Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

А. И. Генералов

КОГОМОЛОГИИ ХОХШИЛЬДА АЛГЕБР ПОЛУДИЭДРАЛЬНОГО ТИПА. IV. АЛГЕБРА КОГОМОЛОГИЙ ДЛЯ СЕРИИ $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ ПРИ $c=0$

§1. Введение

Настоящая работа является продолжением работы автора [1], в которой для алгебр полудиэдрального типа из серии $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$, представленной в известной классификации К. Эрдман [2], были вычислены группы когомологий Хохшильда для случая, когда основное поле имеет характеристику 2. Здесь мы описываем алгебру когомологий Хохшильда $\mathrm{HH}^*(R)$ для таких алгебр при дополнительном ограничении, что параметр c, входящий в определяющие соотношения рассматриваемых алгебр, равен нулю. Ввиду [3] мы получаем также описание алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ для некоторых алгебр, принадлежащих ещё одной серии "двухвершинных" алгебр полудиэдрального типа. Кроме того, с помощью основного результата работы мы даём уточнение упомянутой классификации К. Эрдман для рассматриваемых алгебр полудиэдрального типа.

Методы вычисления алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$, применённые в этой работе, ранее были использованы для некоторых других серий алгебр диэдрального, полудиэдрального и кватернионного типов из классификации К. Эрдман; см. [4–12]. Эти же методы были также применены к другим семействам алгебр: самоинъективным алгебрам конечного типа представления [13–22], алгебрам Лю–Шульца [23], целочисленным групповым кольцам диэдральных и полудиэдральных групп [24, 25].

Ключевые слова: алгебра когомологий Хохшильда, алгебры полудиэдрального типа, бимодульная резольвента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902) и частично поддержана НИР 6.38.74.2011 Санкт-Петербургского государственного университета "Структурная теория и геометрия алгебраических групп и их приложения в теории представлений и алгебраической K-теории", а также грантом 13-01-91150-ГФЕН$_a$ "Локализационные методы в алгебраической K-теории, теории алгебраических групп и арифметике".

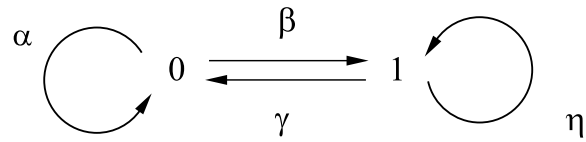
При вычислении умножений в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ мы используем построенную в [1] бимодульную резольвенту. Отметим, что эта резольвента была описана для рассматриваемых алгебр без каких-либо ограничений на характеристику основного поля.

Кратко опишем структуру работы. В §2 приведены некоторые вспомогательные сведения, а также описываются базисы пространств $\mathrm{HH}^i(R)$ при $i \leqslant 5$ для рассматриваемых алгебр. §3 содержит формулировки основных результатов работы, а их доказательства приведены в §4.

§2. Предварительные сведения

Пусть $R = SD(2B)_2(k,t,c)$, где $k \geqslant 2, t \geqslant 3$. Таким образом, алгебра R определяется следующим колчаном с соотношениями:

$Q^{(\mathcal{B})}$:



$$\left.\begin{array}{c}\eta\beta = \beta\alpha(\gamma\beta\alpha)^{k-1},\ \ \gamma\eta = \alpha\gamma(\beta\alpha\gamma)^{k-1},\ \ \beta\gamma = \eta^{t-1},\\ \alpha^2 = c(\alpha\gamma\beta)^k,\ \ \eta^2\beta = 0,\ \ \gamma\eta^2 = 0.\end{array}\right\} \tag{2.1}$$

Далее всюду предполагается, что $c = 0$, а характеристика основного (алгебраически замкнутого) поля K равна 2.

Мы используем следующую интерпретацию произведения Йонеды в алгебре $\mathrm{HH}^*(R) = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathrm{Ext}^m_\Lambda(R,R)$, ранее применявшуюся нами в [4]. Пусть $\mu\colon Q_\bullet \to R$ – минимальная Λ-проективная резольвента бимодуля R, построенная в [1]. Рассмотрим комплекс

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_\bullet, R) = \big(\mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R), \delta^n\big);$$

здесь δ^n – дифференциалы, индуцированные дифференциалами резольвенты $Q_\bullet$. Тогда для коциклов $f \in \mathrm{Ker}\,\delta^n$ и $g \in \mathrm{Ker}\,\delta^t$ имеем $\mathrm{cl}\,g \cdot \mathrm{cl}\,f = \mathrm{cl}\,(\mu\mathrm{T}^0(g)\mathrm{T}^t(f))$, где $\mathrm{T}^i(h)$ обозначает i-ю трансляцию коцикла h. В дальнейшем мы будем описывать трансляции $\mathrm{T}^i(h)$ $(i \geqslant 0)$ с помощью матриц, соответствующих стандартным разложениям модулей Q_i (см. [1, (2.2)]).

Наряду с этой резольвентой был рассмотрен подкомплекс $X_\bullet \subset Q_\bullet$ такой, что для $0 \leqslant n \leqslant 3$ $X_n = Q_n$, а при $n \geqslant 4$ $X_n = P^2_{00}$ – это

первые два прямых слагаемых в стандартном разложении Q_n. Тогда справедливо следующее утверждение (см. [1, предложение 2.2]).

Предложение 2.1. *Имеет место короткая точная последовательность комплексов*

$$0 \to X_\bullet \xrightarrow{i} Q_\bullet \xrightarrow{\pi} Q_\bullet[-4] \to 0,$$

расщепляющаяся в каждой степени.

Мы сохраним бóльшую часть обозначений из статьи [1], в частности, будем использовать следующие краткие обозначения для некоторых элементов алгебры R:

$$a := \alpha\gamma\beta,\ b := \beta\alpha\gamma,\ g := \gamma\beta\alpha.$$

Отметим также, что из [2, лемма IX.1.2] вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.2. *Пространство* $\mathrm{HH}^0(R)$ *допускает в качестве* K*-базиса следующее множество*

$$\begin{gathered}\{a^i + g^i + b^i \mid 1 \leqslant i \leqslant k-1\} \cup \{\eta^i \mid 2 \leqslant i \leqslant t\} \\ \cup\{1,\ \alpha g^{k-1} + \eta,\ \gamma\beta a^{k-1},\ a^k\}.\end{gathered} \tag{2.2}$$

При исследовании групп когомологий Хохшильда более высоких степеней мы будем накладывать дополнительные ограничения на параметры k и t, а именно, мы будем различать 4 случая, зависящих от чётности или нечётности этих параметров.

В следующих нескольких утверждениях мы приведём K-базисы пространств $\mathrm{HH}^i(R)$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Эти утверждения непосредственно вытекают из описаний K-базисов пространств $\operatorname{Ker}\delta^i$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ и $\operatorname{Im}\delta^i$ $(i = 0, 1, 2, 3)$ в работе [1, §3].

Предложение 2.3. *Предположим, что* k *и* t *нечётны. Тогда:*

(a) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.3}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 2 \leqslant i \leqslant t, \tag{2.4}$$

$$\big(e_0, \mathrm{O}_2, b^{k-1}\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big), \tag{2.5}$$

$$\big(\alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big); \tag{2.6}$$

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\big(0, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant k-2, \tag{2.7}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant t-2, \tag{2.8}$$

$$(e_0, \mathrm{O}_3),\ (\alpha, \mathrm{O}_3),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big),\ \big(0, \beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big); \tag{2.9}$$

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\big(0, \alpha g^i, 0\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.10}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 0 \leqslant i \leqslant t-1, \tag{2.11}$$

$$(e_0, \mathrm{O}_2),\ (\alpha, \mathrm{O}_2),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_2\big), \tag{2.12}$$

$$\big(0, e_0, 0\big),\ \big(0, \gamma\beta a^{k-1}, 0\big),\ \big(0, a^k, 0\big); \tag{2.13}$$

(г) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$(e_0, \mathrm{O}_3),\ (\alpha, \mathrm{O}_3),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big), \tag{2.14}$$

$$\big(0, e_0, \mathrm{O}_2\big),\ \big(0, \alpha, \mathrm{O}_2\big),\ \big(0, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big),\ \big(0, a^k, \mathrm{O}_2\big), \tag{2.15}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, a^i + g^i, b^i\big), \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.16}$$

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big), \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant t-1, \tag{2.17}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, e_0, e_1\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \alpha g^{k-1}, \eta\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, 0\big),\ \big(\mathrm{O}_2, a^k, 0\big). \tag{2.18}$$

Предложение 2.4. *Предположим, что* k *нечётно, а* t *чётно. Тогда:*

(а) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.3), (2.5), *а также когомологических классов следующих элементов*:

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 3 \leqslant i \leqslant t, \tag{2.19}$$

$$\big(\alpha, 0, \gamma, \eta\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \gamma\eta, \eta^2\big); \tag{2.20}$$

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.7)–(2.9)*;*

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в*

(2.10), (2.12), (2.13), *а также когомологических классов следующих элементов*:

$$\big(\mathrm{O}_2, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant t-1, \tag{2.21}$$

$$(0, \alpha, e_1); \tag{2.22}$$

(г) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.14)–(2.18).

Предложение 2.5. *Предположим, что* k *чётно, а* t *нечётно. Тогда:*

(а) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.3), (2.4), (2.5), *а также когомологического класса элемента*

$$\big(\alpha, \mathrm{O}_3\big); \tag{2.23}$$

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.7)–(2.9);

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.10), (2.12), (2.13), (2.21), *а также когомологического класса элемента*

$$(0, \alpha, 0); \tag{2.24}$$

(г) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.14)–(2.18).

Предложение 2.6. *Предположим, что* k *и* t *чётны. Тогда:*

(а) *пространство* $\mathrm{HH}^1(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.3), (2.5), *а также когомологических классов элементов*:

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 3 \leqslant i \leqslant t, \tag{2.25}$$

$$\big(\alpha, \mathrm{O}_3\big), \ \big(\mathrm{O}_2, \gamma, \eta\big), \ \big(\mathrm{O}_2, \gamma\eta, \eta^2\big); \tag{2.26}$$

(б) *пространство* $\mathrm{HH}^2(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.7)–(2.9), *а также когомологического класса элемента*

$$\big(\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big); \tag{2.27}$$

(в) *пространство* $\mathrm{HH}^3(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.10)–(2.13), *а также когомологического класса элемента*

$$(0, \alpha, 0); \tag{2.28}$$

(г) *пространство* $\mathrm{HH}^4(R)$ *имеет в качестве* K*-базиса множество, состоящее из когомологических классов элементов, указанных в* (2.14)–(2.18), *а также когомологического класса элемента*

$$(\mathrm{O}_3, \eta^t). \tag{2.29}$$

Следствие 2.7. (а) $\dim_K \mathrm{HH}^0(R) = k + t + 2$;

(б) $$\dim_K \mathrm{HH}^1(R) = \begin{cases} k+t+2, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно}, \\ k+t+3, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

(в) $$\dim_K \mathrm{HH}^2(R) = \begin{cases} k+t+3, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно}, \\ k+t+4, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

(г) $$\dim_K \mathrm{HH}^3(R) = \begin{cases} k+t+6, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно}, \\ k+t+7, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}; \end{cases}$$

(д) $$\dim_K \mathrm{HH}^4(R) = \begin{cases} k+t+9, & \text{если } k \text{ или } t \text{ нечётно}, \\ k+t+10, & \text{если } k \text{ и } t \text{ чётны}. \end{cases}$$

Отметим также следующее утверждение, доказанное в [1] с использованием предложения 2.1.

Предложение 2.8. *Для* $n \geqslant 5$ *имеет место расщепляющаяся короткая точная последовательность групп*

$$0 \to \mathrm{HH}^{n-4}(R) \xrightarrow{\pi^*} \mathrm{HH}^n(R) \xrightarrow{i^*} \mathrm{H}^n(\mathcal{X}^\bullet) \to 0,$$

где $\mathcal{X}^\bullet = \mathrm{Hom}_\Lambda(X_\bullet, R)$.

Ввиду [1, предложение 1.16] получаем такое

Следствие 2.9. *Пусть* $n = 4\ell + r$, *где* $\ell, r \in \mathbb{N}$ *и* $1 \leqslant r \leqslant 4$. *Тогда*

$$\dim_K \mathrm{HH}^n(R) - \dim_K \mathrm{HH}^r(R) = 8\ell.$$

Наконец, нам понадобится описание группы $\mathrm{HH}^5(R)$.

