Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 413, 2013 г.

М. А. Антипов, А. О. Звонарёва

ЧАСТИЧНО НАКЛОНЯЮЩИЕ ДВУЧЛЕННЫЕ КОМПЛЕКСЫ НАД АЛГЕБРАМИ, СООТВЕТСТВУЮЩИМИ ДЕРЕВЬЯМ БРАУЭРА

§1. Введение

В статье [1] Рукье и Циммерманн определяют производную группу Пикара $\mathrm{TrPic}(A)$ алгебры A, то есть группу автоэквивалентностей производной категории A, заданных домножением на двусторонний наклоняющий комплекс, по модулю естественных изоморфизмов. Тензорное умножение двусторонних наклоняющих комплексов служит умножением в этой группе. Несмотря на то, что для алгебры, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, известны действия различных групп кос на $\mathrm{TrPic}(A)$ (см. [1, 2]), целиком производная группа Пикара вычислена только для случая алгебры с двумя простыми модулями ([1]).

С другой стороны, Абе и Хошино доказали, что над самоинъективной артиновой алгеброй конечного типа представления любой наклоняющий комплекс P такой, что $\mathrm{add}(P) = \mathrm{add}(\nu P)$, где ν – функтор Накаямы, может быть представлен как произведение наклоняющих комплексов длины $\leqslant 1$ ([3]). Таким образом, вместо того, чтобы рассматривать производную группу Пикара, мы можем рассматривать производный группоид Пикара, соответствующий некоторому классу производно эквивалентных алгебр. Объектами этого группоида являются алгебры из данного класса, а морфизмами – производные эквивалентности, задаваемые домножением на двусторонний наклоняющий комплекс, по модулю естественных изоморфизмов. Например, мы можем рассматривать производный группоид Пикара, соответствующий классу алгебр Брауэра с кратностью исключительной вершины k и с зафиксированным количеством простых модулей (алгебры из этого класса производно эквивалентны, и он замкнут относительно производной эквивалентности). Тогда результат Абе и Хошино означает,

Ключевые слова: двучленные наклоняющие комплексы, алгебры, соответствующие деревьям Брауэра.

Работа была выполнена при поддержке РФФИ (грант 13-01-00902 А).

что производный группоид Пикара, соответствующий классу алгебр Брауэра с кратностью исключительной вершины k и с зафиксированным количеством простых модулей, порожден одночленными и двучленными наклоняющими комплексами.

В данной работе мы приводим критерий того, что минимальное проективное представление модуля без проективных прямых слагаемых является частично наклоняющим комплексом, а именно справедливо следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть A – самоинъективная K-алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ – минимальное проективное представление модуля M. Комплекс T является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0.$$

В предложении 1 модуль M рассматривается как комплекс, сосредоточенный в 0, комплекс $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ сосредоточен в степенях 0 и 1 соответственно.

С помощью этого утверждения мы описываем все неразложимые частично наклоняющие двучленные комплексы над любой алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1.

Теорема 1. *Пусть A – алгебра, соответствующая дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1. Минимальное проективное представление неразложимого непроективного A-модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P.*

В дальнейшем это позволит, как мы надеемся, получить полную классификацию двучленных наклоняющих комплексов над алгебрами, соответствующими деревьям Брауэра. В разделах 5 и 6, в качестве иллюстрации, мы описываем все двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра, и вычисляем их кольца эндоморфизмов (для произвольной кратности). Стоит отметить, что результаты частей 5 и 6 частично пересекаются с [4, 5].

Авторы выражают признательность А. И. Генералову за ценные замечания.

§2. Определения и предварительные сведения

Пусть K – алгебраически замкнутое поле, A – конечномерная алгебра над K. Обозначим через A-mod категорию левых конечно порожденных A-модулей, $K^b(A)$ – ограниченную гомотопическую категорию и $D^b(A)$ – ограниченную производную категорию категории A-mod. Функтор сдвига на производной категории будем обозначать [1]. Обозначим A-perf полную подкатегорию $D^b(A)$, состоящую из совершенных комплексов, т.е. ограниченных комплексов конечно порожденных проективных A-модулей. В алгебрах путей колчанов произведение стрелок $\xrightarrow{a}\xrightarrow{b}$ будем записывать в виде ab. Для удобства все алгебры предполагаются базисными.

Определение 1. *Комплекс $T \in A$-perf называется наклоняющим, если*

(1) $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[i]) = 0$, *при* $i \neq 0$;
(2) A-perf *порождена T как триангулированная категория.*

Наклоняющие комплексы были определены Рикардом ([6]) и играют очень важную роль в исследовании эквивалентностей между производными категориями.

Определение 2. *Комплекс $T \in A$-perf называется частично наклоняющим, если выполнено условие 1 из определения 1.*

Определение 3. *Наклоняющий комплекс $T \in A$-perf называется базисным, если в нем нет изоморфных прямых слагаемых, или, что то же самое, если $\mathrm{End}_{D^b(A)}(T)$ – базисная алгебра.*

Будем называть (частично) наклоняющий комплекс двучленным, если он сосредоточен в двух соседних степенях.

Определение 4. *Алгебра A называется специальной бирядной алгеброй (SB-алгеброй), если A изоморфна KQ/I для некоторого колчана Q и допустимого идеала I, причем:*

(1) *любая вершина Q является началом не более двух стрелок;*
(2) *любая вершина Q является концом не более двух стрелок;*
(3) *если b – стрелка в Q, то существует не более одной стрелки a, такой что $ab \notin I$;*
(4) *если b – стрелка в Q, то существует не более одной стрелки c, такой что $bc \notin I$.*

Для SB-алгебр известна полная классификация неразложимых модулей с точностью до изоморфизма ([7, 8]).

