Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

А. В. Кухарев, Г. Е. Пунинский

ПОЛУЦЕПНЫЕ ГРУППОВЫЕ КОЛЬЦА КОНЕЧНЫХ ГРУПП. p-НИЛЬПОТЕНТНОСТЬ.

§1. Введение

Пусть F – произвольное поле и G – конечная группа. Вопрос о том, как свойства группового кольца FG зависят от свойств F и G, является классическим, и удовлетворительный ответ получен во многих случаях. Идеальный ответ, с нашей точки зрения, должен быть дан в виде условий на группу G и поле F и не должен апеллировать к структуре FG-модулей. Например, кольцо FG всегда является артиновым и самоинъективным. Классическая теорема Машке утверждает, что кольцо FG классически полупросто тогда и только тогда, когда характеристика p поля F не делит порядок G. Другой известный пример дает теорема Хигмана: кольцо FG имеет конечный тип представлений, если и только если силовская p-подгруппа G_p группы G является циклической.

В этой работе мы обсудим вопрос полуцепности кольца FG. По теореме Машке нетривиальным является только p-модулярный случай, то есть когда характеристика поля p делит порядок G. Известно, что артиново полуцепное кольцо имеет конечный тип представлений, поэтому теорема Хигмана доставляет важное достаточное условие полуцепности: если кольцо FG – полуцепное, то силовская p-подгруппа группы G является циклической. Это – единственное известное нам необходимое условие полуцепности кольца FG.

Если поле F алгебраически замкнуто, то ответ на наш вопрос “в принципе известен”. А именно (см., например, [1, глава 5]), групповое p-модулярное кольцо FG полуцепно тогда и только тогда, когда G_p – циклическая группа, и дерево Брауэра любого блока FG является “звездой”. Современные компьютерные методы (нужные ссылки можно найти в книге [9]) позволяют вычислять деревья Брауэра (и следовательно, проверять полуцепность) для групп разумного размера, – например, эти графы известны для большинства простых спорадических групп.

Ключевые слова: конечная группа, групповое кольцо, полуцепное кольцо.

Кроме того, существуют удовлетворительные достаточные условия полуцепности. А именно, в случае алгебраически замкнутого поля F характеристики p, Морита [14] и (позже) Шринивасан [21] доказали полуцепность кольца FG для любой p-разрешимой группы G с циклической силовской p-подгруппой. Чтобы подчеркнуть силу этого результата, заметим, что среди 1048 групп порядка $\leqslant 100$ имеется 405 групп с нетривиальной циклической силовской 3-подгруппой, и 404 из них 3-разрешимы (оставшаяся простая группа A_5 также имеет полуцепное групповое кольцо над алгебраически замкнутым полем характеристики 3).

Вероятно, доказательство Мориты работает для любых полей разложения группы G, но нам не известно аккуратно проведенное рассуждение в этом случае. Существует также работа Януша [10], где он "характеризует" групповые кольца конечных групп над специальными полями разложения в терминах возможности подъема простых FG-модулей до простых модулей над кольцом VG, где V – коммутативная область нормирования, чей фактор по радикалу Джекобсона изоморфен F. К сожалению, этот ответ апеллирует к теории представлений более сложного кольца VG.

В случае произвольного поля F о полуцепности группового кольца FG известно совсем немного. Например (см. [3, вопрос 6]), неизвестно, зависит ли полуцепность кольца FG от свойств поля, в частности сохраняется ли полуцепность при переходе от F к его алгебраическому замыканию $\widetilde{F}$ (и обратно).

Если F – произвольное поле характеристики p, и силовская p-подгруппа является нормальной и циклической, то Мурасэ [15] доказал полуцепность кольца FG. Этот результат дает богатый источник примеров полуцепных групповых колец, которые не являются полупростыми.

В другой своей работе [16] Мурасэ установил полуцепность группового кольца FG для любой p-нильпотентной группы с циклической силовской p-подгруппой и произвольного конечного поля F характеристики p. В этой работе мы покажем, что последняя теорема Мурасэ верна для произвольного поля F характеристики p. Более того, мы установим, что в этом случае кольцо FG является кольцом главных идеалов и, следовательно, изоморфно прямой сумме полных колец матриц над цепными (артиновыми) кольцами. В частности, в случае

p-нильпотентной группы вопрос о полуцепности кольца FG не зависит от выбора поля характеристики p.

В целом, среди групп с циклической силовской p-подгруппой число p-нильпотентных не так велико (167 из 405 для групп порядка $\leqslant 100$ и $p = 3$). Однако, в случае $p = 2$ любая группа, чья силовская 2-подгруппа циклична, является 2-нильпотентной. Из этого вытекает, что для $p = 2$ необходимое условие Хигмана (цикличность силовской 2-подгруппы) является и достаточным, и мы получаем полное описание полуцепных групповых колец над полем характеристики 2.

Опишем коротко содержание работы.

В первой ее части мы докажем простое (но важное) обобщение теоремы Нетер–Сколема об описании группы автоморфизмов кольца полных матриц $M_n(D)$ над телом, конечномерным над своим центром. Использование этой теоремы и некоторых соображений из статьи Мурасэ [16] позволяет доказать основной результат работы. А именно, если F – произвольное поле характеристики p и G – конечная p-нильпотентная группа с циклической силовской p-подгруппой, то групповое кольцо FG является кольцом главных идеалов, в частности полуцепно.

Тем не менее, вычисление структуры такого полуцепного кольца является технически очень сложной задачей. Мы проиллюстрируем результаты таких вычислений (используя пакеты GAP и Magma) для групп $\mathrm{SL}(2,3)$ и S_4 над простым полем из трех элементов. Даже для такого маленького поля число элементов соответствующих групповых колец огромно, что делает вычисления вручную непосильной задачей.

