Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

И. Б. Жуков

ВЕТВЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТАРНО АБЕЛЕВЫХ РАСШИРЕНИЙ

Данная работа связана с изучением ветвления в расширениях полных дискретно нормированных полей L/K с несовершенным полем вычетов. Заметим (см. обсуждение в [5]), что для эффективной работы с промежуточными расширениями, вычисления ветвления композитов и т.п., недостаточно рассматривать классические инварианты ветвления (скачки ветвления в верхней или нижней нумерации, порядок дифференты и т.п.), и стоит задача полного описания ветвления L/K, которое, по-видимому, имеет недискретную, геометрическую природу.

Один из подходов к изучению ветвления расширения заключается в рассмотрении различных LK'/K', где расширения K'/K берутся из некоторого фиксированного (достаточно простого) класса. Так, классическая теория устранения высшего ветвления основана на том, что LK'/K' будет слабо неразветвленным (иметь индекс ветвления 1) для некоторого константного расширения K'/K (т.е. для расширения, которое определено над подполем K с совершенным полем вычетов).

Мы предлагаем исследовать возможность получить достаточно полное описание ветвления L/K, рассматривая классические инварианты ветвления всевозможных расширений LK'/K', где K'/K представляют собой конечные элементарно абелевы p-расширения (т.е. абелевы расширения экспоненты p, равной характеристике поля вычетов). Имея в виду эту цель, в данной работе мы изучаем некоторые свойства элементарно абелевых расширений полных дискретно нормированных полей.

В частности, мы доказываем, что глубина ветвления максимального абелева расширения экспоненты p с заданной верхней границей скачков ветвления конечна, и вычисляем эту глубину (в предположении, что полное дискретно нормированное поле K имеет характеристику p и при этом выполняется $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$).

Ключевые слова: полное дискретно нормированное поле, несовершенное поле вычетов, двумерное локальное поле, ветвление.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00588-а.

Обозначения и известные факты

Всюду на протяжении статьи K – полное дискретно нормированное поле характеристики $p > 0$, при этом обозначения $\mathcal{O}_K$, $\mathfrak{m}_K$, $\bar{K}$, v_K имеют стандартный смысл (см., например, [5, 1, 3]); π_K представляет собой произвольный униформизирующий элемент K, если не указано иное. Для $a \in \mathcal{O}_K$ через $\bar{a}$ обозначается его класс вычетов в $\bar{K}$. Мы предполагаем, что $[\bar{K} : \bar{K}^p] = p$.

Для циклического расширения L/K степени p через $s(L/K)$ мы обозначаем его (логарифмический) скачок ветвления, то есть число Суона нетривиального автоморфизма σ этого расширения:

$$s(L/K) = \min_{b \in L^*} v_L(b^\sigma/b - 1).$$

Хорошо известно, что если L/K задано уравнением Артина–Шрайера $x^p - x = a$, $v(a) < 0$ и $(p, v(a)) = 1$, то L/K дикое и $s(L/K) = -v(a)$. Если же $v(a) = -pi$, $i > 0$ и $\overline{\pi_K^{pi} a} \notin \bar{K}^p$, то L/K свирепое, и $s(L/K) = i$.

Для натурального числа i обозначим через K_i композит всех расширений L/K таких, что L/K задаётся уравнением $x^p - x = a$, $a \in \mathfrak{m}_K^{-i}$. Если $G = \mathrm{Gal}(K^{(p)}/K)$, где $K^{(p)}/K$ – максимальное абелево расширение K экспоненты p, то в силу сказанного в предыдущем абзаце K_i отвечает i-й подгруппе ветвления Като $G^i \subset G$.

Далее, представим K в виде $F((\pi))$ и для натурального числа i обозначим через $K_{i,F}$ композит всех расширений L/K таких, что L/K задаётся уравнением $x^p - x = a$, $a \in \mathfrak{m}_K^{-i} + \mathfrak{m}_{F((\pi^p))}^{-i}$. Нетрудно видеть, что $K_{i,F}$ зависит от выбора F, но не от выбора π; имеем $K_i \subset K_{i,F} \subset K_{pi}$.

