_1;$
для генома WF :	$h_2 > \frac{p^2-p+1}{p}h_1,\ p \nmid h_1;$
для генома FW :	$h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1,\ p \nmid h_2;$
для $[\bar{K} : \bar{K}^p] > p$ и генома FF :	$h_2 \geqslant \frac{p^2-p+1}{p}h_1;$
для $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$ и генома FF :	$h_2 = \frac{p^2-p+1}{p}h_1,\ p \mid h_1.$

2. Рассмотрим случай $\gamma = 0$. Расширение L_2/L_1 задается уравнением

$$\widetilde{x_2}^p - \widetilde{x_2} = \beta x_1 + I + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1 + I).$$

Сейчас, в отличие от случая 1.2, слагаемым с наименьшим нормированием может оказаться βx_1. Поскольку в этом случае $a_2' = \beta x_1 + \mathrm{o}_{L_1}(\beta x_1)$, то

$$a_2 = (\beta x_1)^p + o_K(\beta x_1),$$

то есть $p \mid a_2(K)$. По лемме 3.4

$$v_{L_1}(\beta x_1) = v_{L_1}(a_2) + (p-1)|v_{L_1}(x_1)| = v_{L_1}(a_2) + (p-1)N.$$

Можем считать, что

$$v_{L_1}(a_2) + (p-1)N < -(p^2 - p + 1)N = v_{L_1}(I),$$

то есть
$$v_{L_1}(a_2) < -p^2N.$$
Иначе получим случай, аналогичный случаю 1.2. Следовательно,
$$v_{L_1}(\beta x_1 + I) = v_{L_1}(\beta x_1) < v_{L_1}(I).$$

Пусть $b \in L_1$. Тогда, аналогично случаю 1.2.б, получаем
$$\begin{aligned} v_{L_1}(\beta x_1 + I + b^p) = v_{L_1}(\beta' x_1 + b^p) = \min\{v_{L_1}(\beta' x_1),\, v_{L_1}(b^p)\} \\ \leqslant v_{L_1}(\beta' x_1) = v_{L_1}(\beta x_1 + I). \end{aligned}$$
Итак, для элемента $\beta x_1 + I$ выполняется условие (2) и
$$v_{L_1}(\beta x_1 + I) < v_{L_1}(I).$$
Поэтому в случае, если L_1/K дикое, то L_2/L_1 может быть диким со скачком ветвления таким, что
$$h_{L_2/L_1} > (p^2 - p + 1)N,\ p \nmid h_{L_2/L_1},\ h_{L_2/L_1} \equiv N \mod p.$$
Если L_1/K свирепое, то случая $p \nmid v_K(a_2)$ не может быть, т.к. иначе $p \nmid v_K(a_2) = v_{L_1}(a_2)$, что означает, что $a_2 \notin L_1^p$. Тогда $y = 0$, и случай $\gamma = 0$ не может возникнуть. Поэтому $p \mid v_{L_1}(a_2) = v_K(a_2)$. Тогда, если $p \mid N$, расширение L_2/L_1 свирепое со скачком ветвления
$$h_{L_2/L_1} > \frac{p^2 - p + 1}{p} N.$$
Если $p \nmid N$, то расширение L_2/L_1 дикое со скачком ветвления
$$h_{L_2/L_1} = M - (p-1)N > (p^2 - p + 1)N.$$

Объединяя результаты пунктов 1 и 2, получаем, что пары скачков ветвления (h_1, h_2) должны удовлетворять следующим условиям:

для генома WW: $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1,\ p \nmid h_1,\ h_2 \equiv h_1 \mod p$;
для генома WF: $h_2 > \frac{p^2-p+1}{p} h_1,\ p \nmid h_1$;
для генома FW: $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1,\ p \nmid h_2$;
для генома FF: $h_2 \geqslant \frac{p^2-p+1}{p} h_1$, и либо $[\bar{K} : \bar{K}^p] > p$, либо $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p,\ p \mid h_1$.

Для завершения доказательства теоремы необходимо убедиться, что все пары чисел, удовлетворяющих этим условиям, реализуются как скачки ветвления расширения L_2/K. Для каждой полученной пары (h_1, h_2) построим вектор Витта, который задает циклическое расширение степени p^2 со скачками ветвления h_1, h_2 соответственно нижнего и верхнего этажей башни $L_2/L_1/K$.

1) Зафиксируем пару натуральных чисел (h_1, h_2) такую, что $p \nmid h_1$, $p \nmid h_2$, $h_2 \equiv h_1 \mod p$, $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1$.
Рассмотрим отдельно случаи $h_2 = (p^2 - p + 1)h_1$ и $h_2 > (p^2 - p + 1)h_1$.