§2. Базовые понятия

Все кольца в этой работе ассоциативны и имеют единицу, а все модули являются унитарными (и, как правило, правыми). Напомним, что кольцо R называется *полусовершенным*, если найдется такое множество попарно ортогональных идемпотентов $e_1, \dots, e_n$, что $1 = e_1 + \cdots + e_n$ (то есть это множество полно), и каждое кольцо $e_iRe_i = \mathrm{End}(e_iR)$ локально. В частности, любой идемпотент e_i неразложим (то есть проективный модуль e_iR неразложим): если $e_i = f + g$ для взаимно ортогональных идемпотентов $f, g \in e_iR$, то либо $f = 0$, либо $f = e_i$. Например, любое артиново кольцо полусовершенно. Полная ортогональная система неразложимых идемпотентов в полусовершенном кольце определена однозначно с точностью до сопряжения обратимым элементом:

Факт 1. [20, теорема 2.9.18] Пусть $e_1, \ldots, e_n$ и $f_1, \ldots, f_m$ – полные ортогональные системы неразложимых идемпотентов полусовершенного кольца R. Тогда $n = m$ и существуют перестановка $\pi \in S_n$ и обратимый элемент $u \in R$ такие, что $f_{\pi(i)} = e_i^u = u^{-1} e_i u$ для любого i.

Центральный идемпотент e полусовершенного кольца R называется *примитивным* (как центральный идемпотент), если в любом представлении $e = f + g$ в виде суммы ортогональных центральных идемпотентов $f, g \in eR$ выполняется либо $f = 0$, либо $f = e$. Конечно, примитивный центральный идемпотент может далее разлагаться в сумму ортогональных (нецентральных) идемпотентов e_i. Кольцо eR для центрального примитивного идемпотента e обычно называют *блоком* R. Поскольку примитивные центральные идемпотенты либо ортогональны, либо совпадают, то любое полусовершенное кольцо однозначно разлагается в сумму блоков: $R = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$.

Модуль M называется *цепным*, если его решетка подмодулей есть цепь, и *полуцепным*, если M – прямая сумма цепных модулей. Распространяя эту терминологию на кольца, мы скажем, что кольцо R является *цепным*, если R – цепной правый и цепной левый модуль над собой.

Скажем, что кольцо R *полуцепное справа (слева)*, если оно полуцепно как правый (левый) модуль над собой. Итак, R полуцепно справа, если и только если найдется такая полная система ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$, что каждый модуль $e_i R$ цепной. В частности, любое полуцепное справа кольцо полусовершенно. Для полусовершенных колец существует удобный критерий проверки полуцепности:

Факт 2. (см. [19, лемма 1.22]) Пусть R – полусовершенное кольцо с полной системой ортогональных идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$. Тогда R является полуцепным справа тогда и только тогда, когда для любых $r \in e_i R e_j, s \in e_i R e_k$ найдутся $u \in e_j R e_k, v \in e_k R e_j$ такие, что либо $ru = s$, либо $sv = r$.

Заметим, что в этом утверждении $R_{ij} = e_i R e_j$ является R_i-R_j-бимодулем, где $R_i = e_i R e_i$ – “диагональное” кольцо с единицей e_i.

Кольцо называется *полуцепным*, если оно полуцепно справа и полуцепно слева. Например, полное кольцо матриц $M_n(F)$ над телом F является полуцепным.

Следующий простое утверждение также полезно в вычислениях.

Факт 3. Пусть e_i, e_j – идемпотенты произвольного кольца R. Тогда проективные модули e_iR и e_jR изоморфны тогда и только тогда, когда $rs = e_i$ и $sr = e_j$ для некоторых элементов $r \in R_{ij}$, $s \in R_{ji}$.

Кольцо R называется *кольцом главных правых (левых) идеалов*, если любой его правый (левый) идеал порожден одним элементом; и R – *кольцо главных идеалов*, если оно является кольцом главных правых идеалов и главных левых идеалов. Следующий классический результат Асано дает важный класс примеров полуцепных колец.

Факт 4. [7, теорема 12.2.1] Любое артиново кольцо главных идеалов изоморфно прямой сумме полных колец матриц над цепными артиновыми кольцами, в частности полуцепно.

Конечно, не любое полуцепное артиново кольцо является кольцом главных идеалов, – например, кольцо $T_n(F)$ верхнетреугольных матриц над полем F полуцепно, но не является кольцом главных идеалов при $n \geqslant 2$.

Если R – полуцепное кольцо с выбранной полной системой ортогональных неразложимых идемпотентов $e_1, \ldots, e_n$, то его размерность Голди, $\mathrm{Gdim}(R)$, равна n. Если R еще и артиново, то его важным инвариантом является *ряд Купиша*, который определяется как последовательность $(k_1, \ldots, k_n)$ длин модулей e_iR. Комбинаторные соотношения, которым удовлетворяет ряд Купиша (неразложимого) артинова полуцепного кольца, можно найти в [19, глава 8].

Пусть F – произвольное поле, G – конечная группа и FG – соответствующее групповое кольцо. Нас будет интересовать, при каких условиях на F и G кольцо FG является полуцепным. Хорошо известно (см. [11, пример 3.15.E]), что это кольцо фробениусово, в частности самоинъективно. Из этого факта нетрудно вывести, что если кольцо FG полуцепно справа, то оно полуцепно и слева; в частности, для проверки полуцепности достаточно применить (правый) критерий из факта 2.

Кроме того, если кольцо FG полуцепное, то любой его блок B имеет постоянный правый ряд Купиша, который совпадает с левым рядом Купиша B.

Если характеристика p поля F не делит порядок группы G (например, если $p = 0$), то по теореме Машке (см. [12, теорема 6.1]) групповое кольцо FG классически полупросто, в частности полуцепно. Итак, (интересуясь полуцепностью) достаточно рассматривать только *модулярный случай*, когда p делит порядок G.

Напомним, что кольцо R имеет *конечный тип представлений*, если найдется конечный набор $M_1, \ldots, M_l$ неразложимых модулей таких, что любой R-модуль изоморфен прямой сумме копий M_i (известно, что это понятие лево-право симметрично и влечет артиновость кольца).

Хигман [8] доказал, что кольцо FG имеет конечный тип представлений, если и только если силовская p-подгруппа группы G циклическая. Из этой теоремы вытекает важное необходимое условие полуцепности кольца.