Будем называть C-расширением произвольное бесконечное расширение, являющееся композитом счётного числа циклических расширений степени p.

§1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1.1. *Пусть i – натуральное число, не кратное p. Тогда для любого расширения K'/K степени p такого, что $K' \subset K_i$, $K' \not\subset K_{i-1}$, выполнено $K_i \subset K'_{i,F}$, где F – образ в K' произвольного подполя представителей в поле $\bar{K}$.*

Доказательство. Поскольку $s(K'/K) = i$, можно так выбрать униформизирующие элементы π, π_1 в K и K' соответственно, что $\pi \equiv \pi_1^p \mod \mathfrak{m}_{K_1}^{p+(p-1)i}$. Отсюда получаем, что $\pi^j \equiv \pi_1^{pj} \mod \mathfrak{m}_{K_1}^{pj+(p-1)i}$ для всех целых j. Следовательно,

$$\mathfrak{m}_K^{-i} \subset \mathfrak{m}_{F((\pi_1))}^{-i} + \mathfrak{m}_{K'}^{-i}. \tag{1}$$

□

Следующая лемма представляет собой аналог леммы 3.5 в [3] для свирепого расширения.

Лемма 1.2. *Пусть $K = F((\pi))$ и L/K задаётся уравнением $x^p - x = a$, $a \in \mathfrak{m}_K^{-i} + \mathfrak{m}_{F((\pi^p))}^{-j}$, где i, j – некоторые натуральные числа, $i/p < j \leqslant i$. Предположим, что $\overline{\pi^{pj}a} \notin \bar{K}^p$. Тогда $F \subset \mathcal{O}_L^p + \mathfrak{m}_L^{pj-i}$.*

Доказательство. Пусть $a = \pi^{-pj}d$ и $x = \pi^{-j}t$; тогда $t^p - \pi^{(p-1)j}t = d$, откуда

$$d \in \mathcal{O}_L^p + \mathfrak{m}_L^{(p-1)j} \subset \mathcal{O}_L^p + \mathfrak{m}_L^{pj-i}.$$

Пусть $d' \in F$, $d' \equiv d \mod \mathfrak{m}_K$. Из $a \in \mathfrak{m}_K^{-i} + \mathfrak{m}_{F((\pi^p))}^{-j}$ следует

$$d \in F((\pi^p)) + \mathfrak{m}_K^{pj-i} = F^p[d']((\pi^p)) + \mathfrak{m}_K^{pj-i}.$$

Отсюда нетрудно вывести

$$d' \in F^p[d]((\pi^p)) + \mathfrak{m}_K^{pj-i} \subset \mathcal{O}_L^p + \mathfrak{m}_L^{pj-i}.$$

Остаётся ещё раз воспользоваться тем, что $F = F^p[d']$. □

Лемма 1.3. *Пусть E/K – расширение, и пусть для некоторого натурального i выполнено $E \subset K_{i,F}$, где F – произвольное подполе представителей в поле K, и $E \not\subset K_i$. Выберем минимальное натуральное j такое, что $E \subset K_{pj}$. Тогда для любого расширения K'/K степени p такого, что $K' \subset E$ и $s(K'/K) = j$, выполнено $K_{i,F} \cap K_{pj} \subset K'_i$. (В частности, $E \subset K'_i$.)*