1.1) Пусть $h_2 = (p^2 - p + 1)h_1$. Рассмотрим вектор Витта $(a_1, a_2) = (\pi^{-h_1}, 0)$. Тогда геном L_2/K – это WW, и скачки ветвления

$$h_1, \ h_2 = (p^2 - p + 1)h_1.$$

1.2) Пусть $h_2 > (p^2 - p + 1)h_1$, $(a_1, a_2) = (\pi^{-h_1}, \pi^{-M})$, где $M = \dfrac{h_2 + (p-1)h_1}{p}$. Используя лемму 3.5 и выражение для δ, полученное в ее доказательстве, разложим a_2 по степеням π_{L_1}:

$$a_2 = \pi^{-M} = (\pi_{L_1}^p + x_1^{1-p}\pi_{L_1}^p + \ldots)^{-M} = \pi_{L_1}^{-pM} - Mx_1^{1-p}\pi_{L_1}^{-pM} + \ldots$$

Итак, существует элемент $y = \pi_{L_1}^{-M} \in L_1$ такой, что $a_2 - y^p = \beta x_1 + o_{L_1}(\beta x_1)$, т.е. в этом случае элемент γ из представления a_2 по лемме 3.4 равен нулю. Это означает, что нормирование элемента $a_2 - y^p + y$ максимальное из возможных в лемме 3.4, поэтому выбранный y задает требуемый a_2' с максимальным нормированием. Следовательно, согласно случаю 2, нормирование элемента $Mx_1^{1-p}\pi_{L_1}^{-pM}$ определяет тип расширения L_2/L_1 и его скачок. Так как $p \nmid h_1$, то

$$p \nmid v_{L_1}(Mx_1^{1-p}\pi_{L_1}^{-pM}) = -pM + (p-1)h_1.$$

Следовательно, геном L_2/K – это WW, и скачки ветвления – это h_1 и

$$h_{L_2/L_1} = pM - (p-1)h_1 = p\frac{h_2 + (p-1)h_1}{p} - (p-1)h_1 = h_2.$$

2) Зафиксируем пару натуральных чисел (h_1, h_2) такую, что

$$p \nmid h_1, \ h_2 > (p^2 - p + 1)\frac{h_1}{p}.$$

Рассмотрим вектор Витта $(a_1, a_2) = (\pi^{-h_1}, \pi^{-ph_2}t)$, где $t \in \mathcal{O}_K$, $v_K(t) = 0$, $\bar{t} \notin \bar{K}^p$. Такой элемент t найдется, так как поле $\bar{K}$ несовершенное. Тогда L_1/K – дикое и $\bar{K} = \overline{L_1}$, что влечет $\bar{t} \notin \overline{L_1}^p$. Следовательно, геном L_2/K – это WF, и скачки ветвления h_1, h_2.

3) Зафиксируем пару натуральных чисел (h_1, h_2) такую, что $p \nmid h_2$, $h_2 \geqslant (p^2 - p + 1)h_1$. Рассмотрим отдельно случаи $h_2 = (p^2 - p + 1)h_1$ и $h_2 > (p^2 - p + 1)h_1$.

3.1) Пусть $h_2 = (p^2 - p + 1)h_1$. Рассмотрим вектор Витта $(a_1, a_2) = (\pi^{-ph_1}t, 0)$, где $t \in \mathcal{O}_K$, $v_K(t) = 0$, $\bar{t} \notin \bar{K}^p$. Тогда расширение L_2/K свирепое. Тип расширения L_2/L_1 и его скачок определяет величина

$$v_{L_1}(I) = -(p^2 - p + 1)h_1.$$

Поскольку $p \nmid h_2$ и $h_2 = (p^2 - p + 1)h_1$, то $p \nmid h_1$. Следовательно, геном L_2/K – это FW, и скачки ветвления – это

$$h_1,\ h_2 = (p^2 - p + 1)h_1.$$

3.2) Пусть $h_2 > (p^2 - p + 1)h_1$, $(a_1, a_2) = (\pi^{-ph_1}t, \pi^{-h_2})$, где $t \in \mathcal{O}_K$, $v_K(t) = 0$, $\bar{t} \notin \bar{K}^p$. Тогда, так как $p \nmid h_2$, геном L_2/K – это FW, и скачки ветвления h_1, h_2.