Следствие 5. *Пусть F – произвольное поле характеристики p, делящей порядок конечной группы G. Если групповое кольцо FG полуцепное, то силовская p-подгруппа группы G является циклической.*

Доказательство. Известно (см., например, [2, глава 32]), что любое артиново полуцепное кольцо имеет конечный тип представлений. Осталось применить теорему Хигмана. □

Итак, изучая полуцепность, можно ограничиться p-модулярным случаем с циклической силовской p-подгруппой.

§3. Автоморфизмы простых артиновых колец

В этом коротком параграфе мы опишем автоморфизмы простого артинова кольца $M_n(D)$, где D – тело, конечномерное над своим центром K. Если автоморфизм f оставляет неподвижными все элементы из K (вложенного в $M_n(D)$ как диагональные матрицы), то классическая теорема Нетер–Сколема (см. [18, часть 10.6]) утверждает, что f совпадает с сопряжением обратимой матрицей. Нас интересуют автоморфизмы, которые не обязательно фиксируют K поточечно (конечно, любой автоморфизм f индуцирует автоморфизм K).

Важный для нас частный случай кольца $M_n(D)$ представлен блоком B полупростого группового кольца FH, на котором элемент $g \in G$ действует сопряжением (например, если H – нормальная подгруппа G). В этом случае поле F неподвижно относительно действия g, но центр K блока (то есть центр тела D) не обязан фиксироваться g поточечно. Конечно, если поле F алгебраически замкнуто, то $F = K$ (и мы попадаем в область действия теоремы Нетер–Сколема); но нетривиальные примеры существуют уже для конечных полей.

Если $A \in \mathrm{GL}_n(D)$, то эта обратимая матрица действует сопряжением как автоморфизм φ_A кольца $R = M_n(D)$, а именно $\varphi_A(X) = X^A = A^{-1}XA$ для любой матрицы X. Заметим, что этот автоморфизм фиксирует центр D кольца R (где D вложено в R диагонально). Другой тип автоморфизма α_n кольца R индуцирован произвольным автоморфизмом α тела D, – а именно полагаем $\alpha_n(\sum a_{ij}e_{ij}) = \sum \alpha(a_{ij})e_{ij}$, где e_{ij} – матричные единицы и $a_{ij} \in D$. Такой автоморфизм кольца R оставляет неподвижной каждую матрицу e_{ij}.

Отметим сначала простое правило коммутирования этих типов автоморфизмов.

Замечание 6. $\alpha_n \circ \varphi_B = \varphi_{\alpha_n(B)} \circ \alpha_n$ для любых $\alpha \in \mathrm{Aut}(D)$ и $B \in \mathrm{GL}_n(D)$.

Доказательство. Для $X \in R$ имеем

$$\alpha_n\varphi_B(X) = \alpha_n(B^{-1}XB) = \alpha_n(B)^{-1}\alpha_n(X)\alpha_n(B) = \varphi_{\alpha_n(B)}\alpha_n(X)\,.$$

□

Вероятно, следующий (расширенный) вариант теоремы Нетер–Сколема известен специалистам, но мы не смогли обнаружить нужную ссылку. Второй автор благодарен Петеру Семрлу за помощь при доказательстве следующего утверждения.

Предложение 7. *Пусть D – тело, конечномерное над своим центром K, и пусть $R = M_n(D)$. Тогда любой автоморфизм f кольца R является композицией сопряжения φ_A обратимой матрицей A и отображения α_n, индуцированного автоморфизмом α тела D.*

Доказательство. Заметим (по замечанию 6), что порядок композиции двух типов автоморфизмов несущественен. Для краткости через e_i обозначим диагональную матричную единицу e_{ii}.

Поскольку $1 = e_1 + \cdots + e_n$ – разложение единицы в сумму ортогональных неразложимых идемпотентов, то же самое верно для представления $1 = f(e_1) + \cdots + f(e_n)$. По факту 1, найдется матрица $B \in \mathrm{GL}_n(D)$ такая, что $f(e_i) = \varphi_B(e_i)$, следовательно, $\varphi_{B^{-1}} \circ f(e_i) = e_i$ для всех i.

Если мы найдем нужное представление для автоморфизма $f' = \varphi_{B^{-1}} \circ f$, а именно $\varphi_{B^{-1}} \circ f = \varphi_C \circ \alpha_n$ для некоторых $C \in \mathrm{GL}_n(D)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(F)$, то $f = \varphi_B \circ \varphi_C \circ \alpha_n = \varphi_{CB} \circ \alpha_n$ – требуемое представление f.

Итак, с самого начала можно считать, что $f = f'$, то есть $f(e_i) = e_i$ для всех i. Как обычно, мы отождествим тело D с его образом в $M_n(D)$ относительно диагонального вложения $d \mapsto \mathrm{diag}(d, \ldots, d)$. Кроме того, мы отождествим с D каждое кольцо $R_i = e_i R e_i$ (посредством отображения $d \mapsto d e_i$). Тогда отображение $\mathrm{diag}(d, \ldots, d) \mapsto d e_i$ отождествляет эти две копии D.

Так как централизатор множества $\{e_1, \ldots, e_n\}$ в R состоит из диагональных матриц, мы заключаем, что $f(\mathrm{diag}(d, \ldots, d)) = \mathrm{diag}(d_1, \ldots, d_n)$ для всех $d \in D$ (где d_i зависят от d). Далее, матрицы $\mathrm{diag}(s, \ldots, s)$, $s \in K$ образуют центр кольца R, следовательно, f сохраняет форму таких матриц.

Поскольку $f(e_i) = e_i$, то f отображает каждое кольцо $e_i R e_i$ в себя, в частности, индуцирует автоморфизм β кольца $R_1 = e_1 R e_1 = D$. Тогда $\beta^{-1} f(d) = d$ для всех $d \in D = R_1$, другими словами, $\beta_n^{-1} f(\mathrm{diag}(d, \ldots, d))$ $= \mathrm{diag}(d, d_2, \ldots, d_n)$ для каждого $d \in D$ (где d_i зависят от d).