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать $E \not\subset K_{i-1,F}$. Тогда ясно, что $i/p < j \leqslant i$. Пусть L/K – произвольное подрасширение $K_{i,F} \cap K_{pj}$ степени p, тогда L/K можно задать уравнением $x^p - x = a$, где $a \in \mathfrak{m}_K^{-i} + \mathfrak{m}_{F((\pi^p))}^{-j}$. Из леммы 1.2 следует

$$\pi^{pj}a \in \mathcal{O}_{K'}^p + \mathfrak{m}_{K'}^{pj-i},$$

т.е. $\pi^{pj}a \equiv b^p \mod \mathfrak{m}_{K'}^{pj-i}$ для некоторого $b \in \mathcal{O}_{K'}$. Расширение LK'/K' может быть получено присоединением корня уравнения $x^p - x = a - \pi^{-pj}b^p + \pi^{-j}b$. Поскольку $a - \pi^{-pj}b^p + \pi^{-j}b \in \mathfrak{m}_{K'}^{-i}$, мы получаем $LK' \subset K'_i$, откуда $E \subset K'_i$ в силу произвольности выбора L/K. □

Следствие 1.3.1. *Пусть i – натуральное число, не кратное p, E/K – такое расширение, что $E \subset K_i$, $E \not\subset K_{i-1}$. Тогда в E/K можно выбрать подрасширение K''/K степени p или p^2 такое, что $E \subset K_i''$, и при этом $e(K''/K) = p$.*

Доказательство. Пусть K'/K – произвольное подрасширение в E/K степени p такое, что $K' \not\subset K_{i-1}$; ясно, что $e(K'/K) = p$. Из леммы 1.1 следует, что $K_i \subset K'_{i,F}$, где F – образ в K' произвольного подполя представителей в поле K. Рассмотрим два случая.

(1) $E \subset K'_i$. Тогда $K'' = K'$ – искомое.

(2) $E \not\subset K'_i$. Выберем минимальное натуральное j такое, что $E \subset K'_{pj}$ и любое подрасширение K''/K' степени p в E/K' такое, что $s(K''/K') = j$. Тогда $E \subset K''_i$ по лемме 1.3. □

Следствие 1.3.2. *Пусть E/K – C-подрасширение K_i/K при некотором i, причём $[EK_0 : K_0] = \infty$ (т.е. E бесконечно над подполем инерции в E/K). Тогда $e(E/K) = \infty$.*

Доказательство. Последовательно применяя следствие 1.3.1, мы получаем цепочку промежуточных полей

$$K = K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset K^{(2)} \subset \dots, \tag{2}$$

в которой $K^{(j+1)} = (K^{(j)})''$, и $e(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = p$. □

Замечание 1.3.3. Как будет видно из приводимых далее примеров, несепарабельная степень инерции $f_i(E/K)$ может при этом принимать значения от 1 до ∞.

Пример 1.4. Нетрудно построить пример вполне разветвлённого C-подрасширения в K_i/K (i – натуральное число, взаимно простое с p) в случае, когда поле вычетов содержит алгебраическое замыкание (или хотя бы p-замыкание) конечного поля, и в случае, когда K – двумерное локальное поле.

Пусть $K = F((\pi))$. Можно считать $i = 1$.

Построим элементы $f_1, f_2, \ldots \in F^*$ рекуррентно. В случае, когда поле вычетов содержит p-замыкание конечного поля, положим $f_1 = 1$; в случае, когда K – двумерное локальное поле, то есть F представляется в виде $k((t))$, положим $f_1 = t$. Далее, для всех $j = 1, 2, \ldots$ обозначим через y_j любой из корней уравнения $-y_j^p + y_j = f_j^p$, и положим $f_{j+1} = y_j f_1$. (В случае двумерного локального поля имеем $f_j \in tk[[t]]$, и можно взять $y_j = f_j^p + f_j^{p^2} + \cdots$.)

Обозначим через E композит расширений L_j/K, где L_j/K задаётся уравнением $x_j^p - x_j = \pi^{-1} f_j^p$. Тогда легко видеть, что изоморфизм $K \xrightarrow{\sim} L_1$, переводящий π в x_1^{-1}, продолжается до изоморфизма $E/K \xrightarrow{\sim} E/L_1$, при котором L_j переходит в $L_{j+1}L_1$, $j = 1, 2, \ldots$

Несколько сложнее убедиться в существовании примера расширения противоположного типа, а именно, цепочки

$$K = K^{(0)} \subset K^{(1)} \subset K^{(2)} \subset \ldots,$$

в которой $e(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = f_i(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = p$ при всех j (хотя сам пример строится совсем просто). Расширения такого типа (с несколько более строгими ограничениями) мы будем использовать в дальнейшем.