Предложение 2.10. (1) *Предположим, что k и t нечётны. Тогда пространство* $\mathrm{HH}^5(R)$ *имеет в качестве K-базиса множество, состоящее из когомологических классов следующих элементов*:

$$\big(e_0, \mathrm{O}_5\big),\ \big(\alpha, \mathrm{O}_5\big),\ \big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_5\big),\ \big(a^k, \mathrm{O}_5\big), \tag{2.30}$$

$$\big(0, e_0, \mathrm{O}_4\big),\ \big(0, \alpha, \mathrm{O}_4\big),\ \big(0, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_4\big),\ \big(0, a^k, \mathrm{O}_4\big), \tag{2.31}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant k-1, \tag{2.32}$$

$$\big(\mathrm{O}_5, \eta^i\big) \ \text{ для } \ 2 \leqslant i \leqslant t, \tag{2.33}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_2, b^{k-1}\big),\ \big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big),\ \big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\big), \tag{2.34}$$

$$\big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big). \tag{2.35}$$

(2) *Предположим, что k нечётно, а t чётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^5(R)$ *надо в множестве, указанном в части* (1), *заменить* (*когомологический*) *класс элемента* $\big(\mathrm{O}_5, \eta^2\big)$ *из* (2.33) *на класс элемента* $\big(\mathrm{O}_4, \gamma\eta, \eta^2\big)$, *а класс элемента* $\big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big)$ (*см.* (2.35)) – *на класс элемента* $\big(\mathrm{O}_2, \alpha, 0, \gamma, \eta\big)$.

(3) *Предположим, что k чётно, а t нечётно. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^5(R)$ *надо в множестве, указанном в части* (1), *заменить класс элемента* $\big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big)$ *на класс элемента* $\big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_3\big)$.

(4) *Предположим, что k и t чётны. Тогда для получения базиса пространства* $\mathrm{HH}^5(R)$ *надо к множеству, указанному в части* (3), *добавить класс элемента* $\big(\mathrm{O}_4, \gamma, \eta\big)$ *и заменить класс элемента* $\big(\mathrm{O}_5, \eta^2\big)$ *на класс элемента* $\big(\mathrm{O}_4, \gamma\eta, \eta^2\big)$.

Доказательство. Утверждение следует из [1, предложение 3.16], а также из предложения 2.8 и описания группы $\mathrm{HH}^1(R)$, приведёного выше для различных рассматриваемых случаев. □

Замечание 2.11. В дальнейшем для n-коцикла $x \in \operatorname{Ker}\delta^n$ его когомологический класс $\operatorname{cl} x \in \mathrm{HH}^n(R)$ будет удобно обозначать также через x.

§3. Формулировка основного результата

В этом разделе мы приведём основной результат работы, а именно опишем мультипликативную структуру алгебры когомологий Хохшильда для рассматриваемых алгебр.

Сначала мы построим вспомогательные градуированные K-алгебры. Пусть

$$\mathcal{X}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, z\}. \tag{3.1}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_1]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2 = 1,\ \deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2,$$
$$\deg w_1 = \deg w_2 = 3,\ \deg z = 4.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_1(k,t) = K[\mathcal{X}_1]/I_1$, где идеал I_1 порождён следующими элементами:

$$\left.\begin{array}{c} p_1^k + p_2^t,\ p_3^2,\ p_4^2, \\ p_i p_j \ \text{ для } \ 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{array}\right\} \tag{3.2}$$

$$p_1 u_1 + p_2^{t-1} u_2,\ p_2 u_1 + p_1^{k-1} u_2, \tag{3.3}$$

$$p_4 u_1 + p_3 u_2,\ p_4 u_2; \tag{3.4}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_i v_1 \ \text{ для } \ 2 \leqslant i \leqslant 4; \\ p_i v_2 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 4; \\ p_i v_3 \ \text{ для } \ 1 \leqslant i \leqslant 4,\ i \neq 2; \end{array}\right\} \tag{3.5}$$

$$p_1^{k-1} v_1,\ p_2^{t-1} v_3, \tag{3.6}$$

$$u_2^2; \tag{3.7}$$

$$p_3 w_2,\ p_4 w_2, \tag{3.8}$$

$$u_1 v_1 + p_1 w_1,\ u_1 v_2 + p_3 w_1,\ u_1 v_3 + p_2 w_1, \tag{3.9}$$

$$u_2 v_1 + p_1 w_2,\ u_2 v_2 + p_4 w_1,\ u_2 v_3 + p_2 w_2, \tag{3.10}$$

$$p_1 w_1 + p_2^{t-1} w_2,\ p_2 w_1 + p_1^{k-1} w_2; \tag{3.11}$$

$$p_2^t z, \tag{3.12}$$

$$v_1^2 + p_1^2 z,\ v_3^2 + p_2^2 z,\ v_1 v_2,\ v_1 v_3,\ v_2 v_3,\ v_2^2, \tag{3.13}$$

$$u_1 w_2 + p_3 z,\ u_2 w_2 + p_4 z; \tag{3.14}$$

$$v_2 w_1 + p_3 u_1 z, \tag{3.15}$$

$$v_1 w_1 + p_2^{t-1} u_2 z,\ v_3 w_1 + p_1^{k-1} u_2 z, \tag{3.16}$$

$$v_1 w_2 + p_1 u_2 z,\ v_3 w_2 + p_2 u_2 z,\ v_2 w_2; \tag{3.17}$$

$$w_1^2 + u_1^2 z, \tag{3.18}$$

$$w_1 w_2 + v_2 z,\ w_2^2. \tag{3.19}$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_1(k,t)$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_1]$. В дальнейшем мы будем часто алгебру $\mathcal{A}_1(k,t)$ обозначать кратко через $\mathcal{A}_1$.

Далее, рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2', w_3, z\}. \tag{3.20}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_2]$ введем градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2' = \deg u_3 = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2,$$
$$\deg w_1 = \deg w_2' = \deg w_3 = 3,\ \deg z = 4.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_2 = \mathcal{A}_2(k,t) = K[\mathcal{X}_2]/I_2$, где идеал I_2 порождён элементами вида (3.2), (3.5), (3.6), (3.9), (3.12), (3.13), (3.15), (3.18), а также следующими элементами:

$$p_1u_1 + p_2^{t-1}u_2',\ p_2u_1 + p_1^{k-2}u_3,$$
$$p_4u_1 + p_3u_2',\ p_1u_2',\ p_4u_2',$$
$$p_2u_3,\ p_3u_3,\ p_4u_3;$$

$$(u_2')^2,\ u_1u_3,\ u_2'u_3,\ u_3^2;$$

$$p_1w_2',\ p_4w_2',\ p_2w_3,\ p_3w_3,\ p_4w_3,$$
$$u_1v_1 + p_1w_1, p_1w_1 + p_2^{t-1}w_2',$$
$$u_2'v_2 + p_4w_1,\ p_4w_1 + p_3w_2',$$
$$u_1v_3 + p_2w_1,\ p_2w_1 + p_1^{k-3}u_3v_1,$$
$$u_2'v_3 + p_2w_2',\ u_3v_1 + p_1w_3,$$
$$u_2'v_1,\ u_3v_2,\ u_3v_3;$$

$$u_3w_1,\ u_2'w_2',\ u_3w_2',$$
$$u_1w_3,\ u_2'w_3,\ u_3w_3,$$
$$u_1w_2' + u_2'w_1;$$

$$v_1w_1 + p_2^{t-1}u_2'z,\ v_3w_1 + p_1^{k-2}u_3z,$$
$$v_1w_2',\ v_2w_2' + p_4u_1z,\ v_3w_2' + p_2u_2'z,$$
$$v_1w_3 + p_1u_3z,\ \ v_2w_3,\ v_3w_3;$$

$$w_1w_2' + u_1u_2'z,\ (w_2')^2,$$
$$w_1w_3,\ w_2'w_3,\ w_3^2.$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_2$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_2]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2'', u_4, v_1, v_2, v_3, w_1, w_4, w_5, z\}. \tag{3.21}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_3]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2'' = \deg u_4 = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2,$$
$$\deg w_1 = \deg w_4 = \deg w_5 = 3,\ \deg z = 4.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_3(k,t) = K[\mathcal{X}_3]/I_3$, где идеал I_3 порождён элементами вида (3.2), (3.5), (3.6), (3.9), (3.12), (3.13), (3.15), (3.18), а также следующими элементами:

$$p_1u_1 + p_2^{t-2}u_4,\ p_1u_4,\ p_3u_4,\ p_4u_4, \tag{3.22}$$
$$p_2u_1 + p_1^{k-1}u_2'',\ p_4u_1 + p_3u_2'',\ p_2u_2'',\ p_4u_2''; \tag{3.23}$$
$$(u_2'')^2,\ u_1u_4,\ u_2''u_4,\ u_4^2; \tag{3.24}$$
$$p_1w_1 + p_2^{t-2}w_5, p_1w_5,\ p_3w_5,\ p_4w_5, \tag{3.25}$$
$$u_2''v_2 + p_4w_1,\ p_4w_1 + p_3w_4,\ p_2w_4,\ p_4w_4, \tag{3.26}$$
$$p_2w_1 + p_1^{k-1}w_4,\ u_2''v_1 + p_1w_4,\ u_2''v_3, \tag{3.27}$$
$$u_4v_3 + p_2w_5,\ u_4v_1,\ u_4v_2; \tag{3.28}$$
$$u_2''w_1 + u_1w_4, \tag{3.29}$$
$$u_4w_1,\ u_2''w_4,\ u_4w_4,\ u_1w_5,\ u_2''w_5,\ u_4w_5; \tag{3.30}$$
$$v_1w_1 + p_2^{t-2}u_4z,\ v_3w_5 + p_2u_4z, \tag{3.31}$$
$$v_3w_1 + p_1^{k-1}u_2''z,\ v_2w_4 + p_4u_1z, \tag{3.32}$$

$$v_1 w_4 + p_1 u_2'' z,\ v_3 w_4, \tag{3.33}$$

$$v_1 w_5,\ v_2 w_5; \tag{3.34}$$

$$w_1 w_4 + u_1 u_2'' z, \tag{3.35}$$

$$w_1 w_5,\ w_4^2,\ w_4 w_5,\ w_5^2. \tag{3.36}$$

На алгебре $\mathcal{A}_3$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_3]$.

Теперь рассмотрим множество

$$\mathcal{X}_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_2'', v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_4, z\}. \tag{3.37}$$

На алгебре $K[\mathcal{X}_4]$ введём градуировку так, что

$$\deg p_1 = \deg p_2 = \deg p_3 = \deg p_4 = 0,$$
$$\deg u_1 = \deg u_2' = \deg u_2'' = 1,$$
$$\deg v_1 = \deg v_2 = \deg v_3 = 2,$$
$$\deg w_1 = \deg w_2 = \deg w_4 = 3,\ \deg z = 4.$$

Определим градуированную K-алгебру $\mathcal{A}_4 = \mathcal{A}_4(k,t) = K[\mathcal{X}_4]/I_4$, где идеал I_4 порождён элементами вида (3.2), (3.5), (3.9), (3.13), (3.15), (3.18), (3.23), (3.26), (3.27), (3.29), (3.32), (3.33), (3.35), а также следующими элементами, при этом в записи некоторых из них используется константа θ_{2n} основного поля K ($n \in \mathbb{N}$), определённая формулой

$$\theta_{2n} := \sum_{i=1}^{2n} i = \begin{cases} 1, & \text{если } n \text{ нечётно,} \\ 0, & \text{если } n \text{ чётно:} \end{cases} \tag{3.38}$$

$$p_1 u_1 + p_2^{t-1} u_2',$$
$$(u_2')^2 + \theta_t p_2^{t-1} v_3,\ (u_2'')^2 + \theta_k p_2^{t-1} v_3,$$
$$u_2' u_2'',\ p_1^{k-1} v_1 + p_2^{t-1} v_3,$$
$$p_1 w_1 + p_2^{t-1} w_2,\ p_2 w_1 + p_1^{k-1} w_2,$$
$$p_1 w_4 + p_1 w_2,\ u_2' v_3 + p_2 w_2,$$
$$p_3 w_2,\ p_4 w_2,\ p_2 w_4,\ p_4 w_4,$$
$$u_2' w_2 + \theta_t p_2^t z,\ u_2'' w_2 + u_2'' w_4,$$
$$u_2'' w_4 + \theta_k p_2^t z,$$
$$u_2' w_1 + u_2'' w_1,\ u_1 w_2;$$

$$v_1w_1 + p_2^{t-1}u_2'z,\ v_1w_2 + v_1w_4,$$
$$v_3w_2 + p_2u_2'z,\ v_2w_2;$$
$$w_1w_2 + \theta_t p_2^{t-1}v_3z,\ w_2^2 + (\theta_k + \theta_t)p_2^{t-1}v_3z,$$
$$w_2w_4 + w_4^2,\ w_4^2 + \theta_k p_2^{t-1}v_3z.$$

Кроме того, на алгебре $\mathcal{A}_4$ вводится градуировка, индуцированная градуировкой $K[\mathcal{X}_4]$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = SD(2B)_2(k,t,0)$, *где* $k \geqslant 2$, $t \geqslant 3$.