Из этого вытекает, что $\beta_n^{-1} f(\mathrm{diag}(s, \ldots, s)) = \mathrm{diag}(s, \ldots, s)$ для каждого $s \in K$, то есть автоморфизм $\beta_n^{-1} f$ кольца R оставляет неподвижным его центр K. Тогда мы можем применить теорему Нетер–Сколема: $\beta_n^{-1} f = \varphi_E$ для некоторой обратимой матрицы E, следовательно $f = \beta_n \varphi_E = \varphi_{\beta_n(E)} \beta_n$. □

Мы не знаем ответа на следующий вопрос:

Вопрос 8. Верно ли предложение 7 без предположения конечномерности тела D над своим центром?

§4. p-НИЛЬПОТЕНТНЫЕ ГРУППЫ

Пусть G – конечная группа, порядок которой делится на p. Напомним, что G называется *p-нильпотентной*, если ее силовская p-подгруппа G_p имеет нормальное дополнение H, то есть G является полупрямым произведением H и G_p (где G_p действует на H сопряжением). Различные (в том числе когомологические) характеризации p-нильпотентных групп читатель может найти в недавней работе [5]. В частности (теорема Фробениуса), группа G является p-нильпотентной, если и только если для любой ее p-подгруппы H факторгруппа (нормализатора по централизатору) $N_G(H)/C_G(H)$ является p-группой.

В интересующем нас случае цикличной G_p из теоремы Фробениуса легко выводится простой критерий p-нильпотентности, который мы использовали при вычислениях.

Факт 9. Пусть G – группа с циклической силовской p-подгруппой G_p. Тогда G является p-нильпотентой, если и только если $N_G(G_p) = C_G(G_p)$.

Например, группа $\mathrm{SL}(2,3)$ матриц второго порядка с определителем 1 над полем из трех элементов не 2-нильпотентна.

Рассматривая действие нормализатора $N_G(G_p)$ сопряжением на G_p, нетрудно доказать следующее утверждение.

Факт 10. [4, следствие 13.22] Любая конечная группа G с нетривиальной циклической силовской 2-подгруппой является 2-нильпотентной.

Следующая основная теорема этой работы является обобщением (второй) теоремы Мурасэ (с конечного на случай произвольного поля) и использует некоторые идеи его работы [16] в доказательстве.

Теорема 11. *Пусть G – конечная p-нильпотентная группа с циклической силовской p-подгруппой G_p и нормальным дополнением H. Если F – произвольное поле характеристики p, то групповое кольцо FG является кольцом главных идеалов, в частности полуцепно.*

Доказательство. По теореме Асано (факт 4) достаточно доказать, что FG является кольцом главных идеалов. Более того, по теореме Машке (или как часть определения p-группы) можно считать, что p делит порядок G.

Пусть $|G| = p^n \cdot m$, где p и m взаимно просты, следовательно, порядок G_p равен p^n, а порядок H равен m. Поскольку p не делит порядок H, по теореме Машке кольцо FH полупросто, то есть является прямой суммой $FH = B_1 \oplus \cdots \oplus B_k$ простых блоков $B_i = M_{n_i}(D_i)$, где $B_i = e_i R$ для центрального примитивного идемпотента e_i, причем тела D_i конечномерны над F. Заметим, что хотя (по определению группового кольца) F содержится в центре K_i тела D_i, вполне возможно, что включение $F \subset K_i$ строгое.

Пусть g – порождающий элемент группы G_p, то есть g имеет порядок p^n. Поскольку H нормальна в G, то g (и следовательно G_p) действует на FH сопряжением ψ_g (здесь, если $r = \sum_{h\in H} \alpha_h h \in FH$, то $\psi_g(r) = r^g = \sum_{h\in H} \alpha_h h^g$). Ясно, что ψ_g отображает множество

$\{e_1, \dots, e_k\}$ центральных примитивных идемпотентов в себя, следовательно переставляет блоки FH. Итак, g индуцирует перестановку π на множестве $\{1, \dots, k\}$ по правилу $\psi_g(e_i) = e_{\pi(i)}$.

В частности, орбиты этого действия имеют порядок делящий p^n. Ясно, что кольцо FG разлагается в прямую сумму колец, соответствующих различным орбитам действия g (если просуммировать все блоки FH вдоль фиксированной орбиты, то мы получим блок кольца FG). Итак, достаточно рассмотреть блок кольца FG, соответствующий одной орбите.

Более того, можно использовать следующее утверждение из книги Пассмана:

Факт 12. [17, лемма 1.7]. Пусть H – нормальная подгруппа группы G. Пусть $e_1, \dots, e_l$ – конечная G-орбита центральных (примитивных) идемпотентов кольца FH. Тогда $e = e_1 + \dots + e_l$ – центральный (примитивный) идемпотент кольца FG и $eFG \cong M_l(e_1 FG e_1) = M_l(e_1 FG_1)$, где $G_1 \supseteq H$ – централизатор e_1 в G.

Понятно, что матричная структура в этом предложении возникает, поскольку неизоморфные проективные FH-модули e_iFH, e_jFH превращаются в изоморфные проективные FG-модули e_iFG, e_jFG, где изоморфизм задается действием g.

Итак, если централизатор (в G!) центрального (в FH!) идемпотента e_1 порождается элементом g^k, то достаточно рассмотреть один блок $B = M_n(D)$ с действием элемента g^k. Для простоты будем считать, что $k = 1$. Итак, кольцо $e_1 FG e_1$ получается из $R = M_n(D)$ присоединением элемента g (точнее $e_1 g$!) порядка p^s с соотношением $rg = gr^g$, где $\psi_g(r) = r^g = g^{-1} r g$ – автоморфизм R. В частности, блок $B = \oplus_{i=0}^{p^s-1} g^i R$, где $gR = Rg$, является скрещенным произведением.

Поскольку g действует на $R = M_n(D)$ сопряжением, по предложению 7 получаем $\psi_g = \alpha_n \varphi_A$ для некоторой обратимой матрицы $u = A$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(D)$.