Определение 5. *Пусть B – симметрическая* SB-*алгебра над полем K. A-циклом будем называть максимальный упорядоченный набор неповторяющихся стрелок колчана Q такой, что произведение любых двух соседних стрелок не равно нулю.*

Заметим, что симметричность алгебры означает, что A-цикл действительно является циклом. Также иногда A-циклом называется просто максимальный упорядоченный набор стрелок колчана Q такой, что произведение любых двух соседних стрелок не равно нулю (см. [9]). Отметим, что в этом случае A-цикл – это максимальный ненулевой путь в алгебре B.

Важнейшим примером самоинъективных SB-алгебр конечного типа представления являются алгебры, соответствующие деревьям Брауэра. Также эти алгебры играют важную роль в модулярной теории представлений конечных групп.

Определение 6. *Пусть* Γ *– дерево с n ребрами и одной отмеченной вершиной, которой приписана кратность $k \in \mathbb{N}$, и пусть в* Γ *зафиксирован циклический порядок ребер, инцидентных каждой вершине (в случае, когда* Γ *лежит на плоскости будем считать, что ребра упорядочены по часовой стрелке). В этом случае* Γ *называется деревом Брауэра типа (n, k).*

Каждому дереву Брауэра типа (n, k) можно поставить в соответствие алгебру $A(n, k)$. Алгебра $A(n, k)$ – это конечномерная алгебра с n простыми модулями. Простые модули S_i находятся во взаимно однозначном соответствии с ребрами $i \in \Gamma$, два ряда композиционных факторов неразложимого проективного модуля P_i (с верхушкой S_i) получаются с помощью обхода против часовой стрелки ребер, инцидентных ребру i. Обход совершается k раз, начиная с ребра i, если вершина (вокруг которой производится обход) исключительная, и один раз в противном случае. Полное описание алгебр, соответствующих деревьям Брауэра в терминах композиционных факторов приведено в [10].

Кроме того, Рикард доказал, что две алгебры, соответствующие деревьям Брауэра Γ и Γ', производно эквивалентны тогда и только тогда, когда их типы (n, k) и (n', k') совпадают ([11]), а из результата Габриэля и Ридманн вытекает, что класс алгебр, соответствующих деревьям Брауэра замкнут относительно производной эквивалентности ([12]).

§3. Двучленные наклоняющие комплексы над самоинъективными алгебрами

Пусть A – произвольная самоинъективная конечномерная K-алгебра.

Лемма 1. *Любой двучленный комплекс* $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1 \in A\text{-perf}$ *изоморфен прямой сумме минимального проективного представления некоторого модуля и комплекса, состоящего из проективного модуля, сосредоточенного в* 0.

Доказательство. Обозначим коядро f через M. Минимальное проективное представление M выделяется в T прямым слагаемым. Таким образом, T изоморфен прямой сумме минимального проективного представления M, некоторого возможно нулевого слагаемого P^0, сосредоточенного в 0, на котором f действует нулем, и комплекса вида $P \xrightarrow{\mathrm{id}} P$, гомотопного 0. $\square$

Будем считать, что минимальное проективное представление модуля сосредоточено в степенях 0 и 1 в когомологических обозначениях. Для простоты будем рассматривать минимальные проективные представления модулей без проективных прямых слагаемых. Прямые слагаемые, сосредоточенные в степени 1, соответствующие проективным модулям, рассмотрим отдельно в предложении 3.

Предложение 2. *Пусть A – самоинъективная K-алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ – минимальное проективное представление модуля M. Комплекс T является частично наклоняющим тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0 \quad \text{и} \quad \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0.$$

Доказательство. Пусть существует $h : P^1 \to P^0$ такой, что $hf = 0 = fh$, то есть h задает морфизм $T \to T[-1]$.

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r, "i"] & P^0 \arrow[r] & P^1 \arrow[r, "\pi"] \arrow[dl] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] \arrow[dlll, dashed] \arrow[dll, dashed] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ker}(f) \arrow[r] & P^0 \arrow[r] & P^1 \arrow[r] & \mathrm{Coker}(f) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Условие $hf = 0$ означает $\mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(h)$, следовательно, h пропускается через $\mathrm{Coker}(f)$, то есть существует $h' \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}(f), P^0)$ такой, что $h = h'\pi$, но π – сюръекция, значит $\mathrm{Im}(h) = \mathrm{Im}(h')$.

Условие $fh = 0$ влечет $\mathrm{Im}(h') = \mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$, следовательно, h' пропускается через $\mathrm{Ker}(f)$, то есть существует h'' такой, что $h' = ih''$, $h = ih''\pi$. Заметим, что $h = 0$ тогда и только тогда, когда $h'' = 0$, так как π – сюръекция, а i – вложение.

Также, имея некоторый ненулевой $h'' \in \mathrm{Hom}_A(\mathrm{Coker}(f), \mathrm{Ker}(f))$, мы можем построить по нему $h = ih''\pi$, задающий ненулевой морфизм $T \to T[-1]$. Получаем, что

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[-1]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0. \qquad (*)$$

Теперь проверим, что

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[1]) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0. \qquad (**)$$

Имеем $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[1]) = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, P_\bullet) = \mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, M)$, где $P_\bullet$ – проективная резольвента M. Так как T состоит из проективных модулей, имеем $\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, M) = \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M)$. □

Следствие 1. *Проективное представление бэнд-модуля над симметрической* SB*-алгеброй не может быть частично наклоняющим комплексом.*

Доказательство. В колчане Ауслендера–Райтен все бэнд-модули лежат на 1-трубках ([13]) и $\Omega^2 M = M$. □

Следующее утверждение доказывается аналогично предложению 1.

