Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

А. А. Хартов

АППРОКСИМАЦИЯ ПО ВЕРОЯТНОСТИ ТЕНЗОРНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ ВОЗРАСТАЮЩЕЙ ПАРАМЕТРИЧЕСКОЙ РАЗМЕРНОСТИ

§1. Введение

Рассмотрим последовательность гауссовских случайных полей тензорного типа

$$X_d(t) = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}^d} \prod_{l=1}^{d} \lambda_{k_l}^{1/2}\, \xi_k \prod_{l=1}^{d} \psi_{k_l}(t_l), \quad t \in [0,1]^d, \tag{1}$$

где $(\xi_k)_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}^d}$ – независимые стандартные гауссовские случайные величины; $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ и $(\psi_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ – все положительные ($\widetilde{\mathbb{N}} \subset \mathbb{N}$) собственные числа и соответствующие собственные функции ковариационного оператора процесса X_1; $\widetilde{\mathbb{N}}^d$ – d-ая декартова степень *индексного множества* $\widetilde{\mathbb{N}}$. Последовательность $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ упорядочена по невозрастанию и удовлетворяет условию $\Lambda := \sum\limits_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i < \infty$. При каждом $d \in \mathbb{N}$ траектории поля X_d почти наверное принадлежат $L_2([0,1]^d)$ с нормой $\|\cdot\|_{2,d}$. Формула (1) суть *многопараметрическая версия разложения Кархунена–Лоэва* (см. [1, часть I, глава 3, §2]) для случайного поля X_d.

Наборы $(\lambda_k, \psi_k) := \big(\prod\limits_{l=1}^{d} \lambda_{k_l}, \prod\limits_{l=1}^{d} \psi_{k_l}\big)$, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}^d$, являются собственными парами для ковариационного оператора поля X_d. Будем аппроксимировать X_d, $d \in \mathbb{N}$, частичными суммами ряда (1), отвечающими конечному набору максимальных λ_k, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}^d$. Для этого при каждом d занумеруем λ_k, $k \in \widetilde{\mathbb{N}}^d$ по невозрастанию значений. В результате получим последовательность $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, где $\widetilde{\mathbb{N}}_d$ – *одномерное индексное*

Ключевые слова: тензорные случайные поля, аппроксимация по вероятности, аппроксимация в среднем, сложность аппроксимации.

Работа поддержана грантом Ведущие научные школы (НШ-1216.2012.1), грантом НИР СПбГУ (6.38.672.2013), грантом РФФИ 13-01-00172 и грантом Правительства РФ 11.G34.31.0026.

множество для X_d. Будем всегда полагать $\widetilde{\mathbb{N}}_d = \{1, \dots, \#(\widetilde{\mathbb{N}})^d\}$, если $\widetilde{\mathbb{N}}$ – конечно, и $\widetilde{\mathbb{N}}_d = \mathbb{N}$ иначе. Тогда (1) примет вид:

$$X_d(t) = \sum_{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m}^{1/2}\, \xi_{d,m}\, \psi_{d,m}(t), \quad t \in [0,1]^d. \tag{2}$$

Под *аппроксимацией* X_d *ранга* $n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$ будем понимать следующее случайное поле:

$$X_d^{(n)}(t) := \sum_{m=1}^{n} \lambda_{d,m}^{1/2}\, \xi_{d,m}\, \psi_{d,m}(t), \quad t \in [0,1]^d. \tag{3}$$

Известно (см. [8, глава III, §2, утверждение 24]), что $X_d^{(n)}$ дает наименьшую среднеквадратическую ошибку среди всех линейных аппроксимаций X_d конечного ранга n.

При заданном уровне ошибки аппроксимации (или скорости его убывания) исследуется обратная характеристика – *сложность аппроксимации* (см. обзор [4] и [5–7]). Различают *сложность аппроксимации в среднем*

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\Big\{ n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \mathbf{E}\, \|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 \leqslant \varepsilon^2\, \mathbf{E}\, \|X_d\|_{2,d}^2 \Big\} \tag{4}$$

и *сложность аппроксимации по вероятности*

$$n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon, \delta) := \min\Big\{ n \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \mathbf{P}\, \Big(\|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 > \varepsilon^2\, \mathbf{E}\, \|X_d\|_{2,d}^2 \Big) \leqslant \delta \Big\}. \tag{5}$$

При условии $\sum\limits_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}} (-\ln \lambda_i)^2\, \lambda_i < \infty$ *логарифмическая* асимптотика этих величин найдена в работе [3], когда *параметрическая размерность* $d \to \infty$, *порог ошибки* $\varepsilon \in (0,1)$ фиксирован, а для *доверительного уровня* δ допускается $\delta = \delta(d) \to 0$. *Точные* асимптотики изучены только для сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, когда $(\lambda_i)_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}}$ удовлетворяет более сильному условию $\sum\limits_{i \in \widetilde{\mathbb{N}}} |-\ln \lambda_i|^3\, \lambda_i < \infty$ (см. [10]). Целью настоящей работы является исследование точного асимптотического поведения сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon, \delta)$ при $d \to \infty$, фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$ и при достаточно слабых условиях на δ.