(1) *Если k и t нечётны, то алгебра когомологий Хохшильда* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как градуированная K-алгебра изоморфна алгебре* $\mathcal{A}_1$.

(2) *Если k нечётно, а t чётно, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_2$ *как градуированные K-алгебры.*

(3) *Если k чётно, а t нечётно, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_3$ *как градуированные K-алгебры.*

(4) *Если k и t чётны, то* $\mathrm{HH}^*(R) \simeq \mathcal{A}_4$ *как градуированные K-алгебры.*

Из теоремы 3.1, часть (4), выводится следующее утверждение, дополняющее классификацию К. Эрдман, представленную в книге [2]; в связи с этим смотри также [1, следствие 1.2].

Следствие 3.2. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R_1 = SD(2B)_2(k_1,t_1,0)$, $R_2 = SD(2B)_2(k_2,t_2,0)$, *где* k_1,k_2,t_1,t_2 *чётны, причём*

$$k_1 + t_1 \equiv 0 \pmod 4.$$

Если $k_2 + t_2 = k_1 + t_1$ *и* $k_1 \not\equiv k_2 \pmod 4$, *то алгебры* R_1 *и* R_2 *не производно эквивалентны (и, в частности, не Морита-эквивалентны).*

Эти результаты будут доказаны в следующем разделе.

Кроме того, ещё одно следствие основной теоремы мы получаем непосредственно, используя классификацию “по модулю” производной эквивалентности, полученную в [3, предложение 3.3.1] (см. также [26]) для алгебр полудиэдрального типа. А именно, алгебра $SD(2\mathcal{A})_1(k,c)$ при $k \geqslant 3$ производно эквивалентна алгебре $SD(2\mathcal{B})_2(2,k,c)$ (определение серии $SD(2\mathcal{A})_1(k,c)$ см. в [2]).

Следствие 3.3. *Пусть* $\operatorname{char} K = 2$, *и пусть* $R = SD(2\mathcal{A})_1(k,0)$, $k \geqslant 3$. *Тогда*

$$\mathrm{HH}^*(R) \simeq \begin{cases} \mathcal{A}_3(2,k), & \text{если } k \text{ нечётно}, \\ \mathcal{A}_4(2,k), & \text{если } k \text{ чётно}. \end{cases}$$

§4. Образующие и соотношения

Случай 1. Предположим, что k и t нечётны. Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : $p_1 := a + g + b,\ p_2 := \alpha g^{k-1} + \eta,$

$$p_3 := \gamma\beta a^{k-1},\ p_4 := a^k; \tag{4.1}$$

— степени 1 : $$u_1 := (e_0, \mathrm{O}_2, b^{k-1}),\ u_2 := (\alpha, \mathrm{O}_2, \eta); \tag{4.2}$$

— степени 2 : $v_1 := (0, \beta\alpha, \alpha\gamma, 0),\ v_2 := (0, \beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2),$

$$v_3 := (\mathrm{O}_3, e_1); \tag{4.3}$$

— степени 3 : $$w_1 := (0, e_0, 0),\ w_2 := (\mathrm{O}_2, e_1); \tag{4.4}$$

— степени 4 : $$z := (\mathrm{O}_2, e_0, e_1). \tag{4.5}$$

Предложение 4.1. *Предположим, что* k *и* t *нечётны. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_1 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, z\} \tag{4.6}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются следующие соотношения*:

$$\left.\begin{array}{c} p_1^k = p_2^t,\ p_3^2 = p_4^2 = 0, \\ p_i p_j = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i < j \leqslant 4; \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

$$p_1 u_1 = p_2^{t-1} u_2,\ p_2 u_1 = p_1^{k-1} u_2, \tag{4.8}$$

$$p_4 u_1 = p_3 u_2,\ p_4 u_2 = 0; \tag{4.9}$$

$$\left.\begin{array}{c} p_i v_1 = 0 \quad \text{для} \quad 2 \leqslant i \leqslant 4; \\ p_i v_2 = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 4; \\ p_i v_3 = 0 \quad \text{для} \quad 1 \leqslant i \leqslant 4,\ i \neq 2; \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

$$p_1^{k-1} v_1 = p_2^{t-1} v_3 = 0, \tag{4.11}$$

$$u_2^2 = 0; \tag{4.12}$$

$$p_3 w_2 = p_4 w_2 = 0, \tag{4.13}$$

$$u_1 v_1 = p_1 w_1,\ u_1 v_2 = p_3 w_1,\ u_1 v_3 = p_2 w_1, \tag{4.14}$$

$$u_2v_1 = p_1w_2,\ u_2v_2 = p_4w_1,\ u_2v_3 = p_2w_2; \tag{4.15}$$

$$p_1w_1 = p_2^{t-1}w_2,\ p_2w_1 = p_1^{k-1}w_2, \tag{4.16}$$

$$p_2^t z = 0, \tag{4.17}$$

$$v_1^2 = p_1^2 z,\ v_3^2 = p_2^2 z,\ v_1v_2 = v_1v_3 = v_2v_3 = v_2^2 = 0, \tag{4.18}$$

$$u_1w_2 = p_3 z,\ u_2w_2 = p_4 z, \tag{4.19}$$

$$v_2w_1 = p_3u_1z, \tag{4.20}$$

$$v_1w_1 = p_2^{t-1}u_2z,\ v_3w_1 = p_1^{k-1}u_2z, \tag{4.21}$$

$$v_1w_2 = p_1u_2z,\ v_3w_2 = p_2u_2z,\ v_2w_2 = 0, \tag{4.22}$$

$$w_1^2 = u_1^2 z, \tag{4.23}$$

$$w_1w_2 = v_2z,\ w_2^2 = 0. \tag{4.24}$$

Доказательство. Соотношения (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), (4.11), (4.13), (4.17) проверяются непосредственно. Для доказательства остальных соотношений необходимо вычислить трансляции подходящих порядков для элементов из $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень.

Из предложения 2.1 непосредственно вытекает следующее утверждение.

Лемма 4.2. *Для любого $i \geqslant 0$ проекция на прямое слагаемое $\pi_{i+4}\colon Q_{i+4} = X_{i+4} \oplus Q_i \to Q_i$ является i-ой трансляцией $\mathrm{T}^i(z)$ коцикла $z = \mu \circ \pi_0$ (см. (4.5)).*

Необходимые трансляции остальных элементов из $\mathcal{Y}_1$ представлены в следующей лемме.

Лемма 4.3. *В качестве трансляций элементов из $\mathcal{Y}_1 \setminus \{z\}$, имеющих положительную степень, можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(u_1) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{k-1} \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_1) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \gamma b^{k-2-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^{k-1-i} \otimes g^i & \star & 0 \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i \otimes b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma b^{k-2} \otimes \eta^{t-2} & b^{k-1} \otimes \eta^{t-3} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_1))_{23} = \sum_{i=0}^{k-2} \alpha\gamma b^{k-2-i} \otimes \gamma b^i + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma b^i \otimes \alpha\gamma b^{k-2-i};$$

$$\mathrm{T}^0(u_2) = \begin{pmatrix} \alpha\otimes 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2) = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)\beta a^i\otimes g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1}(i+1)b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i\otimes\alpha\gamma b^{k-2-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^i\otimes\beta\alpha g^{k-2-i} & \star & 0 \\ 0 & e_1\otimes\beta & \gamma\otimes e_1 & \sum\limits_{i=1}^{t-2} i\eta^i\otimes\eta^{t-2-i} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_2))_{33} = \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} + e_0 \otimes \eta;$$

$$\mathrm{T}^0(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & \beta\alpha\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\otimes e_1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & (a+g)\otimes e_0 & 0 \\ 0 & \alpha\gamma\otimes\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta\alpha\otimes e_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_1) = \begin{pmatrix} 0 & (a+g)\otimes e_0 & \gamma\beta\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\otimes\gamma\beta+\gamma\otimes g & b\otimes\gamma \\ 0 & 0 & 0 & \beta\alpha\otimes\eta^{t-1} \\ 0 & 0 & \alpha\gamma b^{k-1}\otimes\beta\alpha & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & \beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \beta a^{k-1}\otimes e_1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_2) = \begin{pmatrix} 0 & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\beta\otimes\beta a^{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & \gamma b^{k-1}\otimes\beta\alpha g^{k-1} & b^{k-1}\otimes\eta^t \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^0(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(v_3) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{j=0}^{k-1} b^j \otimes \alpha\gamma b^{k-1-j} \\ 0 & 0 & \star & \eta\beta \otimes e_1 \\ 0 & 0 & 0 & \eta \otimes \eta \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(v_3))_{13} = a^k \otimes \gamma\beta a^{k-2} + \gamma\beta a^{k-2} \otimes a^k,$$

$$(\mathrm{T}^2(v_3))_{23} = \sum_{j=0}^{k-1} \alpha\gamma b^j \otimes a^{k-1-j},$$

$$(\mathrm{T}^2(v_3))_{33} = \sum_{j=0}^{k-1} g^j \otimes \beta\alpha g^{k-1-j} + a \otimes \beta\alpha g^{k-2};$$

$$\mathrm{T}^0(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & e_0 \otimes e_0 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} & 0 \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b^{k-1} \otimes \eta^{t-2} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{23} = \sum_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \otimes a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} \gamma b^i \otimes g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_1))_{33} = \sum_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \beta a^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} a^i \otimes \beta a^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \otimes e_0 & \star & 0 & e_1 \otimes \gamma b^{k-1} \\ 0 & 0 & e_0 \otimes \beta & 0 & \star & \beta\alpha g^{k-2} \otimes \eta^{t-1} \\ 0 & 0 & \star & \star & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^2(w_1))_{35} =& (g^{k-1} + a^{k-1}) \otimes \eta^{t-2}, \\
(\mathrm{T}^2(w_1))_{43} =& \sum_{j=0}^{k-2} \alpha\gamma b^j \otimes \beta\alpha g^{k-2-j}, \\
(\mathrm{T}^2(w_1))_{44} =& \sum_{j=0}^{k-1} b^j \otimes \beta a^{k-1-j} + \eta^{t-1} \otimes \beta\alpha g^{k-2}, \\
(\mathrm{T}^2(w_1))_{24} =& \begin{cases} \eta^{t-2} \otimes a^{k-1}, & \text{если } t > 3, \\ \eta \otimes a^{k-1} + \eta^3 \otimes \alpha g^{k-2}, & \text{если } t = 3; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^3(w_1) = \begin{pmatrix} 0 & e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0 \otimes e_0 & \star & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}
(\mathrm{T}^3(w_1))_{24} =& \sum_{i=0}^{k-2} \beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i}, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{34} =& \sum_{i=0}^{k-1} b^i \otimes \beta a^{k-1-i} + \beta\gamma \otimes \beta\alpha g^{k-2}, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{36} =& \eta^{t-2} \otimes b^{k-1} + b^{k-1} \otimes \eta^{t-2}, \\
(\mathrm{T}^3(w_1))_{26} =& \begin{cases} 0, & \text{если } t > 3, \\ \beta a^{k-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-2} + \beta a^{k-2} \otimes \alpha\gamma b^{k-1}, & \text{если } t = 3; \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^0(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i \otimes \alpha\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta\alpha g^i \otimes b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{t-1} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{t-1-i} \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{13} = \sum_{i=1}^{k-1} ia^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{23} = \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-1} (i+1)\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_2))_{33} = \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} ig^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{t-1} \otimes e_0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma\beta \otimes e_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \eta^2 \otimes e_1 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{16} = \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1},$$
$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{26} = \eta \otimes \gamma + e_1 \otimes \gamma\eta,$$
$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{45} = \gamma\eta \otimes e_1 + \gamma \otimes \eta;$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma\beta a^{k-1} \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-2} ia^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{24} = \sum_{i=0}^{k-1}(i+1)\beta a^i \otimes g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{34} = \sum_{i=1}^{k-2} ib^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \eta \otimes \beta + e_1 \otimes \eta\beta,$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{35} = \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-1-i} + \gamma \otimes \eta + \gamma\eta \otimes e_1,$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{36} = \sum_{i=2}^{t-3}(i+1)\eta^i \otimes \eta^{t-1-i}.$$

Доказательство леммы состоит в прямой проверке соотношений $\mu\mathrm{T}^0(x) = x$, $d_{i-1}\mathrm{T}^i(x) = \mathrm{T}^{i-1}(x)d_{i+\deg x}$ $(i > 0)$ для $x \in \mathcal{Y}_1 \setminus \{z\}$ с $\deg x > 0$.