Предложение 3. *Пусть A – самоинъективная алгебра, M – модуль без проективных прямых слагаемых, и пусть минимальное проективное представление модуля M является частично наклоняющим комплексом.*

Сумма проективного модуля P, сосредоточенного в 0, и минимального проективного представления модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_A(M, P) = 0 = \mathrm{Hom}_A(P, M)$.

Сумма проективного модуля P, сосредоточенного в 1, и минимального проективного представления модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда $\mathrm{Hom}_A(\Omega^2 M, P) = 0 = \mathrm{Hom}_A(P, \Omega^2 M)$.

§4. Двучленные наклоняющие комплексы над алгебрами Брауэра с кратностью исключительной вершины 1

Следующее замечание ([14]) играет важную роль.

Замечание 1. Пусть A – конечномерная алгебра над полем K, proj-A и inj-A – категории конечно порожденных проективных модулей и инъективных модулей соответственно, $K^b(\text{proj-}A)$, $K^b(\text{inj-}A)$ – ограниченные гомотопические категории, D – двойственность категории A-модулей относительно K. Тогда функтор Накаямы ν индуцирует эквивалентность триангулированных категорий

$$K^b(\text{proj-}A) \to K^b(\text{inj-}A)$$

и существует естественный изоморфизм $D\text{Hom}(P, -) \to \text{Hom}(-, \nu P)$ для $P \in K^b(\text{proj-}A)$.

В частности, в случае симметрической алгебры это означает, что для $T \in A$-perf условие $\text{Hom}_{D^b(A)}(T, T[1]) = 0$ выполнено тогда и только тогда, когда $\text{Hom}_{D^b(A)}(T, T[-1]) = 0$.

Далее в этом разделе мы будем рассматривать только алгебры Брауэра A, соответствующие деревьям Брауэра Γ таким, что кратность исключительной вершины Γ равняется 1. Зафиксируем некоторый A-модуль M, обозначим через $T := P^0 \xrightarrow{f} P^1$ его минимальное проективное представление.

Лемма 2. *Пусть M – неразложимый непроективный A-модуль. Условие* $\text{Hom}_A(P^0, M) = 0$ *влечет*

$$\text{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0 \quad \textit{и} \quad \text{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0.$$

Доказательство. Условие $\text{Hom}_A(P^0, M) = 0$ очевидно влечет

$$\text{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0.$$

Покажем, что $\text{Hom}_A(P^0, M) = 0$ влечет $\text{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0$. Из условия $\text{Hom}_A(P^0, M) = 0$ следует, что у M нет композиционного фактора, изоморфного прямому слагаемому $\text{top}(P^0) = \text{soc}(P^0)$. $\Omega^2 M$ – это подмодуль P^0, значит, $\text{soc}(\Omega^2 M) \subseteq \text{soc}(P^0)$. Для любого $h \in \text{Hom}_A(M, \Omega^2 M)$ имеем: $\text{Im}(h) \cap \text{soc}(\Omega^2 M) = 0$, а значит, $h = 0$. $\square$

Лемма 3. *Пусть M – непроективный A-модуль такой, что* $\dim(\text{top}(M)) = 1$. *Минимальное проективное представление модуля*

M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P.

Доказательство. Из условия $\dim(\mathrm{top}(M)) = 1$ следует, что $M \simeq P^1/U$, где P^1 – неразложимый.

Если $U = \mathrm{soc}(P^1)$, то $P^0 \simeq P^1$ в силу симметричности A. Это значит, что $\Omega^2 M$ вкладывается в P^1, следовательно,

$$\mathrm{soc}(\Omega^2 M) = \mathrm{soc}(P^1) = \mathrm{top}(P^1) = \mathrm{top}(M),$$

а значит, $\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) \neq 0$. Пользуясь $(*)$, получаем

$$\mathrm{Hom}_{D^b(A)}(T, T[-1]) \neq 0.$$

Предположим, что $U \neq \mathrm{soc}(P^1)$, обозначим через I множество индексов, соответствующих композиционным факторам $\mathrm{top}(U)$. Проективное накрытие модуля U изоморфно $\bigoplus\limits_{i\in I} Ae_i$. Так как $U \neq \mathrm{soc}(P^1)$, I не содержит индекса, соответствующего $\mathrm{soc}(P^1)$, а также индексов, соответствующих композиционным факторам P^1/U (над алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, у неразложимого проективного модуля нет изоморфных композиционных факторов кроме верхушки и цоколя), поэтому $\mathrm{Hom}_A(P^0, M) = 0$. По лемме 2 и предложению 1 минимальное проективное представление P^1/U – частично наклоняющий комплекс. □

Обозначим через $CF(L)$ множество композиционных факторов модуля L.

Лемма 4. *Для любого неразложимого непроективного A-модуля M такого, что $\dim(\mathrm{top}(M)) \geqslant 2$, имеем $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0$.*

Доказательство. Заметим, что условие $\dim(\mathrm{top}(M)) \geqslant 2$ влечет

$$CF(\mathrm{top}(P^0)) \cap CF(M) \subseteq \mathrm{soc}(M).$$

Действительно, над алгеброй, соответствующей дереву Брауэра с кратностью исключительной вершины 1, у неразложимого непроективного модуля нет изоморфных композиционных факторов, поэтому $CF(\mathrm{top}(P^0)) \cap CF(M) \subseteq \mathrm{soc}(M)$. Следовательно, для любого морфизма $h : P^0 \to M$ имеем: $\mathrm{Im}(h) \subseteq \mathrm{soc}(M)$, а значит $\mathrm{Ker} h \supseteq \mathrm{rad}(P^0) \supseteq \mathrm{Ker} f$, поэтому h пропускается через f, и $h = 0$ в $K^b(A)$. □

Окончательно получаем следующий результат.