§2. Вероятностная характеризация и результаты

Представления (2) и (3) для X_d и $X_d^{(n)}$ позволяют при каждом $d \in \mathbb{N}$ записать определения (4) и (5) через упорядоченные собственные числа $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$. Вычислим

$$\|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 = \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \lambda_{d,m}\,\xi_{d,m}^2, \qquad \mathbf{E}\,\|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 = \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \lambda_{d,m},$$

и также

$$\mathbf{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2 = \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d} \lambda_{d,m} = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}^d}\prod_{l=1}^{d}\lambda_{k_l} = \Big(\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}\lambda_i\Big)^d = \Lambda^d.$$

Получаем представление для сложности в среднем

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) := \min\Big\{n\in\widetilde{\mathbb{N}}_d : \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \lambda_{d,m} \leqslant \varepsilon^2\Lambda^d\Big\} \tag{6}$$

и сложности по вероятности

$$n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta) := \min\Big\{n\in\widetilde{\mathbb{N}}_d : \mathbf{P}\Big(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n}} \lambda_{d,m}\,\xi_{d,m}^2 > \varepsilon^2\Lambda^d\Big) \leqslant \delta\Big\}. \tag{7}$$

Заметим, что формула (6) была получена лишь с использованием некоррелированности $(\xi_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$ и $\mathbf{E}\,\xi_{d,m} = 0$ и $\mathbf{D}\,\xi_{d,m} = 1$, т.е. естественных условий на $(\xi_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$ в разложении Кархунена–Лоэва (1) для X_d. Поэтому в приводимых ниже известных результатах, касающихся сложности $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, гауссовость случайного поля X_d может быть опущена. Однако же в настоящей работе при исследовании $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta)$ мы ограничимся именно гауссовским случаем.

Из формул (6) и (7) заключаем, что асимптотическое поведение сложности аппроксимации, в той или иной постановке, определяется распределением при больших d спектра $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$, порождаемого исходной последовательностью $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$. В свою очередь, тонкую характеризацию $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ удобно производить, используя *вероятностный подход* (см. [3] и [10]).

Введем случайную величину со специальным распределением на некотором вероятностном пространстве с мерой $\mathbb{P}$:

$$\mathbb{P}\,(U = -\ln\lambda_i) = \kappa(\lambda_i)\cdot\frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad i\in\widetilde{\mathbb{N}}, \tag{8}$$

где $\kappa(\lambda_i) = \#\{j \in \widetilde{\mathbb{N}} : \lambda_j = \lambda_i\}$ – кратность собственного числа λ_i, $i \in \widetilde{\mathbb{N}}$. Далее все достаточные условия как известных, так и новых результатов касательно сложностей аппроксимации мы будем формулировать как условия на распределение построенной случайной величины U.

Пусть U имеет конечный второй момент:

$$\mathbf{E}\, U^2 = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} (-\ln\lambda_i)^2 \, \frac{\lambda_i}{\Lambda} < \infty. \tag{9}$$

Введем обозначения

$$E := \mathbf{E}\, U = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} (-\ln\lambda_i) \, \frac{\lambda_i}{\Lambda}, \quad \sigma^2 := \mathbf{D}\, U = \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} (-\ln\lambda_i - E)^2 \, \frac{\lambda_i}{\Lambda}.$$

Будем рассматривать наиболее интересный невырожденный случай $\sigma^2 > 0$, когда существует такое $i \in \widetilde{\mathbb{N}}$, что $\lambda_1 > \lambda_i > 0$. При условии (9) логарифмическая асимптотика сложности в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ получена Лифшицем и Туляковой в работе [3, теорема 3.2] . Сформулируем этот результат.

Теорема 2.1. *Пусть выполнено* $0 < \sigma^2 < \infty$. *Тогда для любого порога* $\varepsilon \in (0,1)$ *верно*

$$\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) = d \ln\left(\Lambda e^E\right) + q_\varepsilon \sigma d^{1/2} + o(d^{1/2}), \quad d \to \infty,$$

где q_ε *выбирается из равенства* $\Phi(q_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$.

Здесь и далее под Φ понимается функция распределения стандартного нормального закона.

Замечание 2.1. При $0 < \sigma^2 < \infty$ выполняется $\Lambda e^E > \lambda_1 e^E > 1$.

Здесь первое из неравенств очевидно. Предположение $0 < \sigma^2 < \infty$ дает $\sum\limits_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i^2 < \lambda_1 \Lambda$. Далее из определений величин Λ, E и выпуклости логарифмической функции следует второе неравенство

$$\ln\left(\lambda_1 e^E\right) = \ln\lambda_1 - \sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} (\ln\lambda_i) \, \frac{\lambda_i}{\Lambda} \geqslant \ln\lambda_1 - \ln\Big(\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}} \lambda_i^2/\Lambda\Big) > 0.$$

В итоге теорема 2.1 устанавливает экспоненциальный рост сложности аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$ и фиксированном $\varepsilon \in (0,1)$.