Рассмотрим элемент $v = u^{-1} g \in e_1 FG$, где u^{-1} обозначает обратный к u в блоке B, то есть $uu^{-1} = e_1$. Тогда v действует сопряжением на R как α_n, следовательно, оставляет на месте все матричные единицы e_{ij}. Итак, v централизует все матричные единицы, поэтому блок eFG является фактором полного кольца матриц над кольцом косых полиномов $D[v, \alpha]$ (где $dv = v\alpha(d)$ для всех $d \in D$) так, что в кольцо $e_1 FG e_1$ является фактором $D[v, \alpha]$.

Хорошо известно, что кольцо косых полиномов над телом является кольцом главных идеалов. Согласно [13, теорема 51.4] то же самое верно и для полного кольца матриц над $D[v, \alpha]$, а тогда и для его факторкольца eFG. □

Поскольку кольцо косых полиномов не артиново, а кольцо e_1FGe_1 артиново, то последнее является собственным фактором $D[v, \alpha]$. Это нетрудно видеть и непосредственно: рассуждая как в [16], можно показать, что элемент v^{p^s} (p^s – порядок g) лежит в D (и даже инвариантен относительно ψ_g). Действительно, из $Rg = gR$ вытекает $v^2 \in RgRg = Rg^2$. Продолжая эту цепочку и используя $g^{p^s} = 1$, получаем $v^{p^s} \in Rg^{p^s} = R$. Поскольку v централизует все матричные единицы e_{ij}, то $v^{p^s} \in D$, следовательно, кольцо e_1FGe_1 является фактором артинова кольца (главных идеалов) $M_n(D[x, \alpha])$, $x^{p^s} = d$, где $d \in D$.

Напомним, что группа G называется *p-разрешимой*, если G обладает субнормальным рядом $\{e\} = H_1 \subset H_2 \subset \cdots \subset H_l = G$ таким, что все последовательные факторы являются либо p-группами, либо имеют порядки взаимно простые с p (то есть являются p'-группами).

Отметим, что в некотором смысле заключение теоремы 11 нельзя усилить. А именно, пусть G – p-разрешимая группа с циклической силовской p-подгруппой, не являющаяся p-нильпотентной (например, S_4 является такой группой при $p = 3$). Если F – алгебраически замкнутое поле характеристики p, то, как утверждает [21], групповое кольцо FG является полуцепным, но не все его идеалы главные.

Следующее следствие основного результата полностью характеризует полуцепные групповые кольца для поля F характеристики 2 (если группа G имеет нечетный порядок, то ее групповое кольцо FG полупросто).

Предложение 13. *Пусть F – произвольное поле характеристики 2 и пусть G – любая группа четного порядка. Тогда групповое кольцо FG полуцепное, если и только если силовская 2-подгруппа группы G циклична.*

Доказательство. Действительно, из факта 10 вытекает, что группа G является 2-нильпотентной. Осталось применить теорему 11. □

§5. Пример

В этой части (во многом следуя Мурасэ [16]) мы вычислим структуру группового кольца группы $G = \mathrm{SL}(2,3)$ над простым полем $F = \mathrm{GF}(3)$. Понятно, что выбор поля в основном определяется техническими трудностями (мы использовали пакеты GAP и Magma для вычислений), хотя аналогичный результат верен для произвольного поля характеристики 3.

Перенумеруем элементы группы G:

$$g_1 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{a^3}, \quad g_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad g_3 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad g_4 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{a},$$

$$g_5 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad g_6 = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad g_7 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{e}, \quad g_8 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right),$$

$$g_9 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{10} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{d}, \quad g_{11} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{b}, \quad g_{12} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right),$$

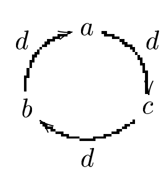
$$g_{13} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right), \ g_{14} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \ g_{15} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{a^3b} = \mathbf{ba}, \ g_{16} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{a^2},$$

$$g_{17} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{18} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{19} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{20} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{c} = \mathbf{ab},$$

$$g_{21} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{22} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{23} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right), \quad g_{24} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \mathbf{a^2b}.$$

Аналогично Мурасэ [16] введем элементы $c = ab$ и d как выше. Нетрудно видеть, что выполняются равенства $a^2 = b^2 = c^2$, $a^4 = 1$ и $bc = a$, $ca = b$, $ba = c^3$, $cb = a^3$, $ac = b^3$ (в частности, $ba = a^3b$), поэтому G содержит группу кватернионов $H = Q_8 = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$ как нормальную подгруппу, если мы отобразим $i \mapsto a$, $j \mapsto b$ и $k \mapsto c$.

Более того, G – полупрямое произведение H и 3-силовской подгруппы G_3, порожденной элементом d, причем действие d на H задается равенствами $a^d = c$, $b^d = a$ и $c^d = b$ (заметим, что это действие отличается от рассмотренного в [16], поскольку Мурасэ использует сопряжение $x \mapsto dxd^{-1}$).



Поскольку $p = 3$ не делит $|Q_8| = 8$, то групповое кольцо FH полупросто. Используя пакет GAP, нетрудно вычислить пять центральных примитивных идемпотентов этого кольца:

$$u_1 = 2 + 2a + 2a^3 + 2b + 2a^2b + 2a^2 + 2ab + 2a^3b,$$

$$u_2 = 2 + a + a^3 + 2b + 2a^2b + 2a^2 + ab + a^3b,$$

$$u_3 = 2 + 2a + 2a^3 + b + a^2b + 2a^2 + ab + a^3b,$$

$$u_4 = 2 + a + a^3 + b + a^2b + 2a^2 + 2ab + 2a^3b,$$

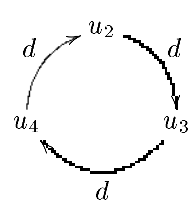
$$e_5 = 2 + a^2.$$

При этом модули u_iFH для $i = 1, \dots, 4$ простые и одномерные, а центральный идемпотент e_5 раскладывается в сумму двух (нецентральных) взаимно ортогональных неразложимых идемпотентов: $e_5 = u_5 + u_6$, где

$$u_5 = e + 2a + a^3 + 2b + a^2b + 2a^2 \quad \text{и} \quad u_6 = e + a + 2a^3 + b + 2a^2b + 2a^2 .$$

Более того, модули u_5FH и u_6FH изоморфны, и кольцо u_5FHu_5 одномерно над F, поэтому блок e_5FH изоморфен полному кольцу матриц $M_2(F)$.