Теорема 2. *Минимальное проективное представление неразложимого непроективного модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда M не изоморфен $P/\mathrm{soc}(P)$ ни для какого неразложимого проективного модуля P.*

Доказательство. Случай $\dim(\mathrm{top}(M)) = 1$ рассмотрен в лемме 3; в случае $\dim(\mathrm{top}(M)) \geqslant 2$ нужный результат получаем с помощью леммы 4, утверждения $(**)$ и замечания 1. $\square$

§5. Двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра

Рассмотрим колчан Q :

$$\begin{tikzcd}
 & 2 \arrow[r, "\alpha_2"] & 3 \arrow[dr] & \\
1 \arrow[ur, "\alpha_1"] & & & 4 \arrow[dl] \\
 & n \arrow[ul, "\alpha_n"] & \cdots \arrow[l] &
\end{tikzcd}$$

Будем считать, что вершины колчана пронумерованы элементами $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Рассмотрим идеал I, порожденный соотношениями:

$$I := \langle(\alpha_i \cdot \alpha_{i+1} \cdot \ldots \cdot \alpha_{i-1})^k \cdot \alpha_i,\ i = 1, \ldots, n\rangle.$$

Положим $A = kQ/I$. Обозначим через e_i путь длины 0, соответствующий вершине i.

Любой неразложимый модуль над этой алгеброй – цепной, в частности, он однозначно определяется упорядоченным набором своих композиционных факторов. Будем обозначать модуль набором индексов, соответствующих его композиционным факторам и упорядоченных от верхушки к цоколю. Например, простой модуль, соответствующий идемпотенту e_i, обозначаем (i).

В предыдущем пункте было получено описание двучленных частично наклоняющих комплексов в случае $k = 1$. Теперь для алгебр, соответствующих звезде Брауэра, опишем такие комплексы при произвольном k.

Утверждение 1. *Минимальное проективное представление неразложимого A-модуля M является частично наклоняющим комплексом тогда и только тогда, когда $l(M) < n$, где $l(M)$ – длина модуля M.*

Доказательство. Если $|CF(M)| > n-1$, то и в M и в $\Omega^2 M$ в качестве композиционных факторов встречаются все простые модули. В частности, $\mathrm{top}(M)$ является композиционным фактором $\Omega^2 M$, следовательно, $\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) \neq 0$. Если $|CF(M)| < n$, то в $\Omega^2 M$ нет композиционного фактора, изоморфного $\mathrm{top}(M)$, а значит,

$$\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 M) = 0.$$

Также понятно, что $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(T, M) = 0$, так как в M нет композиционного фактора, изоморфного $\mathrm{top}(P^0)$. □

Опишем все двучленные наклоняющие комплексы над алгеброй A, сосредоточенные в степенях 0 и 1. Пусть даны два модуля $M = (i, i-1, \ldots, j)$ и $N = (m, m-1, \ldots, l)$ таких, что число композиционных факторов M и N меньше n. Пусть T – минимальное проективное представление M, T' – минимальное проективное представление N. Сформулируем, что значит, что сумма этих минимальных проективных представлений является частично наклоняющим комплексом. Заметим, что $\Omega^2 M = (i-1, \ldots, j-1)$, $\Omega^2 N = (m-1, \ldots, l-1)$.

$\mathrm{Hom}_A(M, \Omega^2 N) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$i \notin \{m-1, m-2, \ldots, l-1\}$$

или $i \in \{m-1, m-2, \ldots, l-1\}$, но $j \in \{i, i-1, \ldots, l\}$.

$\mathrm{Hom}_A(N, \Omega^2 M) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$m \notin \{i-1, i-2, \ldots, j-1\}$$

или $m \in \{i-1, i-2, \ldots, j-1\}$, но $l \in \{m, m-1, \ldots, j\}$.

Анализируя эти условия, получаем, что либо наборы

$$\{i, i-1, \ldots, j-1\}, \quad \{m, m-1, \ldots, l-1\}$$

не пересекаются, либо один содержится в другом.

Выясним, когда сумма минимального проективного представления модуля $M = (i, i-1, \ldots, j)$ и сосредоточенного в 0 проективного модуля $P = P_m = (m, m-1, \ldots, m)$ является частично наклоняющим комплексом.

$\mathrm{Hom}_A(M, P) = 0 = \mathrm{Hom}_A(P, M)$ тогда и только тогда, когда $m \notin \{i, i-1, \ldots, j\}$.

Аналогично, слагаемыми одного наклоняющего комплекса могут быть минимальное проективное представление модуля

$$M = (i, i-1, \ldots, j)$$

и сосредоточенный в 1 проективный модуль $P = P_m = (m, m-1, \ldots, m)$, если и только если $\mathrm{Hom}_A(\Omega^2 M, P) = 0 = \mathrm{Hom}_A(P, \Omega^2 M)$, то есть

$$m \notin \{i-1, i-2, \ldots, j-1\}.$$

Отметим также, что либо все проективные слагаемые сосредоточены в 0, либо все проективные слагаемые сосредоточены в 1, так как для любых двух проективных модулей P_m, P_l имеем $\mathrm{Hom}_A(P_m, P_l) \neq 0$.

Известно, что в случае симметрической алгебры конечного типа представления любой частично наклоняющий комплекс с n неизоморфными прямыми слагаемыми (где n – число простых модулей) является наклоняющим ([3]). Таким образом, описать все двучленные наклоняющие комплексы – это то же самое, что описать все конфигурации из n попарно ортогональных неразложимых комплексов, каждый из которых либо является минимальным проективным представлением неразложимого модуля M такого, что число композиционных факторов M меньше n, либо является проективным модулем, сосредоточенным в 0 или 1, то есть из n комплексов, попарно удовлетворяющих условиям описанным ранее.