Для сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta)$ имеется следующий результат, также полученный в [3, теорема 3.4].

Теорема 2.2. *Пусть выполнено* $0<\sigma^2<\infty$. *Тогда для любого порога* $\varepsilon\in(0,1)$ *и любой последовательности* $\delta_{d,\varepsilon}\in(0,1/2)$, *удовлетворяющей условию*

$$\frac{-\ln(\delta_{d,\varepsilon})}{(\Lambda e^E)^d\, e^{q_\varepsilon\sigma d^{1/2}}}=0,$$

будем иметь

$$\ln n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})=\ln n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)+o(d^{1/2}),\quad d\to\infty,$$

где q_ε *выбирается из равенства* $\Phi(q_\varepsilon)=1-\varepsilon^2$.

При более сильном по сравнению с (9) условии

$$\mathbf{E}\,U^3=\sum_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}(-\ln\lambda_i)^3\,\frac{\lambda_i}{\Lambda}<\infty$$

становится возможным получение *точной* асимптотики $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, вид которой, однако, зависит от наличия *решетчатой* структуры распределения величины U.

Напомним, что невырожденная случайная величина U имеет *решетчатое распределение*, если с вероятностью 1 она принимает значения вида $a+b\nu$, $\nu\in\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}$, $b>0$. Число b называется *шагом распределения*. Если ни при каких a' и $b'>b$ значения, принимаемые случайной величиной величиной U с вероятностью 1, не могут быть записаны в виде $a'+b'\nu$, $\nu\in\mathbb{Z}$, то шаг b называется *максимальным*. Остальные дискретные (невырожденные) распределения называют *нерешетчатыми*.

Следующие результаты о точных асимптотиках $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ получены в работе [10].

Теорема 2.3. *Пусть* U *имеет нерешетчатое распределение и* $\mathbf{E}\,U^3<\infty$. *Тогда при любом пороге* $\varepsilon\in(0,1)$

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\sim\frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}\cdot\frac{\Phi'(q_\varepsilon)}{\sigma d^{1/2}},\quad d\to\infty,\tag{10}$$

в развернутом виде

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\sim(\Lambda e^E)^d\,e^{q_\varepsilon\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q_\varepsilon)\,e^{\bar q_\varepsilon\sigma}}{\sigma d^{1/2}},\quad d\to\infty,$$

где q_ε *выбирается из равенства* $\Phi(q_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$,

$$\tilde{q}_\varepsilon := (q_\varepsilon^2 - 1)\frac{\chi_3}{6\sigma^3}, \quad \chi_3 := \mathbf{E}\,(U - E)^3\,. \tag{11}$$

Теорема 2.4. *Пусть* U *имеет решетчатое распределение, принимает значения из множества* $\{(E + a) + b\nu : \nu \in \mathbb{Z}\}$ *с максимальным шагом* b *и* $\mathbf{E}\,U^3 < \infty$. *Тогда при любом пороге* $\varepsilon \in (0, 1)$

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \sim \frac{\Lambda^d}{\lambda_{d, n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \cdot \frac{\Phi'(q_\varepsilon)}{\sigma d^{1/2}} \cdot C_{d,\varepsilon}(b), \quad d \to \infty, \tag{12}$$

в развернутом виде

$$n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) \sim (\Lambda e^E)^d\, e^{q_\varepsilon \sigma d^{1/2}}\, \frac{\Phi'(q_\varepsilon)\, e^{\tilde{q}_\varepsilon \sigma}}{\sigma d^{1/2}} \cdot e^{b s_{d,\varepsilon}} C_{d,\varepsilon}(b), \quad d \to \infty,$$

где q_ε *выбирается из равенства* $\Phi(q_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$, $\tilde{q}_\varepsilon$ *определяется формулами в* (11),

$$C_{d,\varepsilon}(b) := \left(\frac{b}{1 - e^{-b}} - b \cdot \frac{s_{d,\varepsilon} + 1}{2}\right),$$

величина $s_{d,\varepsilon} \in [-1, 1)$.

Замечание 2.2. Точное определение величины $s_{d,\varepsilon}$ можно найти в [10, с. 250], здесь мы его опускаем по причине достаточной сложности.

Точное асимптотическое поведение сложности по вероятности $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon, \delta)$ устанавливается следующей теоремой, являющейся основным результатом настоящей статьи.