Определение 1.5. *Пусть i – натуральное число, не кратное p. C-расширение E/K будем называть i-полным, если оно представляет собой прямой предел башни расширений*

$$K = K^{(0)} \subset K^{(0+)} \subset K^{(1)} \subset K^{(1+)} \subset \ldots, \tag{3}$$

где все промежуточные расширения имеют степень p, причём все $K^{(j+)}/K^{(j)}$ дикие с $s(K^{(j+)}/K^{(j)}) = i$, а все $K^{(j+1)}/K^{(j+)}$ свирепые с $s(K^{(j+1)}/K^{(j+)}) = i$.

Лемма 1.6. *Пусть $K = F((\pi))$, t – произвольный элемент F, не лежащий в F^p. Обозначим через x_j корень уравнения $x_j^p - x_j = \pi^{-1} t^j$, $j = 1, 2, \ldots$; положим $K^{(j)} = K(x_1, \ldots, x_j)$, $j = 0, 1, \ldots$. Тогда при всех чётных j расширение $K^{(j+1)}/K^{(j)}$ дикое и $s(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = 1$, а при всех нечётных j расширение $K^{(j+1)}/K^{(j)}$ свирепое и*

$$s(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = 1.$$

В частности, $E = \operatorname{inj\,lim} K^{(j)}$ представляет собой 1-полное расширение K.

Доказательство. Пусть k – любое совершенное подполе в F; поскольку уравнения, задающие расширения $K^{(j)}/K$, определены над $k(t)((\pi))$, а расширения $F/k(t)$ и $k((t))/k(t)$ не содержат собственных несепарабельных конечных подрасширений, можно, не умаляя общности, считать, что $F = k((t))$. Через v обозначим нормирование в $k((t))$.

Используя индукцию по j, мы докажем утверждение леммы при более слабых предположениях: мы будем считать, что x_j – корень уравнения $x_j^p - x_j = \pi^{-1}t_j$, $j = 1, 2, \ldots$, где $t_j \in k[[t]] + \mathfrak{m}_K$ и

$$0 < v(t_1) < v(t_2) < \ldots,$$

причём $v(t_{j+1}) = v(t_j) + 1$ при нечётных j.

Очевидно, $K^{(1)}/K$ дикое со скачком 1. Пусть $\pi_1 = x_1^{-1}$. Тогда расширение $K^{(2)}/K^{(1)}$ задаётся уравнением

$$x_2^p - x_2 = \frac{t_2}{t_1}(\pi_1^{-p} - \pi_1^{-1}),$$

откуда видно, что $K^{(2)}/K^{(1)}$ свирепое со скачком p. Положим $x_2 = \pi^{-1}\tau$; тогда $K^{(2)} = k((\tau))((\pi_1))$.

Поскольку доказываемое утверждение не зависит от выбора локального параметра t в $k[[t]]$, мы можем считать $t = t_2/t_1$. Тогда из

$$(\pi_1^{-1}\tau)^p - \pi_1^{-1}\tau = \pi_1^{-p}t - \pi_1^{-1}t$$

получаем $t = \tau^p + \pi_1^{p-1}(t - \tau) = \tau^p + \pi_1^{p-1}(-\tau + \tau^p) + O(\pi_1^{2p-2})$.