Замечание 4.4. Для дальнейшего важно заметить, что формулы для трансляций элементов $u_1, v_1, v_2, v_3, w_1, z$ остаются справедливыми для произвольных k и t (эти элементы будут включаться в множество образующих алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$ и в остальных рассматриваемых ниже случаях). Кроме того, формула для трансляции $\mathrm{T}^1(w_2)$ справедлива и для случая, когда k и t чётны (см. ниже “Случай 4”); этим объясняется наличие в формулах для элементов матрицы $\mathrm{T}^1(w_2)$ некоторых казалось бы “лишних” нулевых слагаемых.

Теперь доказательство предложения 4.1 завершается с помощью прямых вычислений с матрицами, приведёнными в лемме 4.3, и эту проверку мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 4.5. *Предположим, что k и t нечётны. Множество $\mathcal{Y}_1$, указанное в* (4.6)*, порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

При доказательстве этого предложения в некоторых вычислениях нам понадобится знание степеней u_1^i при $i \geqslant 2$, и мы для этого сформулируем следующую лемму, доказываемую прямыми вычислениями (ср. лемму 4.3).

Лемма 4.6. *В качестве трансляций* $\mathrm{T}^i(\widetilde{v})$ *элемента* $\widetilde{v} := u_1^2$ *можно взять отображения, задаваемые следующими матрицами:*

$$\mathrm{T}^0(\widetilde{v}) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(\widetilde{v}) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & \sum\limits_{i=0}^{k-2} \gamma\beta a^i \otimes \gamma\beta a^{k-2-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} \gamma b^i \otimes a^{k-1-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1} g^i \otimes \beta a^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(\widetilde{v}) = \begin{pmatrix} e_0 \otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma \otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & e_0 \otimes \beta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma b^{k-1} \otimes \beta a^{k-1} & 0 \end{pmatrix};$$

кроме того, трансляции $\mathrm{T}^r(\widetilde{v})$ *для* $r \geqslant 3$ *можно выбрать так, что их матрицы имеют следующий блочный вид*

$$\mathrm{T}^r(\widetilde{v}) = \begin{pmatrix} \mathrm{id}_{P_{00}^2} & \star \\ \mathrm{O} & \star \end{pmatrix},$$

где $\mathrm{id}_{P_{00}^2}$ *— матрица тождественного отображения модуля* P_{00}^2.

Замечание 4.7. Отметим, что утверждение леммы 4.6 справедливо без каких-либо ограничений на параметры k и t.

Доказательство предложения 4.5. Пусть $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_1 \cup \{1\}$ (здесь 1 – единица алгебры $\mathrm{HH}^*(R)$). Мы сначала докажем, что $\bigcup\limits_{i=0}^{5} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, а затем с помощью индукции по n установим включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$.

Поскольку для элементов вида $a^i + g^i + b^i$, η^j из (2.2) имеем соотношения

$$a^i + g^i + b^i = p_1^i \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,$$
$$\eta^j = p_2^j \text{ для } 2 \leqslant j \leqslant t,$$

то $\mathrm{HH}^0(R) \subset \mathcal{H}$. Для базисных элементов из $\mathrm{HH}^1(R)$, описанных в предложении 2.3, часть (а), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(\alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) = p_1^i u_2 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) = p_2^{i-1} u_2 \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant t,\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1}\,\mathrm{O}_3\big) = p_3 u_1,\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big) = p_4 u_1,
\end{aligned}$$

и потому $\mathrm{HH}^1(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для базисных элементов из $\mathrm{HH}^2(R)$, описанных в предложении 2.3, часть (б), справедливы соотношения

$$\begin{aligned}
&\big(0, \beta\alpha g^i, \alpha\gamma b^i, 0\big) = p_1^i v_1 \ \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant k-2,\\
&\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) = p_2^i v_3 \ \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant t-2,\\
&\big(e_0, \mathrm{O}_3\big) = u_1^2,\ \big(\alpha, \mathrm{O}_3\big) = u_1 u_2,\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big) = p_3 u_1^2,\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big) = p_4 u_1^2.
\end{aligned}$$

Следовательно, $\mathrm{HH}^2(R) \subset \mathcal{H}$. Отметим, что здесь и ниже мы производим умножение элементов $\mathcal{Y}_1$, имеющих положительную степень, используя трансляции таких элементов, представленные в лемме 4.3 (см. также лемму 4.6).

Аналогично предыдущему для базисных элементов пространства $\mathrm{HH}^3(R)$, описанных в предложении 2.3, часть (в), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&\big(0, \alpha g^i, 0\big) = p_1^{i-1} u_2 v_1 \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\mathrm{O}_2, \eta^i\big) = p_2^i w_2 \ \text{ для } 0 \leqslant i \leqslant t-1,\\
&\big(e_0, \mathrm{O}_2\big) = u_1^3,\ \big(\alpha, \mathrm{O}_2\big) = u_1^2 u_2,\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big) = p_3 u_1^3,\ \big(a^k, \mathrm{O}_2\big) = p_4 u_1^3,\\
&\big(0, \gamma\beta a^{k-1}, 0\big) = p_3 w_1,\ \big(0, a^k, 0\big) = p_4 w_1,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^3(R) \subset \mathcal{H}$.

Далее, для элементов из (2.14) – (2.18) имеем:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{O}_2, a^i + g^i, b^i\big) = p_1^i z \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\mathrm{O}_3, \eta^i\big) = p_2^i z \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant t-1,\\
&\big(e_0, \mathrm{O}_3\big) = u_1^4,\ \big(\alpha, \mathrm{O}_3\big) = u_1^3 u_2,\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big) = p_3 u_1^4,\ \big(a^k, \mathrm{O}_3\big) = p_4 u_1^4,\\
&\big(0, e_0, \mathrm{O}_2\big) = u_1 w_1,\ \big(0, \alpha, \mathrm{O}_2\big) = u_2 w_1,\\
&\big(0, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big) = p_3 u_1 w_1,\ \big(0, a^k, \mathrm{O}_2\big) = p_4 u_1 w_1,\\
&\big(\mathrm{O}_2, \alpha g^{k-1}, \eta\big) = p_2 z,\ \big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, 0\big) = p_3 z,\ \big(\mathrm{O}_2, a^k, 0\big) = p_4 z.
\end{aligned}$$

Таким образом, получаем, что $\mathrm{HH}^4(R) \subset \mathcal{H}$.

Для элементов из (2.30) – (2.35) имеем:

$$\begin{aligned}
&\big(\mathrm{O}_2, \alpha g^i, \mathrm{O}_3\big) = p_1^i u_2 z \ \text{ для } 1 \leqslant i \leqslant k-1,\\
&\big(\mathrm{O}_5, \eta^i\big) = p_2^{i-1} u_2 z \ \text{ для } 2 \leqslant i \leqslant t,\\
&\big(e_0, \mathrm{O}_5\big) = u_1^5,\ \big(\alpha, \mathrm{O}_5\big) = u_1^4 u_2,\\
&\big(\gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_5\big) = p_3 u_1^5,\ \big(a^k, \mathrm{O}_5\big) = p_4 u_1^5,\\
&\big(0, e_0, \mathrm{O}_4\big) = u_1 w_1,\ \big(0, \alpha, \mathrm{O}_4\big) = u_1 u_2 w_1,\\
&\big(0, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_4\big) = p_3 u_1^2 w_1,\ \big(0, a^k, \mathrm{O}_5\big) = p_4 u_1^2 w_1,\\
&\big(\mathrm{O}_2, e_0, \mathrm{O}_2, b^{k-1}\big) = u_1 z,\ \big(\mathrm{O}_2, \alpha, \mathrm{O}_2, \eta\big) = u_2 z,\\
&\big(\mathrm{O}_2, \gamma\beta a^{k-1}, \mathrm{O}_3\big) = p_3 u_1 z,\ \big(\mathrm{O}_2, a^k, \mathrm{O}_3\big) = p_4 u_1 z,
\end{aligned}$$

откуда следует, что $\mathrm{HH}^5(R) \subset \mathcal{H}$.

Теперь индукцией по n докажем включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Пусть $n \geqslant 6$, и пусть $f \in \operatorname{Ker}\delta^n \subset \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_n, R)$. С использованием прямого разложения $Q_n = X_n \oplus Q_{n-4}$ (см. предложение 2.1), введём обозначение $f = (f', f'')$, где $f' = (r_1, r_2) \in \mathcal{X}^n = \operatorname{Hom}_\Lambda(X_n, R)$, $r_1, r_2 \in e_0 R e_0$, $f'' \in \operatorname{Hom}_\Lambda(Q_{n-4}, R)$. Ввиду [1, (2.5) и (2.6)]) матрицы дифференциалов d_Q^n имеют "треугольный" вид, и потому $f' \in \operatorname{Ker}\delta^n_{\mathcal{X}^\bullet}$.

(а) Предположим дополнительно, что $f' = 0$. Тогда $f'' \in \operatorname{Ker}\delta^{n-4}$, и, используя лемму 4.2, получаем: $f'' \cdot z = (\mathrm{O}_2, f'') = f$. По индуктивному предположению $f'' \in \mathcal{H}$, а тогда и $f \in \mathcal{H}$.

(б) Переходя к общему случаю, заметим сначала, что ввиду "2-периодичности" комплекса $X_\bullet$ (т.е. $d_{n+2}^{X_\bullet} = d_n^{X_\bullet}$ для $n \geqslant 3$ –

см. [1, с. 139]) коцепь $g := \big(r_1, r_2, \mathrm{O}\big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_{n-2}, R)$ является коциклом. С помощью леммы 4.6 получаем:

$$g \cdot \widetilde{v} = \big(r_1, r_2, *\big) \in \mathrm{Hom}_\Lambda(Q_n, R).$$

Ввиду части (a) доказательства имеем $f - g \cdot \widetilde{v} \in \mathcal{H}$; при этом по индуктивному предположению $g \in \mathcal{H}$. Следовательно, также и $f \in \mathcal{H}$. $\square$

Пусть $\mathcal{A}_1 = K[\mathcal{X}_1]/I_1$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_1$ из (3.1), а I_1 – соответствующий идеал соотношений (см. (3.2)–(3.19)). (Ненулевые) образы мономов из $K[\mathcal{X}_1]$ относительно канонического эпиморфизма $K[\mathcal{X}_1] \to \mathcal{A}_1$ также будем называть мономами. Произвольный элемент $a \in \mathcal{A}_1$ записывается в виде линейной комбинации мономов (с коэффициентами из K). Из предложений 4.1 и 4.5 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_1 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_1$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_1$ (см. (4.6)); заметим, что, не боясь двусмысленности, мы обозначили одинаково элементы из обоих множеств, которые соответствуют друг другу. Пусть $\mathcal{A}_1 = \bigoplus\limits_{m \geqslant 0} \mathcal{A}_1^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_1$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (1) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.8. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_1^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Сначала отметим ряд следствий из определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$.

Лемма 4.9. *В алгебре* $\mathcal{A}_1$ *выполняются следующие соотношения:*

$$\begin{gathered} p_1^2 u_1 = p_2^2 u_1 = p_2^t u_2 = 0, \\ p_1 u_1^2 = p_2 u_1^2 = p_1 u_2^2 = p_1 u_1 u_2 = p_2 u_1 u_2 = 0, \\ p_1^2 w_1 = p_2^2 w_1 = p_2 u_1 w_1 = p_2 u_2 w_1 = u_1^2 v_1 = 0. \end{gathered}$$

Проверка приведённых выше соотношений состоит в прямых вычислениях (с использованием определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$), и мы её опускаем.