Теорема 2.5. *Пусть величина* U *имеет невырожденное распределение и* $\mathbf{E}\,U^3 < \infty$, *тогда для любого* $\varepsilon \in (0, 1)$ *и любой последовательности* $\delta_{d,\varepsilon} \in (0, 1)$, *удовлетворяющей условию*

$$\lim_{d \to \infty} \frac{-\ln(\min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1 - \delta_{d,\varepsilon}\})}{d^{-1/2}(\Lambda e^E)^d\, e^{q_\varepsilon \sigma d^{1/2}}} = 0,$$

где q_ε *выбирается из равенства* $\Phi(q_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$, *будем иметь*

$$n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) \sim n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon), \quad d \to \infty.$$

Доказательство данной теоремы приводится в параграфе 4 после ряда дополнительных утверждений.

§3. Вспомогательные результаты

Распределение собственных чисел $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$ будем изучать *вероятностными методами*. Причина выбора данного подхода объясняется следующей ключевой леммой.

Лемма 3.1. *Пусть $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ – независимые случайные величины с распределением* (8). *Для любых $d\in\mathbb{N}$, $p\in\mathbb{R}$ и $x>0$ верно тождество*

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant x}} \lambda_{d,m}^p = \Lambda^d\,\mathbf{E}\left(e^{(1-p)\sum_{l=1}^d U_l}\mathbb{1}\Big(\sum_{l=1}^d U_l\leqslant -\ln x\Big)\right).$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{V}:=\{\lambda_i : i\in\widetilde{\mathbb{N}}\}$ – множество значений $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ без учета кратности.

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant x}} \lambda_{d,m}^p = \sum_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}^d:\,\lambda_k\geqslant x}\prod_{l=1}^d \lambda_{k_l}^p$$

$$= \Lambda^d\sum_{v\in\mathcal{V}^d}\prod_{l=1}^d\Big(v_l^{p-1}\cdot\kappa(v_l)\,\frac{v_l}{\Lambda}\Big)\cdot\mathbb{1}\Big(\prod_{l=1}^d v_l\geqslant x\Big).$$

По определению независимых $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ получим

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant x}} \lambda_{d,m}^p = \Lambda^d\sum_{v\in\mathcal{V}^d} e^{-(1-p)\sum\limits_{l=1}^d \ln v_l}\prod_{l=1}^d \mathbb{P}\left(U_l=-\ln v_l\right)\cdot\mathbb{1}\Big(\prod_{l=1}^d v_l\geqslant x\Big)$$

$$= \Lambda^d\sum_{v\in\mathcal{V}^d} e^{-(1-p)\sum_{l=1}^d \ln v_l}\mathbb{P}\left(U_l=-\ln v_l,\ l=\overline{1,d}\right)\cdot\mathbb{1}\Big(\prod_{l=1}^d v_l\geqslant x\Big)$$

$$= \Lambda^d\,\mathbf{E}\left(e^{(1-p)\sum_{l=1}^d U_l}\mathbb{1}\Big(\sum_{l=1}^d U_l\leqslant -\ln x\Big)\right). \qquad \square$$

Следствие 3.1. *В условиях леммы* 3.1 *верно тождество*

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant x}} \lambda_{d,m} = \Lambda^d\,\mathbb{P}\Big(\sum_{l=1}^d U_l\leqslant -\ln x\Big). \tag{13}$$

Замечание 3.1. Тождество (13) отдельно доказывалось в [3] и [10].

Важной характеристикой распределения $(\lambda_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$ является *считающая функция*:

$$\mathcal{N}_d(x) := \#\{m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d : \lambda_{d,m} \geqslant x\}, \quad x > 0. \tag{14}$$

Если в лемме 3.1 положить $p = 0$, то получим выражение для $\mathcal{N}_d(x)$.

Следствие 3.2. *В условиях леммы* 3.1 *верно тождество*

$$\mathcal{N}_d(x) \quad = \quad \Lambda^d\, \mathbf{E}\left(e^{\sum_{l=1}^d U_l} \mathbb{1}\Big(\sum_{l=1}^d U_l \leqslant -\ln x\Big)\right).$$

Докажем несколько важных для дальнейшего предельных соотношений, имеющих также и некоторый самостоятельный интерес.

Утверждение 3.1. *Пусть U имеет нерешетчатое распределение и $\mathbf{E}\,U^3 < \infty$. Если для некоторой последовательности $(x_d)_{d\in\mathbb{N}}$ верно*

$$\lim_{d\to\infty} \frac{-\ln x_d - Ed}{\sigma d^{1/2}} = q \in \mathbb{R},$$

то для любого $p \neq 1$ выполнено

$$\frac{1}{\Lambda^d x_d^{p-1}} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<x_d}} \lambda_{d,m}^p \quad \sim \quad \frac{\Phi'(q)}{(p-1)\sigma d^{1/2}}, \quad d\to\infty, \quad p>1,$$

$$\frac{1}{\Lambda^d x_d^{p-1}} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}\geqslant x_d}} \lambda_{d,m}^p \quad \sim \quad \frac{\Phi'(q)}{(1-p)\sigma d^{1/2}}, \quad d\to\infty, \quad p<1.$$