Будем называть интервалом множество вершин n-угольника, идущих по порядку, с отмеченным началом и концом. Покрытием S n-угольника выделенными интервалами будем называть следующую структуру: n-угольник с разбиением множества вершин на непересекающиеся интервалы (назовем их внешними), в каждом интервале может быть от 1 до n вершин. В каждом внешнем интервале, состоящем из r вершин, $r > 1$, дополнительно выделено $r-2$ внутренних интервала, в каждом из которых больше 1 вершины, внутренние интервалы либо не пересекаются, либо содержатся один внутри другого. Также в каждом внешнем интервале $(i, i-1, \ldots, j)$, длина которого больше 1, выделим внутренний интервал длины 1 следующим образом: одновременно для всех внешних интервалов это либо начало, либо конец. Заметим, что покрытие содержит ровно n интервалов. Такому покрытию S можно следующим образом поставить в соответствие двучленный наклоняющий комплекс T_S.

Рассмотрим 2 случая.

1) Всем внешним интервалам $(i, i-1, \ldots, j) \in S$, длина которых больше 1, соответствуют внутренние интервалы длины 1, состоящие из вершины (j). Построим наклоняющий комплекс следующим образом: каждому интервалу $(i, i-1, \ldots, j)$, количество вершин в котором больше 1, поставим в соответствие модуль $M = (i, i-1, \ldots, j+1)$. Для всех таких интервалов в качестве слагаемого наклоняющего комплекса возьмем минимальное проективное представление модуля M. Каждому интервалу, состоящему из 1 вершины, поставим в соответствие проективный модуль, соответствующий единственной вершине этого интервала, сосредоточенный в 0. Получаем n слагаемых.

2) Всем внешним интервалам $(i, i-1, \ldots, j) \in S$, длина которых больше 1, соответствуют внутренние интервалы длины 1, состоящие из вершины (i). Также, каждому интервалу $(i, i-1, \ldots, j)$, количество вершин в котором больше 1, поставим в соответствие модуль $M = (i, i-1, \ldots, j+1)$. Для всех таких интервалов в качестве слагаемого наклоняющего комплекса возьмем минимальное проективное представление модуля M. Каждому интервалу, состоящему из 1 вершины, поставим в соответствие проективный модуль, соответствующий единственной вершине из этого интервала, сосредоточенный в 1.

Тривиальному покрытию, состоящему лишь из интервалов длины 1, соответствуют два наклоняющих комплекса: A и $A[-1]$.

Из предыдущих построений вытекает следующее утверждение.

Предложение 4. *Множество базисных двучленных наклоняющих комплексов, неизоморфных A или $A[-1]$, над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра с n ребрами и с кратностью исключительной вершины k, находится во взаимно однозначном соответствии с множеством нетривиальных покрытий n-угольника выделенными интервалами.*

§6. Кольца эндоморфизмов

Вычислим кольцо эндоморфизмов двучленного наклоняющего комплекса над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра с кратностью исключительной вершины k, то есть кольцо эндоморфизмов комплекса, соответствующего покрытию S n-угольника. Хорошо известно, что оно изоморфно алгебре, соответствующей некоторому дереву Брауэра Γ с кратностью исключительной вершины k. Для этого мы сначала вычислим матрицу Картана алгебры $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, это даст нам информацию о том, какие ребра дерева Γ инцидентны одной и той же вершине. После чего останется установить циклический порядок ребер, инцидентных одной и той же вершине Γ. Матрицу Картана алгебры $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$ легко вычислить с помощью хорошо известной формулы Хаппеля ([15]): пусть $Q = (Q^r)_{r\in\mathbb{Z}}, R = (R^s)_{s\in\mathbb{Z}} \in A\text{-perf}$, тогда

$$\sum_i (-1)^i \mathrm{dim}_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Q, R[i]) = \sum_{r,s} (-1)^{r-s} \mathrm{dim}_K \mathrm{Hom}_A(Q^r, R^s).$$

Заметим, что если $\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Q, R[i]) = 0$ при $i \neq 0$ (например, в случае, когда Q, R – слагаемые наклоняющего комплекса), то левая часть равенства превращается в $\mathrm{dim}_K \mathrm{Hom}_{K^b(A)}(Q, R)$.

Как и прежде, рассмотрим 2 случая.

1) Всем внешним интервалам $(i, i-1, \ldots, j) \in S$, длина которых больше 1, соответствуют внутренние интервалы длины 1, состоящие из вершины (j), то есть все проективные модули, являющиеся прямыми слагаемыми T_S, сосредоточены в 0. Пусть $(i, i-1, \ldots, j)$, $(t, t-1, \ldots, l) \in S$ – два произвольных интервала покрытия S, длина которых больше 1. Пусть $(m), (r) \in S$ – интервалы длины 1. Легко видеть, что:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_j \to P_i, P_l \to P_t))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \{i, i-1, \ldots, j\} \cap \{t, t-1, \ldots, l\} = \varnothing; \\ 0, & \text{если } \{i, i-1, \ldots, j\} \subset \{t, t-1, \ldots, l\}, \quad i \neq t, \quad j \neq l; \\ 1, & \text{если } \{i, i-1, \ldots, j\} \subset \{t, t-1, \ldots, l\}, \quad i = t, \quad j \neq l; \\ 1, & \text{если } \{i, i-1, \ldots, j\} \subset \{t, t-1, \ldots, l\}, \quad i \neq t, \quad j = l; \\ 2, & \text{если } \{i, i-1, \ldots, j\} = \{t, t-1, \ldots, l\}; \end{cases}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_m, P_j \to P_i)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = j; \\ 0, & \text{если } m \neq j; \end{cases}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_j \to P_i, P_m)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = j; \\ 0, & \text{если } m \neq j; \end{cases}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_m, P_r)) = \begin{cases} k, & \text{при } m \neq r; \\ k+1, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Эти данные дают нам разбиение вершин колчана $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$ на A-циклы, или, что то же самое, то, какие ребра дерева Брауэра