4.1) Зафиксируем пару натуральных чисел (h_1, h_2) такую, что

$$p \mid h_1,\ h_2 = (p^2 - p + 1)\frac{h_1}{p}.$$

Возьмем вектор Витта $(a_1, a_2) = (\pi^{-ph_1}t, 0)$, где $t \in \mathcal{O}_K$, $v_K(t) = 0$, $\bar{t} \notin \bar{K}^p$. Тогда геном L_2/K – это FF, и скачки ветвления равны h_1, $h_2 = (p^2 - p + 1)\dfrac{h_1}{p}$.

4.2) Зафиксируем пару натуральных чисел (h_1, h_2) такую, что

$$p \mid h_1,\ h_2 > (p^2 - p + 1)\frac{h_1}{p}.$$

Пусть $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$, $(a_1, a_2) = (\pi^{-ph_1}t, \pi^{-pM}t)$, где $t \in \mathcal{O}_K$, $v_K(t) = 0$, $\bar{t} \notin \bar{K}^p$, $M = \dfrac{(p-1)h_1 + ph_2}{p}$. Тогда

$$a_2 = \pi^{-pM}t = a_1\pi^{ph_1 - pM} = (x_1^p - x_1)\pi^{p(h_1 - M)}.$$

Следовательно, полагая $y = x_1\pi^{h_1 - M}$, получаем представление

$$a_2 - y^p = x_1\pi^{p(h_1 - M)}$$

как в лемме 3.4, где элемент γ равен нулю. Это означает, что нормирование элемента $a_2 - y^p + y$ максимальное из возможных в лемме 3.4, поэтому выбранный y задает требуемый a_2' с максимальным нормированием. Следовательно, геном L_2/K – это FF, и скачки ветвления –

это

$$h_1, \quad h_{L_2/L_1} = \frac{h_1 - p(h_1 - M)}{p} = \frac{h_1}{p} - \left(h_1 - \frac{(p-1)h_1 + ph_2}{p}\right) = h_2.$$

4.3) Пусть пара натуральных чисел (h_1, h_2) такая, что

$$h_2 > (p^2 - p + 1)\frac{h_1}{p}.$$

Предположим, что $[\bar{K} : \bar{K}^p] > p$. Возьмем элементы $\tau_1, \tau_2 \in \bar{K}$, являющиеся p-независимыми в $\bar{K}$ над $\bar{K}^p$. Пусть $t_1, t_2 \in \mathcal{O}_K$ такие, что $\bar{t_1} = \tau_1, \bar{t_2} = \tau_2$. Рассмотрим вектор Витта $(a_1, a_2) = (\pi^{-ph_1}t_1, \pi^{-ph_2}t_2)$. Тогда у расширения L_2/K геном FF и скачки ветвления h_1, h_2. □

Литература

1. L. Xiao, I. Zhukov, *Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions.* — `http://math.usask.ca/fvk/Xiao-Zhukov.pdf`, to appear in Proc. Second Int. Conf. and Workshop on Valuation Theory.
2. S. Wewers, *Fiercely ramified cyclic extensions of p-adic fields with imperfect residue field.* — `arXiv:1104.3785.`
3. I. Fesenko, S. Vostokov, *Local Fields And Their Extentions.* Second edition, AMS (2001).
4. M. Morrow, *An introduction to higher dimensional local fields and adèles.* — `http://math.uchicago.edu/~mmorrow/Morrow%20Intro%20to%20HLF.pdf.`
5. A. Obus, R. Pries, *Wild cyclic-by-tame extensions.* — J. Pure Appl. Algebra **214** (2010), 565–573.
6. H. L. Schmid, *Zur Arithmetik der zyklischen p-Korper.* — J. für die reine und angew. Math. **176** (1937), 161–167.
7. L. Thomas, *Ramification groups in Artin–Schreier–Witt extensions.* — J. de theorie des nombres de Bordeaux, **17**, no. 2 (2005), 689–720.
8. J.-P. Serre, *Local fields*, Grad. Texts in Math., v. 67. Springer-Verlag, New York (1979).

Lysenko E. F. Ramification of cyclic extensions of degree p^2 of complete discrete valuation fields of prime characteristic p with imperfect residue field.

In the present paper we study ramification invariants of complete discrete valuation fields of prime characteristic p with imperfect residue field. Using Witt vectors we calculate ramification breaks of cyclic extensions of degree p^2 of such field. We obtain necessary and sufficient conditions for a

pair of natural numbers to be ramification breaks of a cyclic extension of degree p^2.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: lysenkoef@yandex.ru

Поступило 17 апреля 2013 г.