Доказательство. Пусть $p > 1$, тогда в соответствии с леммой 3.1 верно соотношение

$$\begin{aligned} I_{d,p} &:= \frac{1}{\Lambda^d x_d^{p-1}} \sum_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\, \lambda_{d,m}<x_d} \lambda_{d,m}^p \\ &= \frac{1}{x_d^{p-1}}\, \mathbf{E}\left(e^{(1-p)\sum_{l=1}^d U_l} \mathbb{1}\Big(\sum_{l=1}^d U_l > -\ln x_d\Big)\right), \end{aligned}$$

где $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ – независимые копии величины U. Обозначим

$$V_d := \frac{\sum_{l=1}^d U_l - Ed}{\sigma d^{1/2}}, \quad F_d(x) := \mathbb{P}\,\left(V_d \leqslant x\right). \tag{15}$$

Тогда $I_{d,p}$ можно записать в следующем виде

$$I_{d,p} = \mathbf{E}\left(e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(V_d - y_d)}\mathbb{1}(V_d > y_d)\right) = \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}F_d(v),$$

где $y_d := \dfrac{-\ln x_d - Ed}{\sigma d^{1/2}}$.

В силу условий на U, функция F_d имеет асимптотическое разложение [9, теорема 21, §7 главы V])

$$F_d(x) = \Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty, \tag{16}$$

равномерно относительно $x \in \mathbb{R}$. Здесь

$$Q_1(x) := -\Phi'(x)\,(x^2 - 1)\,\frac{\chi_3}{6\sigma^3}\,, \tag{17}$$

где $\chi_3 := \mathbf{E}\,(U - E)^3$, функция Φ' – плотность стандартного нормального закона.

Применяя разложение (16) для F_d, получим

$$I_{d,p} = \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}\left(\Phi(v) + \frac{Q_1(v)}{d^{1/2}}\right) + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Далее интегрируем по частям:

$$\begin{aligned} I_{d,p} &= \frac{\Phi'(y_d)}{(p-1)\sigma d^{1/2}} \\ &- \int\limits_{y_d}^{+\infty} \frac{e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}}{(1-p)\sigma d^{1/2}}\left(\Phi''(v) + \frac{Q_1''(v)}{d^{1/2}}\right)\mathrm{d}v + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty. \end{aligned}$$

Последним интегральным членом, обозначим его $\tilde{I}_{d,p}$, можно пренебречь

$$\begin{aligned} |\tilde{I}_{d,p}| &\leqslant \frac{1}{(p-1)\sigma d^{1/2}} \sup_{u > y_d}\left|\Phi''(u) + \frac{Q_1''(u)}{d^{1/2}}\right| \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}v \\ &\leqslant \frac{1}{((p-1)\sigma d^{1/2})^2} \sup_{u > y_d}\left|\Phi''(u) + \frac{Q_1''(u)}{d^{1/2}}\right| = o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty. \end{aligned}$$

В итоге получаем

$$I_{d,p} = \frac{\Phi'(y_d)}{(p-1)\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) \sim \frac{\Phi'(q)}{(p-1)\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty. \tag{18}$$

Случай $p < 1$ рассматривается совершенно аналогично. □

Следствие 3.3. *В условиях утверждения* 3.1 *имеем*

$$\mathcal{N}_d(x_d) \sim \frac{\Lambda^d}{x_d} \cdot \frac{\Phi'(q)}{\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty.$$

Следствие 3.4. *В условиях утверждения* 3.1 *имеем при* $p > 1$

$$\sum_{\substack{m \in \tilde{\mathbb{N}}_d: \\ \lambda_{d,m} < x_d}} \left(\frac{\lambda_k}{x_d}\right)^p \sim \frac{\mathcal{N}_d(x_d)}{(p-1)}, \quad d \to \infty.$$

Утверждение 3.2. *Пусть* U *имеет решетчатое распределение, принимает значения из множества* $\{(E+a) + b\nu : \nu \in \mathbb{Z}\}$ *с максимальным шагом* b *и* $\mathbf{E}\, U^3 < \infty$. *Если для некоторой последовательности* $(x_d)_{d \in \mathbb{N}}$ *верно*

$$\lim_{d \to \infty} \frac{-\ln x_d - Ed}{\sigma d^{1/2}} = q \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad \frac{-\ln x_d - Ed}{\sigma d^{1/2}} \in \left\{\frac{ad + b\nu}{\sigma d^{1/2}} : \nu \in \mathbb{Z}\right\},$$

то для любого $p \neq 1$ *выполнено*

$$\frac{1}{\Lambda^d x_d^{p-1}} \sum_{\substack{m \in \tilde{\mathbb{N}}_d: \\ \lambda_{d,m} < x_d}} \lambda_{d,m}^p \sim \frac{\Phi'(q) G_p(b)}{(p-1)\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty, \quad p > 1,$$

$$\frac{1}{\Lambda^d x_d^{p-1}} \sum_{\substack{m \in \tilde{\mathbb{N}}_d: \\ \lambda_{d,m} \geqslant x_d}} \lambda_{d,m}^p \sim \frac{\Phi'(q) G_p(b)}{(1-p)\sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty, \quad p < 1,$$

где $G_p(b) := \dfrac{(p-1)b}{e^{(p-1)b} - 1}$.