Замечание 4.10. Отметим, что некоторые соотношения из леммы 4.9 справедливы и для некоторых других значений параметров k и t, и мы будем в дальнейшем без оговорок использовать такие соотношения.

Переходя к доказательству предложения 4.8, мы на кольце многочленов $K[\mathcal{X}_1]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$v_3 > v_1 > w_1 > w_2 > v_2 > u_2 > u_1 > z > p_2 > p_1 > p_3 > p_4.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_1$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^j p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_1^\ell u_2^{\beta_2} v_1^{\gamma_1} v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} w_1^{\varepsilon_1} w_2^{\varepsilon_2} z^r;$$

здесь ввиду определяющих соотношений алгебры $\mathcal{A}_1$ имеем:

$$\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{0,1\}, \quad i, j, \ell, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \quad i \leqslant k, \quad j \leqslant t-1.$$

Такие представления для мономов из $\mathcal{A}_1$ мы отождествляем с соответствующими мономами из $K[\mathcal{X}_1]$.

Назовём *редукцией* монома f из $\mathcal{A}_1$ процесс замены некоторых подмономов в f на другие элементы из $\mathcal{A}_1$ по следующим правилам ($a \mapsto b$ означает замену каждого вхождения монома a на элемент b):

$$\begin{array}{ll}
p_2^t \mapsto p_1^k, & p_2^{t-1} u_2 \mapsto p_1 u_1, \\
p_1^{k-1} u_2 \mapsto p_2 u_1 & p_3 u_2 \mapsto p_4 u_1, \\
u_1 v_1 \mapsto p_1 w_1 \mapsto p_2^{t-1} w_2, & p_3 w_1 \mapsto u_1 v_2, \\
p_4 w_1 \mapsto u_2 v_2, & u_2 v_3 \mapsto p_2 w_2, \\
u_2 v_1 \mapsto p_1 w_2, & u_1 v_3 \mapsto p_1^{k-2} u_2 v_1 \mapsto p_2 w_1, \\
v_1^2 \mapsto p_1^2 z, & v_3^2 \mapsto p_2^2 z, \\
u_1 w_2 \mapsto p_3 z, & u_2 w_2 \mapsto p_4 z, \\
v_1 w_1 \mapsto p_2^{t-1} u_2 z, & v_2 w_1 \mapsto p_3 u_1 z, \\
v_3 w_1 \mapsto p_1^{k-1} u_2 z, & v_1 w_2 \mapsto p_1 u_2 z, \\
v_3 w_2 \mapsto p_2 u_2 z, & w_1^2 \mapsto u_1^2 z, \\
w_1 w_2 \mapsto v_2 z. &
\end{array}$$

Любую замену из приведённого выше списка назовём *элементарным шагом редукции.* Так как после каждого элементарного шага редукции ненулевой моном переходит в строго меньший относительно лексикографического порядка, то за конечное число шагов мы получаем мономы, к которым уже нельзя применить никакой элементарный шаг редукции. Говорим, что представление элемента $a \in \mathcal{A}_1$ в виде линейной комбинации мономов имеет *нормальную форму*, если ни к одному из этих мономов нельзя применить редукцию. Поскольку эти элементарные шаги соответствуют некоторым соотношениям, выполняющимся в алгебре $\mathcal{A}_1$ (см. также лемму 4.9), то любой элемент $a \in \mathcal{A}_1$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_1^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_1^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_1^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.25}$$

С помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается (ср., например, доказательство предложения 4.9 в [9]), что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\{p_1^i\}_{i=0}^k,\ \{p_2^j\}_{j=1}^{t-1},\ p_3,\ p_4;$$

(их количество равно $k+t+2$);

мономы степени $4m$, $m>0$:

$$\begin{gathered}\{u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)-2}v_2z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)-3}u_2v_2z^r\}_{r=0}^{m-1},\\ \{u_1^{4(m-r)-1}u_2z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r-1)}u_2w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m-1},\\ \{p_3u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_4u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_1^iz^m\}_{i=0}^{k-1},\\ \{p_2^jz^m\}_{j=1}^{t-1},\ p_3z^m,\ p_4z^m;\end{gathered}$$

(их количество равно $8m+k+t+1$);

мономы степени $4m+1$:

$$\begin{gathered}\{u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)-1}v_2z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)-2}u_2v_2z^r\}_{r=0}^{m-1},\\ \{u_1^{4(m-r)}u_2z^r\}_{r=0}^{m},\ \{u_1^{4(m-r)-3)}u_2w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)+1}z^r\}_{r=0}^{m},\\ \{p_3u_1^{4(m-r)+1}z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_4u_1^{4(m-r)+1}z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_1^iu_2z^m\}_{i=1}^{k-2},\\ \{p_2^ju_2z^m\}_{j=1}^{t-2},\ p_1u_1z^m,\ p_2u_1z^m;\end{gathered}$$

(их количество равно $8m+k+t+2$);

мономы степени $4m+2$:

$$\left\{u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)}v_2z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{u_1^{4(m-r)-1}u_2v_2z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)+1}u_2z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{u_1^{4(m-r)-2)}u_2w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},$$
$$\left\{p_3u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_1^iv_1z^m\right\}_{i=0}^{k-2},$$
$$\left\{p_2^jv_3z^m\right\}_{j=0}^{t-2};$$

(их количество равно $8m+k+t+3$);

мономы степени $4m+3$:

$$\left\{u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+1}v_2z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{u_1^{4(m-r)}u_2v_2z^r\right\}_{r=0}^{m},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)+2}u_2z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{u_1^{4(m-r)-1)}u_2w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},$$
$$\left\{p_3u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_1^iw_2z^m\right\}_{i=0}^{k-2},$$
$$\left\{p_2^jw_2z^m\right\}_{j=0}^{t-2},\ w_1z^m,\ p_2w_1z^m;$$

(их количество равно $8m+k+t+6$).

Легко видеть, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму. С учётом следствий 2.7 и 2.9 отсюда вытекает равенство (4.25). □

Случай 2. Теперь предположим, что k нечётно, а t чётно.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (4.1);

— степени 1 : u_1 из (4.2), а также $u_2' := (\alpha, 0, \gamma, \eta)$,
$u_3 := (\alpha g, \mathrm{O}_3)$; (4.26)

— степени 2 : v_1, v_2, v_3 из (4.3);

— степени 3 : w_1 из (4.4), а также $w_2' := (0, \alpha, e_1)$,
$w_3 := (0, \alpha g, 0)$; (4.27)

— степени 4 : z из (4.5).

Предложение 4.11. *Предположим, что k нечётно, а t чётно. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_2 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_3, v_1, v_2, v_3, w_1, w_2', w_3, z\} \tag{4.28}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.7), (4.10), (4.11), (4.14), (4.17), (4.18), (4.20), (4.23), *а также следующие соотношения:*

$$
\begin{gathered}
p_1u_1 = p_2^{t-1}u_2',\ p_2u_1 = p_1^{k-2}u_3,\\
p_4u_1 = p_3u_2',\ p_1u_2' = p_4u_2' = 0,\\
p_2u_3 = p_3u_3 = p_4u_3 = 0;\\
(u_2')^2 = u_1u_3 = u_2'u_3 = u_3^2 = 0;\\
p_1w_2' = p_4w_2' = p_2w_3 = p_3w_3 = p_4w_3 = 0,\\
u_1v_1 = p_1w_1 = p_2^{t-1}w_2',\ u_2'v_2 = p_4w_1 = p_3w_2',\\
u_1v_3 = p_2w_1 = p_1^{k-3}u_3v_1,\\
u_2'v_3 = p_2w_2',\ u_3v_1 = p_1w_3,\\
u_2'v_1 = u_3v_2 = u_3v_3 = 0;\\
u_3w_1 = u_2'w_2' = u_3w_2' = 0,\\
u_1w_3 = u_2'w_3 = u_3w_3 = 0,\\
u_1w_2' = u_2'w_1;\\
v_1w_1 = p_2^{t-1}u_2'z,\ v_3w_1 = p_1^{k-2}u_3z,\\
v_1w_2' = 0,\ v_2w_2' = p_4u_1z,\ v_3w_2' = p_2u_2'z,\\
v_1w_3 = p_1u_3z,\ \ v_2w_3 = v_3w_3 = 0;\\
w_1w_2' = u_1u_2'z,\ (w_2')^2 = 0,\\
w_1w_3 = w_2'w_3 = w_3^2 = 0.
\end{gathered}
$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 4.1. При этом нам необходимо знать трансляции тех элементов из (4.28), для которых они не были вычислены ранее (см. замечание 4.4). Такие трансляции мы опишем в следующей лемме.

Лемма 4.12. *В качестве трансляций элементов* u_2', u_3, w_2' *и* w_3 *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$
\mathrm{T}^0(u_2') = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & 0 & e_0\otimes\gamma & 0\\ 0 & 0 & 0 & \eta\otimes e_1 \end{pmatrix},
$$

$$\mathrm{T}^1(u_2') = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta\otimes e_0 & 0 & e_1\otimes\gamma \\ 0 & 0 & e_0\otimes\eta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma\otimes e_1 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_2'))_{44} = \sum_{i=0}^{t-2}(i+1)\eta^i\otimes\eta^{t-2-i};$$

$$\mathrm{T}^0(u_3) = \begin{pmatrix} \alpha g\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_3) = \begin{pmatrix} \alpha g\otimes e_0 & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^{i+1}\otimes g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)a^i\otimes\gamma b^{k-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=2}^{k-1}(i+1)b^i\otimes\alpha g^{k-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^i\otimes\beta\alpha g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i\otimes b^{k-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$\mathrm{T}^0(w_2') = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 & e_1\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_2') = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1}\gamma\beta a^i\otimes g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1}\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1}\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-1} b^i\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \sum\limits_{i=0}^{k-1}\alpha g^i\otimes\beta a^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{t-1} i\eta^i\otimes\eta^{t-1-i} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^2(w_2') = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\otimes e_0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\otimes\beta & \beta\otimes\beta & \alpha g^{k-1}\otimes\eta^{t-2} & \eta\beta\otimes e_1 \\ 0 & 0 & 0 & e_1\otimes\eta\beta & 0 & \eta\otimes\eta \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned}(\mathrm{T}^2(w_2'))_{16} &= \beta a^{k-1}\otimes\gamma b^{k-1},\\ (\mathrm{T}^2(w_2'))_{24} &= \eta^{t-2}\otimes\alpha g^{k-1};\end{aligned}$$

$$\mathrm{T}^3(w_2') = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\otimes e_0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_2'))_{24} = \sum_{i=0}^{k-1} \beta a^i \otimes g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2'))_{35} = \sum_{i=0}^{k-1} \alpha\gamma b^{k-1-i} \otimes b^i,$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2'))_{36} = \sum_{i=0}^{t-2} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{t-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha g\otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha g\otimes e_0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^{i+1}\otimes\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i b^{i+1}\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta\alpha g^i\otimes b^{k-i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{13} = \sum_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma\beta a^i\otimes g^{k-i} + \sum_{i=2}^{k-1}(i+1)a^i\otimes\gamma\beta a^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{23} = \sum_{i=2}^{k-1}(i+1)\gamma b^i\otimes\alpha g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i\otimes a^{k-i},$$

$$(\mathrm{T}^1(w_3))_{33} = \sum_{i=2}^{k-1}(i+1)g^i\otimes\beta\alpha g^{k-i} + \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha g^i\otimes\beta a^{k-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha g\otimes e_0 & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha\gamma\otimes g & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_3))_{13} = a \otimes \gamma\beta a^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_3) = \begin{pmatrix} 0 & a\otimes\alpha & \star & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{k-2} i\beta a^i \otimes g^{k-i} & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sum\limits_{i=1}^{k} i b^i \otimes \beta\alpha g^{k-i} & \star & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^3(w_3))_{13} &= a \otimes \gamma\beta a^{k-1}, \\ (\mathrm{T}^3(w_3))_{25} &= \sum_{i=2}^{k-1} (i+1) a^i \otimes \gamma b^{k-i}, \\ (\mathrm{T}^3(w_3))_{35} &= \sum_{i=1}^{k-2} i\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-i}. \end{aligned}$$

Теперь доказательство предложения 4.11 завершается аналогично доказательству предложения 4.1; детальные вычисления мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 4.13. *Предположим, что k нечётно, а t чётно. Множество $\mathcal{Y}_2$, указанное в* (4.28), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство предложения 4.5: сначала доказывается, что $\bigcup_{i=0}^{5} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_2 \cup \{1\}$, а затем с помощью индукции по n устанавливается включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Детали соответствующих вычислений мы предоставляем проделать читателю. □

Пусть $\mathcal{A}_2 = K[\mathcal{X}_2]/I_2$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_2$ из (3.20), а I_2 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.11 и 4.13 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_2 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_2$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_2$. Пусть $\mathcal{A}_2 = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_2^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_2$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (2) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.14. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_2^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Сначала отметим следующее вспомогательное утверждение, которое доказывается прямыми вычислениями (см. также лемму 4.9 и замечание 4.10).