Для каждого $j \geqslant 3$ положим $t_j/t_1 = g_j(t)$, где $g_j \in k[[X]]$. Имеем

$$\begin{aligned}
\pi^{-1}t_j &= (\pi_1^{-p} - \pi_1^{-1})g_j(t)\\
&= (\pi_1^{-p} - \pi_1^{-1})g_j(\tau^p + \pi_1^{p-1}(-\tau + \tau^p) + O(\pi_1^{2p-2}))\\
&\equiv (\pi_1^{-p} - \pi_1^{-1})g_j(\tau^p) + \pi_1^{-1}g_j'(\tau^p)(-\tau + \tau^p) \mod \mathcal{O}_{K^{(2)}}\\
&\equiv \pi_1^{-1}\tilde{t}_{j-2} \mod \wp(K^{(2)}) + \mathcal{O}_{K^{(2)}},
\end{aligned}$$

где

$$\tilde{t}_{j-2} = g_j^{\Delta^{-1}}(\tau) - g_j(\tau^p) + g_j'(\tau^p)(-\tau + \tau^p);$$

символ Δ^{-1} означает, что к коэффициентам ряда применён обратный автоморфизм Фробениуса поля k, а $\wp = X^p - X$. Осталось заметить, что порядок v_τ ряда $\tilde{t}_{j-2}$ (рассматриваемого по модулю $\pi_1\mathcal{O}_{K^{(2)}}$, т.е. как элемент $k[[\tau]]$) равен $v(t_j) - v(t_1)$, откуда

$$0 < v_\tau(\tilde{t}_1) < v_\tau(\tilde{t}_2) < \ldots,$$

и $v_\tau(\tilde{t}_{j+1}) = v_\tau(\tilde{t}_j) + 1$ при нечётных j. □

Следствие 1.6.1. *Пусть i – натуральное число, не кратное p. Тогда у K есть i-полное C-расширение.*

Доказательство. Пусть $K = F((\pi))$; по лемме 1.6 у поля $F((\pi^i)) \subset K$ есть 1-полное C-расширение $E/F((\pi^i))$. Тогда EK/K – искомое. □

§2. Глубина ветвления

Напомним, что для конечного сепарабельного расширения полных дискретно нормированных полей M/K и промежуточного поля L глубина ветвления $d_K(M/L)$ определяется как

$$d_K(M/L) = \inf_{a \in M}(v_K(\operatorname{Tr}_{M/L} a) - v_K(a)),$$

где v_K – ненормализованное продолжение дискретного нормирования поля K на M.

Важнейшие свойства глубины ([2]):

(a) $d_K(M/L) \geqslant 0$; при этом $d_K(M/L) = 0$, если и только если M/L ручное;

(b) если L/K циклическое степени p, то $d_K(L/K) = \frac{p-1}{e(L/K)} s(L/K)$;

(c) если M/L, N/M – конечные расширения, то

$$d_K(N/L) = d_K(N/M) + d_K(M/L);$$

(d) если M/L, L'/L – конечные расширения, то

$$d_K(ML'/L') \leqslant d_K(M/L)$$

([4, предложение 3.1]).

Для бесконечного сепарабельного расширения E/L глубина ветвления определяется как

$$d_K(E/L) = \sup_{M \subset E,\, [M:L] < \infty} d_K(M/L) \leqslant \infty.$$

Вышеприведённое свойство (c) сохраняет силу при бесконечном N/M.

Предложение 2.1. *Пусть E/K – C-подрасширение в K_i/K, где i – натуральное число, не кратное p. Тогда:*

(1) $d_K(E/K) \leqslant 2i$*;*

(2) $d_K(E/K) = 2i$*, если и только если E/K является i-полным.*

Доказательство. В цепочке (2) рассмотрим звено $K^{(j+1)}/K^{(j)}$. Если это расширение степени p, то

$$d_K(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = e(K^{(j)}/K)^{-1} \frac{p-1}{p} s(K^{(j+1)}/K^{(j)}) \leqslant \frac{p-1}{p^{j+1}} i,$$

поскольку $K^{(j+1)} \subset (K^{(j)})_i$. Если же $[K^{(j+1)} : K^{(j)}] = p^2$, то в $K^{(j+1)}/K^{(j)}$ есть промежуточное поле $K' = K^{(j+)}$ такое, что $K'/K^{(j)}$