Доказательство. Пусть $p > 1$, тогда в соответствии с леммой 3.1 верно соотношение

$$J_{d,p} := \frac{1}{\Lambda^d x_d^{p-1}} \sum_{m \in \tilde{\mathbb{N}}_d:\, \lambda_{d,m} < x_d} \lambda_{d,m}^p$$

$$= \frac{1}{x_d^{p-1}} \mathbf{E} \left(e^{(1-p)\sum_{l=1}^d U_l} \mathbb{1}\Big(\sum_{l=1}^d U_l > -\ln x_d\Big)\right),$$

где $(U_l)_{l\in\mathbb{N}}$ – независимые копии величины U. С учетом обозначений (15), будем иметь

$$J_{d,p} = \mathbf{E}\left(e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(V_d-y_d)}\mathbb{1}(V_d > y_d)\right) = \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}F_d(v),$$

где $y_d := \dfrac{-\ln x_d - Ed}{\sigma d^{1/2}}$.

В силу условий на величину U, функция F_d может быть представлена асимптотическим разложением [2, теорема 3 главы IV]

$$F_d(x) = \Phi(x) + \frac{Q_1(x)}{d^{1/2}} + \frac{S_d(x)\,\Phi'(x)}{d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty, \tag{19}$$

равномерно относительно $x\in\mathbb{R}$. Здесь $Q_1(x)$ определяется формулой (17), а дискретная компонента S_d – следующими формулами:

$$S_d(x) := \frac{b}{\sigma}\,S\left(\frac{x\sigma d^{1/2} - ad}{b}\right), \quad S(x) := [x] - x + \frac{1}{2}. \tag{20}$$

Применяя разложение (19) для F_d, получим

$$J_{d,p} = \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}\left(\Phi(v) + \frac{Q_1(v)}{d^{1/2}}\right)$$
$$+ \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}\left(\frac{S_d(v)}{d^{1/2}}\,\Phi'(v)\right) + o(d^{-1/2}).$$

Несложно убедиться (см. доказательство утверждения 3.1), что первый интеграл с точностью до $o(d^{-1/2})$ имеет разложение (18) при $d\to\infty$

$$\widetilde{J}_{d,p} := \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}\left(\Phi(v) + \frac{Q_1(v)}{d^{1/2}}\right)$$
$$= I_{d,p} + o(d^{-1/2}) \sim \frac{\Phi'(q)}{(p-1)\sigma d^{1/2}}\,.$$

Второй интеграл вычисляется следующим образом

$$\bar{J}_{d,p} := \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}\left(\frac{S_d(v)}{d^{1/2}}\,\Phi'(v)\right) = \bar{J}^{(1)}_{d,p} + \bar{J}^{(2)}_{d,p} + \bar{J}^{(3)}_{d,p},$$

где

$$\bar{J}^{(1)}_{d,p} := \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)} \left(\frac{S'_d(v)}{d^{1/2}}\, \Phi'(v) \right) \mathrm{d}v,$$

$$\bar{J}^{(2)}_{d,p} := \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)} \left(\frac{S_d(v)}{d^{1/2}}\, \Phi''(v) \right) \mathrm{d}v,$$

$$\bar{J}^{(3)}_{d,p} := \sum_{\tau\in T_d\colon \tau>y_d} \big(S_d(\tau)-S_d(\tau-0)\big)\, \frac{\Phi'(\tau)}{d^{1/2}}\, \exp\big\{(1-p)\sigma d^{1/2}\,(\tau-y_d)\big\}.$$

Здесь множество T_d определяется формулой

$$T_d := \left\{ \frac{ad+b\nu}{\sigma d^{1/2}} : \nu\in\mathbb{Z} \right\}.$$

Несложно понять, что T_d содержит все точки роста F_d.

Рассмотрим интеграл $\bar{J}^{(1)}_{d,p}$. Из формул (20) имеем $S'_d(v) = -d^{1/2}$, $v\in\mathbb{R}\setminus T_d$. Тогда

$$\begin{aligned}\bar{J}^{(1)}_{d,p} &= -\int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\, \Phi'(v)\,\mathrm{d}v \\ &= -\frac{\Phi'(y_d)}{(p-1)\sigma d^{1/2}} + \int\limits_{y_d}^{+\infty} \frac{e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}}{(1-p)\sigma d^{1/2}}\, \Phi''(v)\,\mathrm{d}v,\end{aligned}$$