Лемма 4.15. *Из определяющих соотношений алгебры* $\mathcal{A}_2$ *вытекают следующие соотношения:*

$$p_1 u_1 u_2' = p_1 u_1 w_1 = p_2 u_2' w_1 = 0.$$

Далее мы проводим рассуждения по схеме доказательства предложения 4.8. А именно, на кольце многочленов $K[\mathcal{X}_2]$ вводится лексикографический порядок такой, что

$$v_3 > v_1 > v_2 > w_3 > w_2' > w_1 > u_3 > u_2' > u_1 > z > p_2 > p_1 > p_3 > p_4.$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_2$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^j p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_1^\ell (u_2')^{\beta_2} u_3^{\beta_3} v_1^{\gamma_1} v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} w_1^{\varepsilon_1} (w_2')^{\varepsilon_2} w_3^{\varepsilon_3} z^r;$$

здесь ввиду соотношений, выполняющихся в алгебре $\mathcal{A}_2$, имеем:

$$\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_3 \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{0,1\}, i, j, \ell, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}, i \leqslant k, j \leqslant t-1.$$

Затем рассматриваем следующий список элементарных шагов редукции:

$$\begin{array}{ll}
p_2^t \mapsto p_1^k, & p_2^{t-1} u_2' \mapsto p_1 u_1, \\
p_1^{k-2} u_3 \mapsto p_2 u_1, & p_3 u_2' \mapsto p_4 u_1, \\
u_1 v_1 \mapsto p_2^{t-1} w_2' \mapsto p_1 w_1, & u_1 v_2 \mapsto p_3 w_1, \\
u_2' v_2 \mapsto p_3 w_2' \mapsto p_4 w_1, & u_2' v_3 \mapsto p_2 w_2', \\
u_1 v_3 \mapsto p_1^{k-3} u_3 v_1 \mapsto p_2 w_1, & u_3 v_1 \mapsto p_1 w_3, \\
v_1^2 \mapsto p_1^2 z, & v_3^2 \mapsto p_2^2 z, \\
u_1 w_2' \mapsto u_2' w_1, & v_1 w_1 \mapsto p_2^{t-1} u_2' z, \\
v_2 w_1 \mapsto p_3 u_1 z, & v_3 w_1 \mapsto p_1^{k-2} u_3 z, \\
v_2 w_2' \mapsto p_4 u_1 z, & v_3 w_2' \mapsto p_2 u_2' z, \\
v_1 w_3 \mapsto p_1 u_3 z, & w_1^2 \mapsto u_1^2 z, \\
w_1 w_2' \mapsto u_1 u_2' z. &
\end{array}$$

Аналогично доказательству предложения 4.8 определяется нормальная форма элементов из $\mathcal{A}_2$ (относительно описанных выше элементарных

шагов редукции) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_2$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_2^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_2^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Поскольку имеется эпиморфизм $\mathcal{A}_2^i \to \mathrm{HH}^i(R)$, то $q_i \geqslant \dim_K \mathrm{HH}^i(R)$, и, таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.29}$$

Наконец, с помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\{p_1^i\}_{i=0}^k,\ \{p_2^j\}_{j=1}^{t-1},\ p_3,\ p_4;$$

(их количество равно $k+t+2$);

мономы степени $4m$, $m>0$:

$$\begin{gathered}
\{u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_3u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\\
\{p_4u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r-1)}u_2'w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\\
\{u_1^{4(m-r)-1}u_2'z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_3u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m-1},\\
\{p_4u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_1^iz^m\}_{i=0}^{k-1},\ \{p_2^jz^m\}_{j=1}^{t-1},\ p_3z^m,\ p_4z^m;
\end{gathered}$$

(их количество равно $8m+k+t+1$);

мономы степени $4m+1$:

$$\begin{gathered}
\{u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_3u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\\
\{p_4u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)-3}u_2'w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\\
\{u_1^{4(m-r)}u_2'z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)+1}z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_3u_1^{4(m-r)+1}z^r\}_{r=0}^{m},\\
\{p_4u_1^{4(m-r)+1}z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_1^iu_3z^m\}_{i=0}^{k-3},\ \{p_2^ju_2'z^m\}_{j=0}^{t-2},\\
p_1u_1z^m, p_2u_1z^m;
\end{gathered}$$

(их количество равно $8m+k+t+2$);

мономы степени $4m+2$:

$$\{p_2^j v_3 z^m\}_{j=0}^{t-2},\ \{p_1^i v_1 z^m\}_{i=0}^{k-2},\ v_2 z^m,\ \{u_1^{4(m-r)-1} w_1 z^r\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\{p_3 u_1^{4(m-r)-1} w_1 z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_4 u_1^{4(m-r)-1} w_1 z^r\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\{u_1^{4(m-r)-2} u_2' w_1 z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)+1)} u_2' z^r\}_{r=0}^{m},$$
$$\{u_1^{4(m-r)+2} z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_3 u_1^{4(m-r)+2} z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_4 u_1^{4(m-r)+2} z^r\}_{r=0}^{m};$$

(их количество равно $8m+k+t+3$);

мономы степени $4m+3$:

$$\{p_1^i w_3 z^m\}_{i=0}^{k-3},\ \{p_2^j w_2' z^m\}_{j=0}^{t-2},\ \{u_1^{4(m-r)} w_1 z^r\}_{r=0}^{m},$$
$$p_1 w_1 z^m,\ p_2 w_1 z^m,\ \{p_3 u_1^{4(m-r)} w_1 z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_4 u_1^{4(m-r)} w_1 z^r\}_{r=0}^{m},$$
$$\{u_1^{4(m-r)-1} u_2' w_1 z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)+2} u_2' z^r\}_{r=0}^{m},$$
$$\{u_1^{4(m-r)+3} z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_3 u_1^{4(m-r)+3} z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_4 u_1^{4(m-r)+3} z^r\}_{r=0}^{m};$$

(их количество равно $8m+k+t+6$).

Ясно, что все мономы из этого списка имеют нормальную форму, и потому с учётом следствий 2.7 и 2.9 получаем равенство (4.29). □

Случай 3. Теперь предположим, что k чётно, а t нечётно.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (4.1);

— степени 1 : u_1 из (4.2), а также

$$u_2'' := (\alpha, \mathrm{O}_3), u_4 := (\mathrm{O}_3, \eta^2); \tag{4.30}$$

— степени 2 : v_1, v_2, v_3 из (4.3);

— степени 3 : w_1 из (4.4), а также

$$w_4 := (0, \alpha, 0), w_5 := (\mathrm{O}_2, \eta); \tag{4.31}$$

— степени 4 : z из (4.5).

Предложение 4.16. *Предположим, что k чётно, а t нечётно. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_3 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2'', u_4, v_1, v_2, v_3, w_1, w_4, w_5, z\} \tag{4.32}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ *выполняются соотношения* (4.7), (4.10), (4.11), (4.14), (4.17), (4.18), (4.20), (4.23), *а также следующие соотношения*:

$$p_1u_1 = p_2^{t-2}u_4,\ p_1u_4 = p_3u_4 = p_4u_4 = 0, \tag{4.33}$$

$$p_2u_1 = p_1^{k-1}u_2'',\ p_4u_1 = p_3u_2'',\ p_2u_2'' = p_4u_2'' = 0, \tag{4.34}$$

$$(u_2'')^2 = u_1u_4 = u_2''u_4 = u_4^2 = 0; \tag{4.35}$$

$$p_1w_1 = p_2^{t-2}w_5, p_1w_5 = p_3w_5 = p_4w_5 = 0, \tag{4.36}$$

$$u_2''v_2 = p_4w_1 = p_3w_4,\ p_2w_4 = p_4w_4 = 0, \tag{4.37}$$

$$p_2w_1 = p_1^{k-1}w_4,\ u_2''v_1 = p_1w_4,\ u_2''v_3 = 0, \tag{4.38}$$

$$u_4v_3 = p_2w_5,\ u_4v_1 = u_4v_2 = 0, \tag{4.39}$$

$$u_2''w_1 = u_1w_4, \tag{4.40}$$

$$u_4w_1 = u_2''w_4 = u_4w_4 = u_1w_5 = u_2''w_5 = u_4w_5 = 0, \tag{4.41}$$

$$v_1w_1 = p_2^{t-2}u_4z,\ v_3w_5 = p_2u_4z, \tag{4.42}$$

$$v_3w_1 = p_1^{k-1}u_2''z,\ v_2w_4 = p_4u_1z, \tag{4.43}$$

$$v_1w_4 = p_1u_2''z,\ v_3w_4 = 0, \tag{4.44}$$

$$v_1w_5 = v_2w_5 = 0; \tag{4.45}$$

$$w_1w_4 = u_1u_2''z, \tag{4.46}$$

$$w_1w_5 = w_4^2 = w_4w_5 = w_5^2 = 0. \tag{4.47}$$

Доказательство. Доказательство приведённых выше соотношений проводится так же, как в доказательстве предложения 4.1. При этом нам необходимо знать трансляции тех элементов из (4.32), для которых они не были вычислены ранее. Такие трансляции представлены в следующей лемме.

Лемма 4.17. *В качестве трансляций элементов* u_2'', u_4, w_4 *и* w_5 *можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими матрицами*:

$$\mathrm{T}^0(u_2'') = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_2'') = \begin{pmatrix} \alpha\otimes e_0 & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i\otimes g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ia^i\otimes\gamma b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i\otimes\alpha g^{k-1-i} & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i\otimes\alpha\gamma b^{k-2-i} & 0 \\ 0 & \star & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha g^i\otimes b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_2''))_{32} = \sum_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta\alpha g^i\otimes\beta\alpha g^{k-2-i};$$

$$\mathrm{T}^0(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^2\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(u_4) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \eta^2\otimes e_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(u_4)_{44} = \sum_{i=2}^{t-1}(i+1)\eta^i\otimes\eta^{t-1-i};$$

$$\mathrm{T}^0(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i\beta a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} ib^i\otimes\alpha\gamma b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\beta\alpha g^i\otimes b^{k-1-i} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_4))_{13} = \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma\beta a^i \otimes g^{k-1-i} + \sum_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma\beta a^{k-1-i};$$

$$(\mathrm{T}^1(w_4))_{23} = \sum_{i=1}^{k-1} i\gamma b^i \otimes \alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\alpha\gamma b^i \otimes a^{k-1-i};$$

$$(\mathrm{T}^1(w_4))_{33} = \sum_{i=1}^{k-1} i g^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i} + \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\alpha g^i \otimes \beta a^{k-1-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & e_0\otimes\gamma\beta a^{k-1} & 0 & 0 & \star \\ 0 & 0 & \gamma\otimes\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0\otimes\beta\alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_4)_{16} = \beta a^{k-1} \otimes \gamma b^{k-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_4) = \begin{pmatrix} 0 & \alpha\otimes e_0 & \gamma\beta a^{k-1}\otimes e_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_0\otimes\alpha & \star & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)a^i\otimes\gamma b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=0}^{k-2}(i+1)\alpha\gamma b^i\otimes b^{k-1-i} & 0 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_4))_{24} = \sum_{i=1}^{k-1} i\beta a^{k-1-i} \otimes g^i,$$

$$(\mathrm{T}^3(w_4))_{34} = \sum_{i=0}^{k-2} (i+1) b^{k-1-i} \otimes \beta\alpha g^i;$$

$$\mathrm{T}^0(w_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \eta\otimes e_1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{T}^1(w_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a^{k-1}\otimes g^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha g^{k-1}\otimes\eta\beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^1(w_5))_{44} = \sum_{i=1}^{t} i\eta^i \otimes \eta^{t-i};$$

$$\mathrm{T}^2(w_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \star & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta \otimes \gamma\eta \\ 0 & 0 & 0 & \eta\beta \otimes \beta & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \eta^2 \otimes \eta \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_5)_{14} = \beta a^{k-1} \otimes \gamma\beta a^{k-1},$$

$$(\mathrm{T}^2(w_5)_{35} = \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{t-1};$$

$$\mathrm{T}^3(w_5) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & 0 & \star \end{pmatrix},$$

где

$$\begin{aligned} (\mathrm{T}^3(w_5))_{25} =& a^{k-1} \otimes \alpha\gamma b^{k-1}, \\ (\mathrm{T}^3(w_5))_{34} =& \eta \otimes \eta\beta, \\ (\mathrm{T}^3(w_5))_{36} =& \sum_{i=2}^{t-1} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{t-i}. \end{aligned}$$

Вновь доказательство предложения 4.16 аналогично доказательству предложения 4.1. Соответствующие вычисления мы предоставляем проделать читателю. □

Замечание 4.18. Заметим, что формулы для трансляций элементов u_2'' и w_4 остаются справедливыми для чётного t (см. ниже “Случай 4”).