В итоге получаем блочное разложение $FH = F \oplus F \oplus F \oplus F \oplus M_2(F)$. Нетрудно вычислить действие d на центральных идемпотентах: оно сохраняет u_1, e_5, и переставляет u_2, u_3, u_4 по циклу: $u_2^d = u_3$, $u_3^d = u_4$ и $u_4^d = u_2$.



Поскольку d действует на u_1 тривиально, то u_1 остается центральным примитивным идемпотентом в FG, и блок u_1FG изоморфен кольцу $F[d], d^3 = 1$. Выбирая $w = 1 - d$, получаем $w^2 \neq 0$, $w^3 = 0$, и (нетрудно проверить, что) последнее кольцо изоморфно цепному кольцу $F[w], w^3 = 0$. Итак, первый блок FG – цепное кольцо длины 3.

Вторая орбита действия d на блоках кольца FH состоит из идемпотентов u_2, u_3, u_4. Из этого следует, что все проективные модули u_2FG, u_3FG, u_4FG изоморфны, поэтому $u = u_2+u_3+u_4$ – центральный примитивный идемпотент кольца FG, и соответствующий блок uFG изоморфен кольцу 3×3 матриц над кольцом $u_2FGu_2 = \mathrm{End}(u_2FG)$. Нетрудно вычислить, что это кольцо одномерно, поэтому второй блок кольца FG изоморфен полному кольцу матриц $M_3(F)$ (следовательно, все модули u_iFG, $i = 2, 3, 4$ – простые).

Осталось вычислить последний блок e_5FG. Поскольку модули u_5FH и u_6FH изоморфны, то и модули u_5FG и u_6FG изоморфны, поэтому этот блок изоморфен кольцу 2×2 матриц над кольцом $u_5FGu_5 = \mathrm{End}(u_5FG)$. Будем действовать как при доказательстве теоремы 11. Для этого нужно явно указать матричные единицы в представлении блока e_5FH в виде $M_2(F)$.

Заметим, что u_5FHu_6 и u_6FHu_5 одномерны над F, поэтому нетрудно найти матричные единицы

$$u_{56} = a + 2a^3 + 2b + a^2b + 2ab + a^3b \in u_5FHu_6,$$

$$u_{65} = a + 2a^3 + 2b + a^2b + ab + 2a^3b \in u_6FHu_5,$$

причем $u_{55} = u_{56}u_{65} = u_5$ и $u_{66} = u_{65}u_{56} = u_6$.

Итак, любой элемент из нашего блока однозначно представляется в виде $\sum_{ij} a_{ij}u_{ij}$, $a_{ij} \in F$. Рассмотрим действие d на этом блоке. Возьмем, например, элемент u_5, и вычислим $u_5^d = a^3+2a+e+a^3b+2a^2+2ab$. Разлагая этот элемент по базису, нетрудно видеть, что он представляется матрицей $\left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Аналогично $u_{56}^d = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, $u_{65}^d = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ и $u_6^d = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$.

Нетрудно подобрать обратимую матрицу $u = \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)$, действие которой сопряжением совпадает с действием d. Обращая u в $M_2(F)$, имеем $u^{-1} = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right) = u_5+2u_{56}+u_{65}$ (то есть $u^{-1} \in e_5FH$ и $uu^{-1} = u^{-1}u = e_5$). Тогда элемент

$$v = u^{-1}d = (u_5+2u_{56}+u_{65})d = g_3+2g_5+g_9+g_{10}+2g_{14}+2g_{17}+g_{21}+2g_{22}$$

принадлежит e_5FG и коммутирует со всеми матричными единицами e_{ij}. Кроме того,

$$v^3 = g_7 + 2g_{16} = e + 2a^2 = \gamma e_5, \text{ где } \gamma = 2 \in F.$$

Действуя как в [16], нетрудно видеть, что для элемента

$w = v - \sqrt[3]{\gamma}\, e_5 = v - 2e_5 = g_3 + 2g_5 + 2g_7 + g_9 + g_{10} + 2g_{14} + g_{16} + 2g_{17} + g_{21} + 2g_{22}$

имеем

$w^2 = g_2 + 2g_3 + g_5 + 2g_6 + 2g_7 + 2g_8 + 2g_9 + 2g_{10} + g_{12} + 2g_{13} + g_{14} + g_{16} + g_{17} + g_{18} + g_{19} + 2g_{21} + g_{22} + 2g_{23} \neq 0$

и $w^3 = 0$. Кроме того, w порождает радикал блока e_5FG (как левый и как правый идеал), следовательно, элемент

$$u_5wu_5 = g_1 + 2g_3 + 2g_4 + g_5 + g_7 + 2g_9 + g_{10} + 2g_{11} + 2g_{16} + g_{17} + 2g_{22} + g_{24}$$

порождает радикал кольца u_5FGu_5. Итак, блок e_5FG изоморфен полному кольцу 3×3 матриц над цепным кольцом $F[w], w^3 = 0$.

В итоге $FG = V \oplus M_3(F) \oplus M_2(V)$, где $V = F[w], w^3 = 0$, – искомое разложение кольца FG. Заметим, что размерность Голди кольца FG равна $1 + 3 + 2 = 6$, а его ряд Купиша (расписывая по блокам) – $3 \oplus (1,1,1) \oplus (3,3)$.

§6. Обсуждение

Для случая алгебраически замкнутого поля справедливость следующей гипотезы вытекает из результатов Мориты [14].

Гипотеза 14. *Пусть F – произвольное поле характеристики p, и пусть G – конечная p-разрешимая группа, порядок которой делится на p. Если силовская p-подгруппа группы G циклична, то групповое кольцо FG – полуцепное.*

Соберем интересующие нас сведения о группах порядка $\leqslant 100$ в таблицу 1.