где правая часть была получена интегрированием по частям. В ней вторым слагаемым можно пренебречь

$$\begin{aligned}&\left| \int\limits_{y_d}^{+\infty} \frac{e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}}{(1-p)\sigma d^{1/2}}\, \Phi''(v)\,\mathrm{d}v \right| \\ &\qquad \leqslant \frac{\sup_{u>y_d}|\Phi''(u)|}{(p-1)\sigma d^{1/2}} \int\limits_{y_d}^{-\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}v \\ &\qquad = \frac{\sup_{u>y_d}|\Phi''(u)|}{((p-1)\sigma d^{1/2})^2} = o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{J}^{(1)}_{d,p} = -\frac{\Phi'(y_d)}{(p-1)\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}) = -\frac{\Phi'(q)}{(p-1)\sigma d^{1/2}} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Далее убедимся, что $\bar{J}^{(2)}_{d,\varepsilon} = o(d^{-1/2})$. Действительно,

$$\begin{aligned} \left|\bar{J}^{(2)}_{d,p}\right| &\leqslant \frac{1}{d^{1/2}} \sup_{u>y_d} |S_d(u)\,\Phi''(u)| \int\limits_{y_d}^{+\infty} e^{(1-p)\sigma d^{1/2}(v-y_d)}\,\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{(p-1)\sigma d} \sup_{u>y_d} |S_d(u)\,\Phi''(u)| = o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty. \end{aligned}$$

Рассмотрим ряд $\bar{J}^{(3)}_{d,p}$. Из формул (20) найдем

$$S_d(\tau) - S_d(\tau - 0) = b/\sigma, \quad \tau \in T_d.$$

Затем имеем

$$\bar{J}^{(3)}_{d,p} = \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\tau \in T_d:\, \tau > y_d} \Phi'(\tau)\, \exp\bigl\{(1-p)\sigma d^{1/2}(\tau - y_d)\bigr\}.$$

По условию $y_d \in T_d$, то есть $y_d = \dfrac{ad + b\nu_d}{\sigma d^{1/2}}$ при некотором $\nu_d \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{aligned} \bar{J}^{(3)}_{d,\varepsilon} &= \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{\nu=\nu_d+1}^{+\infty} \Phi'\left(y_d + \frac{b(\nu-\nu_d)}{\sigma d^{1/2}}\right) \exp\{-(p-1)b(\nu-\nu_d)\} \\ &= \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \sum_{j=1}^{+\infty} \Phi'\left(y_d + \frac{bj}{\sigma d^{1/2}}\right) \exp\{-(p-1)bj\}, \end{aligned}$$

где полученный ряд сходится равномерно по d. Совершая почленный переход при $d \to \infty$, будем иметь

$$\begin{aligned} \lim_{d\to\infty} \sum_{j=1}^{+\infty} \Phi'\left(y_d + \frac{bj}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-(p-1)bj} &= \sum_{j=1}^{\infty} \lim_{d\to\infty} \Phi'\left(y_d + \frac{bj}{\sigma d^{1/2}}\right) e^{-(p-1)bj} \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \Phi'(q)\, e^{-(p-1)bj} = \frac{\Phi'(q)}{e^{(p-1)b} - 1}\,. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\bar{J}^{(3)}_{d,p} = \frac{b}{\sigma d^{1/2}} \cdot \frac{\Phi'(q)}{e^{(p-1)b} - 1} + o(d^{-1/2}), \quad d \to \infty.$$

Имеем разложение для $\bar{J}_{d,p}$

$$\begin{aligned}\bar{J}_{d,p} &= \bar{J}^{(1)}_{d,p} + \bar{J}^{(2)}_{d,p} + \bar{J}^{(3)}_{d,p} \\ &= -\frac{\Phi'(q)}{(p-1)\sigma d^{1/2}} + \frac{b}{\sigma d^{1/2}}\,\frac{\Phi'(q)}{e^{(p-1)b}-1} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.\end{aligned}$$

В итоге интеграл $J_{d,p}$ представляется разложением

$$J_{d,p} = \widetilde{J}_{d,p} + \bar{J}_{d,p} + o(d^{-1/2}) = \frac{b}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{\Phi'(q)}{e^{(p-1)b}-1} + o(d^{-1/2}), \quad d\to\infty.$$

Вычисления для случая $p<1$ производятся аналогичным образом. □

Следствие 3.5. *В условиях утверждения* 3.2 *имеем*

$$\mathcal{N}_d(x_d) \sim \frac{\Lambda^d}{x_d}\cdot\frac{\Phi'(q)}{\sigma d^{1/2}}\cdot\frac{b}{1-e^{-b}}, \quad d\to\infty.$$

Следствие 3.6. *В условиях утверждения* 3.2 *имеем при* $p>1$

$$\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<x_d}} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{x_d}\right)^p \sim \mathcal{N}_d(x_d)\cdot\frac{1-e^{-b}}{e^{(p-1)b}-1}, \quad d\to\infty.$$

§4. Доказательство теоремы 2.5

Нахождение точных асимптотик сложности аппроксимации в среднем $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ требует различных подходов к случаям, когда U имеет решетчатое либо нерешетчатое распределение (см. [10]). Доказательство эквивалентности $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta_{d,\varepsilon})$ и $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ будем осуществлять попутно для обоих случаев, а именно приводить общие соотношения и формулы верные для каждого из них, при этом используя оборот “во всяком случае”. Также будем *совместно* давать ссылки на используемые утверждения и теоремы, отвечающие разным случаям.