Предложение 4.19. *Предположим, что k чётно, а t нечётно. Множество $\mathcal{Y}_3$, указанное в* (4.32), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Доказательство этого утверждения проводится по той же схеме, что и доказательство предложения 4.5: сначала доказывается, что $\bigcup\limits_{i=0}^{5} \mathrm{HH}^i(R) \subset \mathcal{H}$, где $\mathcal{H}$ – K-подалгебра в $\mathrm{HH}^*(R)$, порождённая множеством $\mathcal{Y}_3 \cup \{1\}$, а затем с помощью индукции по n

устанавливается включение $\mathrm{HH}^n(R) \subset \mathcal{H}$. Детали соответствующих вычислений мы предоставляем проделать читателю. $\square$

Пусть $\mathcal{A}_3 = K[\mathcal{X}_3]/I_3$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_3$ из (3.21), а I_3 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.16 и 4.19 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_3 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_3$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_3$. Пусть $\mathcal{A}_3 = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_3^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_3$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (3) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.20. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_3^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Сначала отметим следующее вспомогательное утверждение, которое доказывается прямыми вычислениями; ср. с леммами 4.9 и 4.15.

Лемма 4.21. *Из определяющих соотношений алгебры* $\mathcal{A}_3$ *вытекают соотношения*

$$p_1 u_1 u_2'' = p_1 u_2'' w_1 = 0.$$

Далее мы вновь проводим рассуждения, аналогичные доказательству предложения 4.8. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_3]$ вводится лексикографический порядок такой, что

$$\begin{aligned} v_3 > v_1 > v_2 > w_3 > w_5 > w_4 > w_1 > u_4 > u_2'' \\ > u_1 > z > p_2 > p_1 > p_3 > p_4. \end{aligned}$$

Любой ненулевой моном из $\mathcal{A}_3$ представи́м в виде

$$f = p_1^i p_2^j p_3^{\alpha_3} p_4^{\alpha_4} u_1^{\ell} (u_2'')^{\beta_2} u_4^{\beta_4} v_1^{\gamma_1} v_2^{\gamma_2} v_3^{\gamma_3} w_1^{\varepsilon_1} w_4^{\varepsilon_4} w_5^{\varepsilon_5} z^r,$$

где $\alpha_3, \alpha_4, \beta_2, \beta_4, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \varepsilon_1, \varepsilon_4, \varepsilon_5 \in \{0,1\}$, i, j, ℓ, $r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i \leqslant t-1$, $j \leqslant k$.

Затем рассматриваем следующий список элементарных шагов редукции:

$$
\begin{array}{ll}
p_2^t \mapsto p_1^k, & p_2^{t-2}u_4 \mapsto p_1u_1, \\
p_1^{k-1}u_2'' \mapsto p_2u_1, & p_3u_2'' \mapsto p_4u_1, \\
u_1v_1 \mapsto p_2^{t-2}w_5 \mapsto p_1w_1, & u_1v_2 \mapsto p_3w_1, \\
u_2''v_2 \mapsto p_3w_4 \mapsto p_4w_1, & u_2''v_1 \mapsto p_1w_4, \\
p_1^{k-1}w_4 \mapsto p_2w_1, & u_4v_3 \mapsto p_2w_5, \\
u_1v_3 \mapsto p_1^{k-1}w_4 \mapsto p_2w_1, & u_1w_4 \mapsto u_2''w_1, \\
v_1^2 \mapsto p_1^2z, & v_3^2 \mapsto p_2^2z, \\
v_1w_1 \mapsto p_2^{t-2}u_4z, & v_2w_1 \mapsto p_3u_1z, \\
v_1w_4 \mapsto p_1u_2''z, & v_3w_1 \mapsto p_1^{k-1}u_2''z, \\
v_2w_4 \mapsto p_4u_1z, & v_3w_5 \mapsto p_2u_4z, \\
w_1^2 \mapsto u_1^2z, & w_1w_4 \mapsto u_1u_2''z.
\end{array}
$$

Аналогично доказательству предложения 4.8 определяется нормальная форма элементов из $\mathcal{A}_3$ (относительно описанных выше элементарных шагов редукции) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_3$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_3^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_3^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Таким образом, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.48}$$

С помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени 0:

$$\{p_1^i\}_{i=0}^k,\ \{p_2^j\}_{j=1}^{t-1},\ p_3,\ p_4;$$

(их количество равно $k+t+2$);

мономы степени $4m$, $m>0$:

$$
\begin{array}{l}
\{u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{p_3u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1}, \\
\{p_4u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r-1)}u_2''w_1z^r\}_{r=0}^{m-1},\ \{u_1^{4(m-r)-1}u_2''z^r\}_{r=0}^{m-1}, \\
\{u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_3u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m},\ \{p_4u_1^{4(m-r)}z^r\}_{r=0}^{m}, \\
\{p_1^iz^m\}_{i=1}^{k-1},\ \{p_2^jz^m\}_{j=1}^{t-1};
\end{array}
$$

(их количество равно $8m+k+t+1$);

мономы степени $4m+1$:

$$\begin{aligned}
&\left\{u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\\
&\left\{p_4u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)-3}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{p_2^ju_4z^m\right\}_{j=0}^{t-3},\\
&\left\{u_1^{4(m-r)}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\left\{p_1^iu_2''z^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ \left\{u_1^{4(m-r)+1}z^r\right\}_{r=0}^{m},\\
&\left\{p_3u_1^{4(m-r)+1}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+1}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ p_1u_1z^m,\ p_2u_1z^m;
\end{aligned}$$

(их количество равно $8m+k+t+2$);

мономы степени $4m+2$:

$$\begin{aligned}
&\left\{p_2^jv_3z^m\right\}_{j=0}^{t-2},\left\{p_1^iv_1z^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ v_2z^m,\ \left\{u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\\
&\left\{p_3u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\\
&\left\{u_1^{4(m-r)-2}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+1}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m},\left\{u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},\\
&\left\{p_3u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m};
\end{aligned}$$

(их количество равно $8m+k+t+3$);

мономы степени $4m+3$:

$$\begin{aligned}
&\left\{p_2^jw_5z^m\right\}_{j=0}^{t-3},\left\{p_1^iw_4z^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ \left\{u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m},\\
&\left\{p_3u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m},p_2w_1z^m,\ p_1w_1z^m,\\
&\left\{u_1^{4(m-r)-1}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+2}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m},\left\{u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},\\
&\left\{p_3u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m};
\end{aligned}$$

(их количество равно $8m+k+t+6$).

С учётом следствий 2.7 и 2.9 получаем равенство (4.48). □

Случай 4. Теперь предположим, что k и t чётны.

Выделим следующие однородные элементы в $\mathrm{HH}^*(R)$:

— степени 0 : p_1, p_2, p_3, p_4 из (4.1);

— степени 1 : u_1 из (4.2), u_2' из (4.26), u_2'' из (4.30);

— степени 2 : v_1, v_2, v_3 из (4.3);

— степени 3 : w_1 и w_2 из (4.4), а также w_4 из (4.31);

— степени 4 : z из (4.5).

Предложение 4.22. *Предположим, что k и t чётны. Для элементов множества*

$$\mathcal{Y}_4 = \{p_1, p_2, p_3, p_4, u_1, u_2', u_2'', v_1, v_2, v_3, w_1, w_2, w_4, z\} \tag{4.49}$$

в алгебре $\mathrm{HH}^*(R)$ выполняются соотношения (4.7), (4.10), (4.14), (4.18), (4.20), (4.23), (4.34), (4.37), (4.38), (4.40), (4.43), (4.44), (4.46), *а также следующие соотношения (обозначение $\theta_{2n} \in K$ введено в* (3.38)*):*

$$p_1 u_1 = p_2^{t-1} u_2',$$
$$(u_2')^2 = \theta_t p_2^{t-1} v_3,\ (u_2'')^2 = \theta_k p_2^{t-1} v_3,$$
$$u_2' u_2'' = 0,\ p_1^{k-1} v_1 = p_2^{t-1} v_3,\ p_2 w_1 = p_1^{k-1} w_2,$$
$$p_1 w_1 = p_2^{t-1} w_2,$$
$$p_1 w_4 = p_1 w_2,\ u_2' v_3 = p_2 w_2,$$
$$p_3 w_2 = p_4 w_2 = p_2 w_4 = p_4 w_4 = 0;$$
$$u_2' w_2 = \theta_t p_2^t z,\ u_2'' w_2 = u_2'' w_4 = \theta_k p_2^t z,$$
$$u_2' w_1 = u_2'' w_1,\ u_1 w_2 = 0;$$
$$v_1 w_1 = p_2^{t-1} u_2' z,\ v_1 w_2 = v_1 w_4,$$
$$v_3 w_2 = p_2 u_2' z,\ v_2 w_2 = 0;$$
$$w_1 w_2 = \theta_t p_2^{t-1} v_3 z,\ w_2^2 = (\theta_k + \theta_t) p_2^{t-1} v_3 z,$$
$$w_2 w_4 = w_4^2 = \theta_k p_2^{t-1} v_3 z.$$

Доказательство. Сначала нам необходимо дополнительно вычислить трансляции элемента $w_2 \in \mathcal{Y}_4$, которые пока не вычислены (см. замечание 4.4 о трансляции $\mathrm{T}^1(w_2)$).

Лемма 4.23. *В качестве трансляций (подходящих порядков) элемента w_2 можно взять гомоморфизмы, определяемые следующими*

матрицами:

$$\mathrm{T}^2(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \eta^{t-2} \otimes \alpha g^{k-1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \star & \beta \otimes \eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \gamma \otimes \eta & e_1 \otimes \eta^2 \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^2(w_2))_{35} = \gamma\beta \otimes e_1 + \alpha g^{k-1} \otimes \eta^{t-2};$$

$$\mathrm{T}^3(w_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \sum\limits_{i=1}^{k-1} i a^i \otimes \gamma b^{k-1-i} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \star & \star & \star \end{pmatrix},$$

где

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{24} = \sum_{i=0}^{k-2} (i+1)\beta a^i \otimes g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{34} = \sum_{i=1}^{k-1} i b^i \otimes \beta\alpha g^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{35} = \sum_{i=1}^{k-1} i\alpha\gamma b^i \otimes b^{k-1-i},$$

$$(\mathrm{T}^3(w_2))_{36} = \sum_{i=0}^{t-2} (i+1)\eta^i \otimes \eta^{t-1-i}.$$

Доказательство предложения 4.22 аналогично доказательству предложения 4.1. Соответствующие вычисления мы предоставляем проделать читателю. □

Предложение 4.24. *Предположим, что k и t чётны. Множество $\mathcal{Y}_4$, указанное в* (4.49), *порождает* $\mathrm{HH}^*(R)$ *как K-алгебру.*

Доказательство. Доказательство проводится аналогично доказательству предложения 4.5. Детали соответствующих вычислений мы предоставляем проделать читателю. □

Пусть $\mathcal{A}_4 = K[\mathcal{X}_4]/I_4$ – градуированная K-алгебра, определённая в разделе 3, где $\mathcal{X}_4$ из (3.37), а I_4 – соответствующий идеал соотношений. Из предложений 4.22 и 4.24 следует, что существует сюръективный гомоморфизм градуированных K-алгебр $\varphi\colon \mathcal{A}_4 \to \mathrm{HH}^*(R)$, переводящий образующие из множества $\mathcal{X}_4$ в соответствующие образующие из $\mathcal{Y}_4$. Пусть $\mathcal{A}_4 = \bigoplus\limits_{m\geqslant 0} \mathcal{A}_4^m$ – прямое разложение алгебры $\mathcal{A}_4$ на однородные прямые слагаемые. Теперь часть (4) теоремы 3.1 вытекает из следующего утверждения.