$\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$ инцидентны одной и той же вершине (будем отождествлять ребра дерева Брауэра алгебры $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$ и соответствующие им неразложимые слагаемые T_S). Осталось выяснить циклический порядок ребер вокруг вершин в дереве Брауэра и то, какая вершина является исключительной. Заметим, что, если нам удастся упорядочить вершины A-цикла длины r так, чтобы последовательная композиция kr морфизмов (в случае исключительного цикла) или r морфизмов (в случае неисключительного цикла) между ними не была гомотопна нулю, то это и даст нам нужный циклический порядок.

В случае, когда все проективные модули, являющиеся прямыми слагаемыми наклоняющего комплекса, сосредоточены в 0, в алгебре $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$ бывают следующие типы A-циклов: а) A-цикл, состоящий из проективных модулей; б) A-цикл, состоящий из неразложимого проективного модуля P, сосредоточенного в 0, и из двучленных комплексов, у которых P является нулевой компонентой; в) A-цикл, состоящий из двучленных комплексов, у которых совпадают нулевые компоненты; г) A-цикл, состоящий из двучленных комплексов, у которых совпадают компоненты, сосредоточенные в 1.

Для удобства введем следующие обозначения: гомоморфизм $P_l \to P_m$ умножения справа на $\alpha_l\alpha_{l+1}...\alpha_{m-1}$ будем обозначать $\alpha_{l,m-1}$.

а) Пусть $(m_1),(m_2),\dots,(m_r) \in S$, причем множество $\{m_1,m_2,\dots,m_r\}$ упорядочено в соответствии с циклическим порядком ребер в звезде Брауэра, r максимально. Понятно, что имеет место следующая диаграмма из цепных отображений:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_1,m_2-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_r} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_r,m_1-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_{m_1} \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

и последовательная композиция любых kr морфизмов не гомотопна 0. Таким образом, все ребра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, соответствующие проективным модулям, сосредоточенным в 0, имеют общий конец. Циклический порядок ребер в звезде Брауэра индуцирует циклический порядок в $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, и вершина дерева Брауэра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, соответствующая этому циклу – исключительная.

б) Пусть

$$(m_1, m_1-1, \ldots, j), (m_2, m_2-1, \ldots, j), \ldots, (m_r, m_r-1, \ldots, j), (j) \in S,$$

причем множество $\{j, m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ упорядочено в соответствии с циклическим порядком ребер в звезде Брауэра, r максимально. Рассмотрим следующую диаграмму из цепных отображений:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha_{j,j-1})^k"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & P_{m_1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_1,m_2-1}"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & P_{m_r} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_j \arrow[r] & 0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Последовательная композиция любых $r+1$ морфизмов не гомотопна 0. Это означает, что ребра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, соответствующие этому A-циклу, упорядочены следующим образом

$$\{P_j, P_j \to P_{m_1}, P_j \to P_{m_2}, \ldots, P_j \to P_{m_r}\}.$$

в) Аналогично, если

$$(m_1, m_1-1, \ldots, j), (m_2, m_2-1, \ldots, j), \ldots, (m_r, m_r-1, \ldots, j) \in S$$

– множество интервалов, соответствующее некоторому A-циклу $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, причем множество $\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ упорядочено в соответствии с циклическим порядком ребер в звезде Брауэра, r максимально, то ребра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, соответствующие этому A-циклу, упорядочены следующим образом $\{P_j \to P_{m_1}, P_j \to P_{m_2}, \ldots, P_j \to P_{m_r}\}$.

г) Рассмотрим теперь A-циклы, состоящие из слагаемых, у которых совпадают компоненты, сосредоточенные в 1. Пусть

$$(j, j-1, \ldots, m_1), (j, j-1, \ldots, m_2), \ldots, (j, j-1, \ldots, m_r) \in S,$$

причем множество $\{m_1, m_2, \ldots, m_r\}$ упорядочено в соответствии с циклическим порядком ребер в звезде Брауэра, r максимально. Тогда имеет место следующая диаграмма из цепных отображений:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_1,m_2-1}"] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_2} \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_{r-1},m_r-1}"] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_r} \arrow[r] \arrow[d, "0"] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha_{j,j-1})^k"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_{m_1} \arrow[r] & P_j \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

Последовательная композиция любых r морфизмов не гомотопна 0. Это означает, что ребра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, соответствующие этому A-циклу, упорядочены следующим образом

$$\{P_{m_1} \to P_j, P_{m_2} \to P_j, \ldots, P_{m_r} \to P_j\}.$$

Этим заканчивается рассмотрение случая 1. Для каждого из четырех типов A-циклов мы описали циклический порядок вершин, который естественно индуцируется порядком вершин алгебры, соответствующей звезде Брауэра.