дикое с $s(K'/K^{(j)}) \leqslant i$, а $K^{(j+1)}/K'$ свирепое с $s(K^{(j+1)}/K') \leqslant i$. В этом случае

$$d_K(K^{(j+1)}/K^{(j)}) = d_K(K^{(j+1)}/K') + d_K(K'/K^{(j)}) \leqslant 2\frac{p-1}{p^{j+1}}i.$$

Следовательно,

$$d_K(E/K) = \sum_{j=0}^{\infty} d_K(K^{(j+1)}/K^{(j)}) \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2\frac{p-1}{p^{j+1}}i = 2i.$$

При этом равенство имеет место в том и только том случае, если все $K^{(j+1)}/K^{(j)}$ имеют степень p^2, причём все $K^{(j+)}/K^{(j)}$ дикие с $s(K^{(j+)}/K^{(j)}) = i$, а все $K^{(j+1)}/K^{(j+)}$ свирепые с $s(K^{(j+1)}/K^{(j+)}) = i$, откуда следует, что E/K – i-полное расширение. (Обратная импликация очевидна.) $\square$

Теорема 2.2. *Пусть i – натуральное число, не кратное p. Тогда*

$$d_K(K_i/K) = 2i.$$

Доказательство. Поскольку K_i/K содержит i-полное C-подрасширение, выполнено $d_K(K_i/K) \geqslant 2i$. Для доказательства обратного неравенства возьмём произвольное конечное подрасширение M/K в K_i/K; пусть $[M : K] = p^n$. Зафиксируем i-полное C-подрасширение E/K в K_i/K вместе с соответствующей башней (3). Применяя поочередно леммы 1.1 и 1.3, получаем, что $MK^{(N)} \subset (K^{(N)})_i$ при всех натуральных N. Из свойства (d) глубины ветвления легко следует

$$d_{K^{(N)}}(MK^{(N)}/K^{(N)}) \leqslant n \cdot \frac{p-1}{p}i,$$

откуда

$$\begin{aligned} d_K(M/K) &\leqslant d_K(MK^{(N)}/K) \\ &= d_K(MK^{(N)}/K^{(N)}) + d_K(K^{(N)}/K) \\ &\leqslant p^{-N} d_{K^{(N)}}(MK^{(N)}/K^{(N)}) + d_K(E/K) \\ &\leqslant p^{-N} \cdot n \cdot \frac{p-1}{p}i + 2i. \end{aligned}$$

Поскольку данное неравенство должно выполняться при всех натуральных N, получаем $d_K(M/K) \leqslant 2i$, откуда $d_K(K_i/K) \leqslant 2i$ в силу произвольности M. $\square$

Литература

1. I. B. Fesenko, S. V. Vostokov, *Local fields and their extensions. A constructive approach.* Second edition, AMS, Providence, RI, 2002.
2. O. Hyodo, *Wild ramification in the imperfect residue field case.* — Adv. Stud. Pure Math. **12** (1987), 287–314.
3. Е. Ф. Лысенко, *Ветвление циклического расширения степени p^2 полного дискретно нормированного поля простой характеристики p с несовершенным полем вычетов.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **413** (2013), ??–??.
4. С. В. Востоков, И. Б. Жуков, Г. К. Пак, *Расширения с почти максимальной глубиной ветвления.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **265** (1999), 77–109.
5. L. Xiao, I. Zhukov, *Ramification in the imperfect residue field case, approaches and questions.* `http://math.usask.ca/fvk/Xiao-Zhukov.pdf`, to appear in Proc. Second Int. Conf. and Workshop on Valuation Theory.

Zhukov I. B. Ramification in elementary abelian extensions.

The paper is devoted to some properites of ramification invariants in infinite abelian extensions of exponent p for a class of complete discrete valuation fields that includes 2-dimensional local fields of prime characteristic p. In particular, it is proved that the maximal such extension with prescribed upper bound of ramification breaks has finite depth of ramification, and this depth is computed.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: igor.zhukov@mail.ru

Поступило 17 апреля 2013 г.