Например, пусть F – произвольное поле характеристики 3 и G – группа порядка $\leqslant 100$ с циклической 3-силовской подгруппой (всего имеется 405 таких групп). Тогда мы умеем доказывать полуцепность кольца FG для $167 + 333 - 119 = 381$ групп из шестой и седьмой строк таблицы. Доказательство гипотезы 14 позволило бы включить в этот список все группы с циклической силовской 3-подгруппой кроме, возможно, A_5. По крайне мере над алгебраически замкнутым полем характеристики 3 (см. [3, с. 258]) и над конечным полем из трех

Рис. 1. Таблица

Группы порядка $\leqslant 100$	$p = 2$	$p = 3$	$p = 5$	$p = 7$	$p = 11$
всего групп, включая единичную	1048	1048	1048	1048	1048
p делит $\|G\|$	965	494	140	61	29
p делит $\|G\|$, и G_p – циклическая	168	405	123	57	29
p делит $\|G\|$, G p-разрешима и G_p – циклическая	168	404	122	57	29
p делит $\|G\|$, G p-нильпотентна и G_p – циклическая	168	167	52	27	16
p делит $\|G\|$, G_p нормальна и циклическая	64	333	120	56	29
p делит $\|G\|$, G p-нильпотентна и G_p – циклическая и нормальная	64	119	50	26	16

элементов (нетрудно проверить, используя пакет Magma) групповое кольцо этой группы полуцепно.

Минимальная (по числу элементов) p-разрешимая не p-нильпотентная группа с циклической не нормальной силовской p-подгруппой – это группа $G = S_4$ для $p = 3$. Действительно, поскольку S_4 не содержит нормальных подгрупп порядка 8, то она не является 3-нильпотентной. С другой стороны, субнормальный ряд $\{e\} \subset V \subset A_4 \subset S_4$ (где V_4 обозначает группу Клейна) показывает, что эта группа 3-разрешима.

Покажем, что для поля F из трех элементов групповое кольцо $R = FS_4$ полуцепно.

Перенумеруем элементы группы S_4 следующим образом:

$$g_1 = e, \quad g_2 = (3,4), \quad g_3 = (2,3), \quad g_4 = (2,3,4),$$

$$g_5 = (2,4,3), \quad g_6 = (2,4), \quad g_7 = (1,2), \quad g_8 = (1,2)(3,4),$$

$$g_9 = (1,2,3), \quad g_{10} = (1,2,3,4), \quad g_{11} = (1,2,4,3), \quad g_{12} = (1,2,4),$$

$$g_{13} = (1,3,2), \quad g_{14} = (1,3,4,2), \quad g_{15} = (1,3), \quad g_{16} = (1,3,4),$$

$$g_{17} = (1,3)(2,4),\ g_{18} = (1,3,2,4),\ g_{19} = (1,4,3,2),\ g_{20} = (1,4,2),$$

$$g_{21} = (1,4,3), \quad g_{22} = (1,4), \quad g_{23} = (1,4,2,3), \quad g_{24} = (1,4)(2,3).$$

С помощью пакета GAP была найдена полная система ортогональных неразложимых идемпотентов кольца FS_4:

$$e_1 = 2g_1 + g_2 + g_7 + 2g_8 + 2g_{17} + g_{18} + g_{23} + 2g_{24},$$

$$e_2 = 2g_1 + g_2 + g_7 + 2g_8 + g_{17} + 2g_{18} + 2g_{23} + g_{24},$$

$$e_3 = 2g_1 + g_2 + g_3 + 2g_4 + 2g_5 + g_6 + 2g_7 + g_8 + g_9 + 2g_{10} + 2g_{11} + g_{12} + g_{13} + 2g_{14} + g_{15} + 2g_{16} + 2g_{19} + g_{20} + 2g_{21} + g_{22},$$

$$e_4 = 2g_1 + 2g_2 + 2g_7 + 2g_8 + 2g_{17} + 2g_{18} + 2g_{23} + 2g_{24},$$

$$e_5 = 2g_1 + 2g_2 + 2g_3 + 2g_4 + 2g_5 + 2g_6 + g_7 + g_8 + g_9 + g_{10} + g_{11} + g_{12} + g_{13} + g_{14} + 2g_{15} + 2g_{16} + g_{19} + g_{20} + 2g_{21} + 2g_{22},$$

$$e_6 = 2g_1 + 2g_2 + g_3 + g_4 + g_5 + g_6 + g_7 + g_8 + 2g_9 + 2g_{10} + 2g_{11} + 2g_{12} + 2g_{13} + 2g_{14} + g_{15} + g_{16} + 2g_{19} + 2g_{20} + g_{21} + g_{22},$$

$$e_7 = 2g_1 + g_2 + 2g_3 + g_4 + g_5 + 2g_6 + 2g_7 + g_8 + 2g_9 + g_{10} + g_{11} + 2g_{12} + 2g_{13} + g_{14} + 2g_{15} + g_{16} + g_{19} + 2g_{20} + g_{21} + 2g_{22},$$

$$e_8 = 2g_1 + 2g_2 + 2g_7 + 2g_8 + g_{17} + g_{18} + g_{23} + g_{24}.$$

Размерности всех модулей e_iR, $i = 1, \ldots, 8$ над F равны 3. Имеют место следующие изоморфизмы: $e_2R \cong e_5R \cong e_7R$, причем эти модули образуют блок (то есть $e = e_2 + e_5 + e_7$ – центральный примитивный идемпотент) и $\operatorname{End}(e_2R) = e_2Re_2 \cong F$. Поэтому блок eR изоморфен полному кольцу матриц $M_3(F)$, в частности, все проективные модули e_iR, $i = 2, 5, 7$ являются простыми.

Аналогично простые модули $e_3R \cong e_6R \cong e_8R$ образуют блок, изоморфный кольцу $M_3(F)$.