2) Рассмотрим второй случай. Всем внешним интервалам $(i, i-1, \dots, j) \in S$, длина которых больше 1, соответствуют внутренние интервалы длины 1, состоящие из вершины (i), то есть все проективные модули T_S сосредоточены в 1. Пусть

$$(i, i-1, \dots, j), (t, t-1, \dots, l) \in S$$

– два интервала, длина которых больше 1. Пусть (m), $(r) \in S$ – интервалы длины 1. Легко видеть, что:

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_j \to P_i, P_l \to P_t))$$

$$= \begin{cases} 0, & \text{если } \{i, i-1, \dots, j\} \cap \{t, t-1, \dots, l\} = \varnothing; \\ 0, & \text{если } \{i, i-1, \dots, j\} \subset \{t, t-1, \dots, l\}, \quad i \neq t, \quad j \neq l; \\ 1, & \text{если } \{i, i-1, \dots, j\} \subset \{t, t-1, \dots, l\}, \quad i = t, \quad j \neq l; \\ 1, & \text{если } \{i, i-1, \dots, j\} \subset \{t, t-1, \dots, l\}, \quad i \neq t, \quad j = l; \\ 2, & \text{если } \{i, i-1, \dots, j\} = \{t, t-1, \dots, l\}; \end{cases}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_m, P_j \to P_i)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = i; \\ \\ 0, & \text{если } m \neq i; \end{cases}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_j \to P_i, P_m)) = \begin{cases} 1, & \text{если } m = i; \\ \\ 0, & \text{если } m \neq i; \end{cases}$$

$$\dim(\mathrm{Hom}_{K^b(A)}(P_m, P_r)) = \begin{cases} k, \ \text{при } m \neq r; \\ \\ k+1, \ \text{иначе.} \end{cases}$$

Как и в предыдущем случае, исключительная вершина соответствует циклу, составленному из проективных модулей (на этот раз сосредоточенных в 1). Все A-циклы делятся на четыре типа, для трех из которых (а именно, а, в, г) циклический порядок вершин уже установлен. Остается случай

д) Пусть

$$(j, j-1, \dots, m_1), (j, j-1, \dots, m_2), \dots, (j, j-1, \dots, m_r), \quad (j) \in S,$$

причем множество $\{j, m_1, m_2, \dots, m_r\}$ упорядочено в соответствии с циклическим порядком ребер в звезде Брауэра, r максимально. Тогда имеет место следующая диаграмма из цепных отображений:

$$
\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_1} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_1,m_2-1}"] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_2} \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_{r-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\alpha_{m_{r-1},m_r-1}"] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_{m_r} \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "(\alpha_{j,j-1})^k"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & P_j \arrow[r] \arrow[d, "1"] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & 0 \arrow[r] & P_{m_1} \arrow[r] & P_j \arrow[r] & 0 \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}
$$

Последовательная композиция любых $r+1$ морфизмов не гомотопна 0. Это означает, что ребра $\mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$, соответствующие этому A-циклу, упорядочены следующим образом

$$\{P_{m_1} \to P_j, P_{m_2} \to P_j, \ldots, P_{m_r} \to P_j, P_j\}.$$

Из описания колец эндоморфизмов двучленных наклоняющих комплексов легко получаем следующее.

Замечание 2. Двучленный наклоняющий комплекс T_S, неизоморфный A и $A[-1]$, над алгеброй, соответствующей звезде Брауэра с n ребрами и с кратностью исключительной вершины 1, задает производную автоэквивалентность тогда и только тогда, когда покрытие n-угольника S имеет следующий вид:

$$(j, j-1, \ldots, j+1), (j, j-1, \ldots, j+2), \ldots, (j, j-1), (j), \quad j = 1, \ldots, n$$

или

$$(j-1, j-2, \ldots, j), (j-2, j-3, \ldots, j), \ldots, (j+1, j), (j), \quad j = 1, \ldots, n.$$

Подгруппа производной группы Пикара, порожденная этими автоэквивалентностями, была изучена в статье [2].

В случае $k \neq 1$ двучленный наклоняющий комплекс T_S задает производную автоэквивалентность тогда и только тогда, когда покрытие S тривиально.

Предложение 5. *Для любой алгебры B, соответствующей дереву Брауэра Γ с n ребрами и кратностью исключительной вершины k, существует двучленный наклоняющий комплекс T_S над алгеброй A такой, что $B \simeq \mathrm{End}_{K^b(A)}(T_S)$.*

Доказательство. Будем предполагать, что у дерева Γ корень выбран в исключительной вершине, и оно расположено на плоскости так, что все некорневые вершины лежат ниже корневой в соответствии со своим уровнем (чем дальше от корня, тем ниже, вершины одного уровня лежат на горизонтальной прямой). Ребра вокруг вершины упорядочены по часовой стрелке.

Пронумеруем ребра дерева Γ следующим образом: на самом правом ребре, инцидентном корневой вершине, поставим метку 1, на следующем по порядку ребре, инцидентном корневой вершине, поставим метку $1 + k_1 + 1$, где k_1 – число потомков некорневого конца ребра с меткой 1. Пусть на $i-1$ ребре, инцидентном корневой вершине, стоит метка m, а у некорневой вершины, инцидентной ребру с меткой m, имеется k_m потомков. Поставим на i-ом ребре метку $m + k_m + 1$. Далее будем расставлять метки следующим образом: рассмотрим вершину нечетного уровня (вершина, которую можно соединить с корневой вершиной путем нечетной длины). Пусть на ребре, соединяющем ее с вершиной верхнего уровня, стоит метка j. Поставим на самом правом ребре, инцидентном этой вершине, метку $j + 1 + k_1$, где k_1 – число потомков другого конца этого ребра; на следующем по порядку ребре, инцидентном этой вершине, поставим метку $j+1+k_1+k_2+1$, где k_2 – число потомков другого конца этого ребра. Далее будем расставлять метки по индукции: пусть на $(i-1)$-ом ребре, инцидентном исходной вершине, стоит метка m, а у нижней вершины, инцидентной следующему ребру, инцидентному исходной вершине, k_i потомков, поставим на i-ом ребре метку $m + k_i + 1$.