Предложение 4.25. *Для любого* $m \geqslant 0$

$$\dim_K \mathcal{A}_4^m = \dim_K \mathrm{HH}^m(R).$$

Доказательство. Отметим следующее вспомогательное утверждение, которое доказывается прямыми вычислениями; ср. с леммами 4.9, 4.15, 4.21.

Лемма 4.26. *Из определяющих соотношений алгебры* $\mathcal{A}_4$ *вытекают соотношения*

$$p_2^{t-2} v_3 w_2 = p_1 u_1 z,$$

$$p_2 u_1 v_3 = u_1^2 v_3 = p_2^{t-1} v_3 w_2 = 0.$$

Вновь доказательство аналогично доказательству предложения 4.8. На кольце многочленов $K[\mathcal{X}_4]$ введём лексикографический порядок такой, что

$$\begin{aligned} v_1 > v_2 > u_2' > w_3 > w_4 > w_2 > w_1 > u_2'' \\ > v_3 > u_1 > z > p_2 > p_1 > p_3 > p_4. \end{aligned}$$

Затем рассматриваем следующий список элементарных шагов редукции:

$p_2^t \mapsto p_1^k$,
$p_1^{k-1}u_2'' \mapsto p_2u_1$,
$(u_2')^2 \mapsto \theta_t p_2^{t-1}v_3$ (если $\theta_t \neq 0$),
$(u_2'')^2 \mapsto \theta_k p_2^{t-1}v_3$ (если $\theta_k \neq 0$),
$u_1v_1 \mapsto p_2^{t-1}w_2 \mapsto p_1w_1$,
$u_2''v_1 \mapsto p_1w_4 \mapsto p_1w_2$,
$u_2'w_1 \mapsto u_1w_4 \mapsto u_2''w_1$,
$p_2u_2'z \mapsto v_3w_2$,
$u_2''w_2 \mapsto \theta_k p_2^t z$ (если $\theta_k \neq 0$),
$v_3^2 \mapsto p_2^2z$,
$v_2w_1 \mapsto p_3u_1z$,
$v_3w_1 \mapsto p_1^{k-1}u_2''z$,
$v_1w_4 \mapsto v_1w_2 \mapsto p_1u_2''z$,
$w_1w_2 \mapsto \theta_t p_2^{t-1}v_3z$,
$w_1w_4 \mapsto u_1u_2''z$,
$w_2^2 \mapsto (\theta_k+\theta_t)p_2^{t-1}v_3z$
(если $\theta_k+\theta_t \neq 0$).

$p_2^{t-1}u_2' \mapsto p_1u_1$,
$p_3u_2' \mapsto p_3u_2'' \mapsto p_4u_1$,
$p_1^{k-1}v_1 \mapsto p_2^{t-1}v_3$,
$u_1v_2 \mapsto p_3w_1$,
$u_2'v_2 \mapsto u_2''v_2 \mapsto p_3w_4 \mapsto p_4w_1$,
$p_1^{k-1}w_2 \mapsto p_2w_1 \mapsto u_1v_3$,
$u_2''w_4 \mapsto u_2''w_2$,
$u_2'w_2 \mapsto \theta_t p_2^t z$ (если $\theta_t \neq 0$),
$v_1^2 \mapsto p_1^2z$,
$v_1w_1 \mapsto p_2^{t-1}u_2'z$,
$v_1w_2 \mapsto p_1u_2''z$,
$v_2w_4 \mapsto p_4u_1z$,
$w_1^2 \mapsto u_1^2z$,
$w_4^2 \mapsto w_2w_4$,
$w_2w_4 \mapsto \theta_k p_2^{t-1}v_3z$ (если $\theta_k \neq 0$),

Аналогично доказательству предложения 4.8 определяется нормальная форма элементов из $\mathcal{A}_4$ (относительно описанных выше элементарных шагов редукции) и устанавливается, что любой элемент $a \in \mathcal{A}_4$ допускает хотя бы одно представление в нормальной форме.

Пусть $q_i = \dim_K \mathcal{A}_4^i$. Через $\widetilde{q}_i$ обозначим число мономов из $\mathcal{A}_4^i$, представленных в нормальной форме; ясно, что $\widetilde{q}_i \geqslant q_i$. Потому, как и выше, достаточно доказать, что

$$\widetilde{q}_i = \dim_K \mathrm{HH}^i(R). \tag{4.50}$$

С помощью последовательного разбора ряда случаев доказывается, что все (ненулевые) мономы, имеющие нормальную форму, содержатся в следующем списке.

Мономы степени $4m$ ($m \geqslant 0$):

$$\left\{u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{p_4u_1^{4(m-r)-3}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r-1)}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)-1}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)}z^r\right\}_{r=0}^{m},$$
$$\left\{p_4u_1^{4(m-r)}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_1^iz^m\right\}_{i=1}^{k},\ \left\{p_2^jz^m\right\}_{j=1}^{t-1};$$

(их количество равно $8m+k+t+2$);

мономы степени $4m+1$:

$$\left\{p_2^ju_2''\right\}_{j=1}^{t-2}\ (\text{если}\, m=0), \left\{p_2^jv_3w_2z^{m-1}\right\}_{j=0}^{t-3}\ (\text{если}\, m>0),$$
$$u_2'z^m, \left\{u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{p_4u_1^{4(m-r)-2}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)-3}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$,\ \left\{u_1^{4(m-r)}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_1^iu_2''z^m\right\}_{i=1}^{k-2},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)+1}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)+1}z^r\right\}_{r=0}^{m},$$
$$\left\{p_4u_1^{4(m-r)+1}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ p_1u_1z^m,\ p_2u_1z^m;$$

(их количество равно $8m+k+t+3$);

мономы степени $4m+2$:

$$\left\{p_1^iv_1z^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ v_2z^m,\ \left\{u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{p_3u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)-1}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)-2}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+1}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_2^jv_3z^m\right\}_{j=0}^{t-1},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+2}z^r\right\}_{r=0}^{m};$$

(их количество равно $8m+k+t+4$);

мономы степени $4m+3$:

$$w_4z^m,\ \left\{p_2^jw_2z^m\right\}_{j=1}^{t-2}, \left\{p_1^iw_2z^m\right\}_{i=0}^{k-2},\ p_1w_1z^m,$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)}w_1z^r\right\}_{r=0}^{m},$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)-1}u_2''w_1z^r\right\}_{r=0}^{m-1},\ \left\{u_1^{4(m-r)+2}u_2''z^r\right\}_{r=0}^{m}, u_1v_3z^m,$$
$$\left\{u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_3u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m},\ \left\{p_4u_1^{4(m-r)+3}z^r\right\}_{r=0}^{m};$$

(их количество равно $8m + k + t + 7$).

С учётом следствий 2.7 и 2.9 получаем равенство (4.50). □

Это завершает доказательство теоремы 3.1.

Доказательство следствия 3.2. Пусть $R = SD(2\mathcal{B})_2(k, t, 0)$, где k и t чётны. Рассмотрим подпространство $L = \mathrm{HH}^1(R)\cdot\mathrm{HH}^1(R)$ в $\mathrm{HH}^2(R)$, порождённое множеством $\{x \cdot y \mid x, y \in \mathrm{HH}^1(R)\}$. Таким образом, L порождается элементами

$$\begin{aligned} u_1^2 &= \big(e_0, \mathrm{O}_3\big), \;\; u_1u_2' = u_1u_2'' = \big(\alpha, \beta a^{k-1}, \mathrm{O}_2\big), \\ (u_2')^2 &= \theta_t \cdot \big(\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big), \\ (u_2'')^2 &= \theta_k \cdot \big(\mathrm{O}_3, \eta^{t-1}\big). \end{aligned}$$

Поэтому $\dim_K L = 2$, если и только если $\theta_k = 0 = \theta_t$. Следовательно,

$$\dim_K L = \begin{cases} 2, & \text{если } \; k \equiv t \equiv 0 \,(\mathrm{mod}\, 4), \\ 3 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Отсюда вытекает утверждение следствия 3.2. □

Литература

1. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* III. *Серия $SD(2\mathcal{B})_2$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **400** (2012), 133–157.
2. K. Erdmann, *Blocks of tame representation type and related algebras,* — Lect. Notes Math., v. 1428. Berlin; Heidelberg, 1990.
3. Th. Holm, *Derived equivalent tame blocks.* — J. Algebra **194** (1997), 178–200.
4. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* I: *серия $D(3\mathcal{K})$ в характеристике* 2. — Алгебра и анализ **16** (2004), No. 6, 53–122.
5. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* I: *обобщенные группы кватернионов.* — Алгебра и анализ **18** (2006), No. 1, 55–107.
6. А. И. Генералов, А. А. Иванов, С. О. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* II. *Серия $Q(2\mathcal{B})_1$ в характеристике* 2. — Зап. научн. семин. ПОМИ **349** (2007), 53–134.
7. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа,* III. *Алгебры с малым параметром.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **356** (2008), 46–84.
8. А. А. Иванов, *Когомологии Хохшильда алгебр кватернионного типа: серия $Q(2\mathcal{B})_1(k, s, a, c)$ над полем характеристики не* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 63–72.
9. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **375** (2010), 92–129.

10. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр диэдрального типа,* III. *Локальные алгебры в характеристике* 2. — Вестник С.-Петербургского ун-та. Сер. 1. Мат., мех., астрон. Вып. 1 (2010), 28–38.
11. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* I. *Групповые алгебры полудиэдральных групп.* — Алгебра и анализ **21** (2009), No. 2, 1–51.
12. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда алгебр полудиэдрального типа,* II. *Локальные алгебры.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 144–202.
13. А. И. Генералов, М. А. Качалова, *Бимодульная резольвента алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **321** (2005), 36–66.
14. М. А. Качалова, *Когомологии Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **330** (2006), 173–200.
15. М. А. Пустовых, *Кольцо когомологий Хохшильда алгебры Мёбиуса.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 173–200.
16. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **343** (2007), 121–182.
17. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **365** (2009), 63–121.
18. Ю. В. Волков, А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **386** (2011), 100–128.
19. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда нестандартных самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 48–99.
20. Ю. В. Волков, *Алгебра когомологий Хохшильда для одной серии самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. — Алгебра и анализ **23** (2011), No. 5, 99–139.
21. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 100–118.
22. Ю. В. Волков, *Когомологии Хохшильда самоинъективных алгебр древесного типа* D_n. V. — Зап. научн. семин. ПОМИ **394** (2011), 140–173.
23. А. И. Генералов, Н. Ю. Косовская, *Когомологии Хохшильда алгебр Лю–Шульца.* — Алгебра и анализ **18** (2006), No. 4, 39–82.
24. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца диэдральной группы.* I. *Чётный случай.* — Алгебра и анализ **19** (2007), No. 5, 70–123.
25. А. И. Генералов, *Когомологии Хохшильда целочисленного группового кольца полудиэдральной группы.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **388** (2011), 119–151.
26. Th. Holm, *Derived equivalence classification of algebras of dihedral, semidihedral, and quaternion type.* — J. Algebra **221** (1999), 159–205.

Generalov A. I. Hochschild cohomology for algebras of semidihedral type. IV. The cohomology algebra for the family $SD(2\mathcal{B})_2(k,t,c)$ in the case $c=0$.

The paper continues the previous author's paper in which the bimodule resolution was constructed for algebras of semidihedral type from the family $SD(2\mathcal{B})_2$. In the present paper, using this resolution we describe a multiplicative structure of the Hochschild cohomology algebra for algebras in the mentioned family over a base field of characteristic 2 under an additional assumption that the parameter c containing in the defining relations of the algebras is equal to zero.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: general@pdmi.ras.ru

Поступило 21 марта 2013 г.