Осталось рассмотреть два неизоморфных модуля e_1R и e_4R, которые образуют последний (третий) блок. Нетрудно проверить, что элемент

$$h_{14} = g_3 + 2g_4 + g_5 + 2g_6 + g_9 + 2g_{10} + g_{11} + 2g_{12} + 2g_{13} + g_{14} + 2g_{15} + g_{16} + 2g_{19} + g_{20} + 2g_{21} + g_{22}$$

принадлежит компоненте $R_{14} = e_1Re_4$ и порождает радикал модуля e_1R. Аналогично, элемент

$$h_{41} = g_3 + g_4 + 2g_5 + 2g_6 + 2g_9 + 2g_{10} + g_{11} + g_{12} + g_{13} + g_{14} + 2g_{15} + 2g_{16} + 2g_{19} + 2g_{20} + g_{21} + g_{22} \in R_{41}$$

принадлежит компоненте $R_{41} = e_4Re_1$ и порождает радикал модуля e_4R. Кроме того, элемент $h_{11} = h_{14} \cdot h_{41} = \sum_{g\in A_4} g + \sum_{h\in S_4\setminus A_4} 2h$ порождает радикал цепного кольца R_1 (имеющего размерность 2) и $h_{11}^2 = 0$. Аналогично, элемент $h_{44} = h_{41} \cdot h_{14} = \sum_{g\in S_4} g$ порождает радикал цепного кольца R_4 (имеющего размерность 2) и $h_{44}^2 = 0$. Ясно, что h_{11} и h_{44} принадлежат цоколю кольца R.

Итак, $e_1R \supset h_{14}R \supset h_{11}R \supset 0$ – единственный композиционный ряд модуля e_1R, а $e_4R \supset h_{41}R \supset h_{44}R \supset 0$ – единственный композиционный ряд модуля e_4R, поэтому эти модули – цепные длины 3. Нетрудно видеть, что этот блок изоморфен кольцу

$$\begin{pmatrix} F[x]/x^2 & F[x]/x \\ xF[x]/x^2 & F[x]/x^2 \end{pmatrix},$$

то есть фактору наследственного нетерового первичного (*hnp*-) кольца

$$\begin{pmatrix} F[x] & F[x] \\ xF[x] & F[x] \end{pmatrix} \text{ по идеалу } \begin{pmatrix} x^2F[x] & xF[x] \\ x^2F[x] & x^2F[x] \end{pmatrix}.$$

А именно, нужное отображение следующее: $h_{11} \mapsto xe_{11}$, $h_{14} \mapsto e_{12}$, $h_{41} \mapsto xe_{21}$ и $h_{44} \mapsto xe_{22}$.

В частности, размерность Голди кольца R равна $3+3+2=8$, а его правый ряд Купиша имеет вид $(1,1,1) \oplus (1,1,1) \oplus (3,3)$.

Заметим (см. [13, глава 50]), что любой собственный фактор *hnp*-кольца является артиновым полуцепным кольцом, но не все неразложимые артиновы полуцепные кольца реализуются таким образом.

Вопрос 15. Верно ли, что любой блок полуцепного группового кольца FG конечной группы G является гомоморфным образом *hnp*-кольца?

Литература

1. J. L. Alperin, Local Representation Theory, Cambridge University Press, 1986.
2. F. W. Anderson, K. R. Fuller, Rings and Categories of Modules, 2d ed., Springer Graduate Texts in Math., Vol. 13, 1992.
3. Y. Baba, K. Oshiro, Classical Artinian Rings, World Scient. Publ., 2009.
4. C. W. Curtis, I. Reiner, Methods of Representation Theory with Applications to Finite Groups and Orders, Vol. 1, Wiley–Interscience, 1981.
5. J. Gonzáles-Sánchez, *A p-nilpotency criterion.* — Arch. Math. **94** (2010), 201–205.

6. К. Фейс, Алгебра: кольца, модули и категории, Т. 2, Москва, Мир, 1979.
7. M. Hazewinkel, N. Gubareni, V. V. Kirichenko, Algebras, Rings and Modules, Vol. 1, Kluwer, 2004.
8. D. G. Higman, *Indecomposable representations at characteristic p*. — Duke J. Math. **21** (1954), 377–381.
9. G. Hiss, C. Jansen, K. Lux, P. Parker, Computational Modular Character Theory: `http://www.math.rwth-aachen.de/homes/MOC/`
10. G. J. Janusz, *Indecomposable modules for finite groups*. — Ann. Math. **89** (1969), 209–241.
11. T. Y. Lam, Lectures on Modules and Rings, Springer Graduate Texts in Math., Vol. 189, 1999.
12. T. Y. Lam, A First Course in Noncommutative Rings, Springer Graduate Texts in Math., Vol. 131, 2001.
13. L. S. Levy, J. C. Robson, Hereditary Noetherian Prime Rings and Idealizers, AMS Math. Surveys and Monographs, Vol. 174, 2011.
14. K. Morita, *On group rings over a modular field which possess radicals expressible as principal ideals*. — Sci. Repts. Tokyo Daigaku **4** (1951), 177–194.
15. I. Murase, Generalized uniserial group rings. I, Sci. Papers College Gener. Educ. Univ. Tokyo, 15 (1965), 15–28.
16. I. Murase, Generalized uniserial group rings. II, Sci. Papers College Gener. Educ. Univ. Tokyo, 15 (1965), 111–128.
17. D.S. Passman, The Algebraic Structure of Group Rings, Krieger Publishing Company, 1985.
18. Р. Пирс, Ассоциативные алгебры, Москва, Мир, 1986.
19. G. Puninski, Serial Rings, Kluwer, 2001.
20. L.H. Rowen, Ring Theory, Academic Press, 1991.
21. B. Srinivasan, *On the indecomposable representations of a certain class of groups*. — Proc. Lond. Math. Soc. **10** (1960), 497–513.

Kukharev A. V., Puninski G. E. Serial group rings of finite groups. p-nilpotency.

We prove that for every finite p-nilpotent group G with a cyclic p-Sylow subgroup and any field of characteristic p, the group ring FG is serial. As a corollary we show that the group ring of a finite group oven an arbitrary field of characteristic 2 is serial if and only if its 2-Sylow subgroup is cyclic.

Кафедра высшей алгебры и защиты информации,
механико-математический факультет
Белорусского государственного университета,
пр. Независимости 4, Минск 220030, Беларусь

E-mail: `kukharev.av@mail.ru, punins@mail.ru`

Поступило 24 апреля 2013 г.