Рассмотрим вершину четного уровня. Пусть на ребре, соединяющем ее с вершиной верхнего уровня, стоит метка t, а на ребре, соединяющем другой конец ребра с меткой t и вершину еще более верхнего уровня стоит метка j. Поставим на самом правом ребре, инцидентном рассматриваемой вершине, метку $j+1$. На следующем по порядку ребре, инцидентном этой вершине, поставим метку $j+1+k_{j+1}+1$, где k_{j+1} – число потомков другого конца ребра с меткой $j+1$. Пусть на $(i-1)$-ом ребре, инцидентном исходной вершине, стоит метка m, а у нижней вершины, инцидентной $(i-1)$-ому ребру, инцидентному исходной вершине, k_m потомков, поставим на i-ом ребре метку $m+k_m+1$.

По дереву Γ с метками построим наклоняющий комплекс над алгеброй A (вершины колчана A упорядочены по часовой стрелке). Предположим, что у корневой вершины Γ имеется l детей, на ребрах, инцидентных корневой вершине, стоят метки $\{n_1, n_2, \dots, n_l\}$. В качестве слагаемых наклоняющего комплекса, соответствующих этим ребрам, возьмем $P_{n_1}, P_{n_2}, \dots, P_{n_l}$, сосредоточенные в 0. Рассмотрим вершину нечетного уровня (вершина, которую можно соединить с корневой вершиной путем нечетной длины). Предположим, что на ребре, которое соединяет ее с вершиной верхнего уровня, стоит метка j, а на остальных ребрах, инцидентных этой вершине, стоят метки $n_{j_1}, n_{j_2}, \dots, n_{j_h}$, где h – число детей этой вершины. В наклоняющем комплексе этим ребрам будут соответствовать следующие слагаемые: $P_j \to P_{n_{j_1}}, P_j \to P_{n_{j_2}}, \dots, P_j \to P_{n_{j_h}}$.

Рассмотрим вершину четного уровня. Предположим, что на ребре, которое соединяет ее с вершиной верхнего уровня, стоит метка g, а на остальных ребрах, инцидентных этой вершине, стоят метки $n_{g_1}, n_{g_2}, \dots, n_{g_d}$, где d – число детей этой вершины. В наклоняющем комплексе этим ребрам будут соответствовать слагаемые: $P_{n_{g_1}} \to P_g, P_{n_{g_2}} \to P_g, \dots, P_{n_{g_d}} \to P_g$. Понятно, что таким образом мы получим нужное число слагаемых. В силу построения, этот комплекс действительно наклоняющий, а дерево, соответствующее его кольцу эндоморфизмов – это дерево Γ.

Аналогично можно построить наклоняющий комплекс, в котором все прямые слагаемые, состоящие из проективных модулей, будут сосредоточены в 1. □

Литература

1. R. Rouquier, A. Zimmermann, *Picard groups for derived module categories.* — Proc. London Math. Soc. (3) **87** (2003), no. 1, 197–225.
2. I. Muchtadi-Alamsyah, *Braid action on derived category of Nakayama algebras.* — Comm. Algebra **36** (2008), no. 7, 2544–2569.
3. H. Abe, M. Hoshino, *On derived equivalences for selfinjective algebras.* — Comm. Algebra **34** (2006), no. 12, 4441–4452.

4. M. Schaps, E. Zakay-Illouz, *Combinatorial partial tilting complexes for the Brauer star algebras.* In: Proc. Int. Conference on Representations of Algebra, Sao Paulo (2001), pp. 187–208.
5. M. Schaps, E. Zakay-Illouz, *Pointed Brauer trees.* — J. Algebra **246** (2001), no. 2, 647–672.
6. J. Rickard, *Morita theory for derived categories.* — J. London Math. Soc. **39** (1989), no. 2, 436–456.
7. И. М. Гельфанд, В. А. Пономарев, *Неразложимые представления группы Лоренца.* — УМН **23** (1968), no. 2(140), 3–59.
8. B. Wald, J. Waschbüsch, *Tame biserial algebras.* — J. Algebra **95** (1985), 480–500.
9. М. А. Антипов, А. И. Генералов, *Конечная порожденность алгебр Йонеды симметрических специальных бирядных алгебр.* — Алгебра и анализ **17**, no. 3 (2005), 1–23.
10. J. L. Alperin, *Local representation theory.* — Cambridge Stud. Adv. Math. **11**, Cambridge Univ. Press (1986).
11. J. Rickard, *Derived categories and stable equivalence.* — J. Pure Appl. Algebra **61** (1989), 303–317.
12. P. Gabriel, C. Riedtmann, *Group representations without groups.* — Comment. Math. Helv. **54** (1979), 240–287.
13. M. C. R. Butler, C. M. Ringel, *Auslander-Reiten sequences with few middle terms and applications to string algebras.* — Comm. Algebra **15** (1-2) (1987), 145–179.
14. D. Happel, *Auslander-Reiten triangles in derived categories of finite-dimensional algebras.* In: Proc. Amer. Math. Soc. **112** (1991), 641–648.
15. D. Happel, *Triangulated Categories in the Representation Theory of Finite Dimensional Algebras.* Cambridge University Press. 1988.

Antipov M. A., Zvonareva A. O. Two-term partial tilting complexes over Brauer tree algebras.

In this paper, we describe all indecomposable two-term partial tilting complexes over a Brauer tree algebra with multiplicity 1 using a criterion for a minimal projective presentation of a module to be a partial tilting complex. As an application we describe all two-term tilting complexes over Brauer star algebra and compute their endomorphism rings.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: hyperbor@list.ru,
zvozvo@list.ru

Поступило 20 марта 2013 г.