Фиксируем произвольный порог $\varepsilon\in(0,1)$. Пусть для каждого $d\in\mathbb{N}$ задан некоторый ранг $n_{d,\varepsilon}\in\widetilde{\mathbb{N}}_d$, впоследствии выбираемый с учетом уровня ошибки ε и спектральных характеристик поля X_d. Соотносить $n_{d,\varepsilon}$ и $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta_d)$ при некоторых $\delta_{d,\varepsilon}\in(0,1)$ можно путем оценивания

следующей вероятности ошибки аппроксимации ранга $n_{d,\varepsilon}$

$$\begin{aligned}\mathsf{P}_{d,\varepsilon} :&= \mathbf{P}\left(\|X_d - X_d^{(n_{d,\varepsilon})}\|_{2,d}^2 > \varepsilon^2 \mathbf{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2\right)\\ &= \mathbf{P}\Big(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \lambda_{d,m}\xi_{d,m}^2 > \varepsilon^2\Lambda^d\Big).\end{aligned}$$

Запишем $\mathsf{P}_{d,\varepsilon}$ следующим образом

$$\mathsf{P}_{d,\varepsilon} = \mathbf{P}\left(\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\,\eta_{d,m} > (\varepsilon^2 - \varepsilon_d^2)\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\right),$$

где $\eta_{d,m} := \xi_{d,m}^2 - 1$, $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $\mathbf{E}\,\eta_{d,m} = 0$ и $\mathbf{D}\,\eta_{d,m} = 2$; величина

$$\varepsilon_d^2 := \frac{\mathbf{E}\,\|X_d - X_d^{(n_{d,\varepsilon})}\|_{2,d}^2}{\mathbf{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2} = \frac{1}{\Lambda^d}\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \lambda_{d,m}$$

суть относительная ошибка аппроксимации в среднем ранга $n_{d,\varepsilon}$.

Для $\eta_{d,m}$, $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$, определено преобразование Лапласа с параметром $\gamma < 1/2$

$$\mathbf{E}\,e^{\gamma\eta_{d,m}} = \mathbf{E}\,e^{\gamma(\xi_{d,m}^2-1)} = \frac{e^{-\gamma}}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-(1-2\gamma)x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{e^{-\gamma}}{(1-2\gamma)^{1/2}}\,,$$

и кумулянта $L_\eta(\gamma) := \ln\mathbf{E}\,e^{\gamma\eta_{d,m}} = -\gamma - \ln(1-2\gamma)/2$. При $|\gamma| < 1/2$ для $L_\eta(\gamma)$ справедливо следующее разложение в ряд

$$L_\eta(\gamma) = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{(2\gamma)^k}{k}\,. \tag{21}$$

Оценим $\mathsf{P}_{d,\varepsilon}$ с помощью экспоненциального неравенства Чебышева. Введем функцию

$$H_{d,\varepsilon}(\gamma) := \gamma(\varepsilon^2 - \varepsilon_d^2)\cdot\frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}} - \ln\mathbf{E}\,\exp\Big\{\gamma\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}}\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\,\eta_{d,m}\Big\}. \tag{22}$$

При $n_{d,\varepsilon} \geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, по определению $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, имеем $\varepsilon^2 - \varepsilon_d^2 \geqslant 0$. Тогда верна оценка

$$\mathsf{P}_{d,\varepsilon} \leqslant \exp\{-\sup_{\gamma>0} H_{d,\varepsilon}(\gamma)\}. \tag{23}$$

Если же $n_{d,\varepsilon} < n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$, т.е. $\varepsilon^2 - \varepsilon_d^2 < 0$, то справедлив и левосторонний аналог (23)

$$1 - \mathsf{P}_{d,\varepsilon} \leqslant \exp\{-\sup_{\gamma<0} H_{d,\varepsilon}(\gamma)\}. \tag{24}$$

Приступим к анализу функции $H_{d,\varepsilon}$. Предварительно обозначим

$$c_{d,k} := \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\right)^k, \quad k \geqslant 2. \tag{25}$$

Запишем (22) в следующем виде:

$$H_{d,\varepsilon}(\gamma) = c_{d,2}\bigl(\gamma\rho_{d,\varepsilon} - L_{d,\varepsilon}(\gamma)\bigr), \tag{26}$$

где

$$\rho_{d,\varepsilon} := \frac{(\varepsilon^2 - \varepsilon_d^2)}{c_{d,2}} \cdot \frac{\Lambda^d}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}},$$

$$L_{d,\varepsilon}(\gamma) := \frac{1}{c_{d,2}} \ln \mathbf{E}\, \exp\biggl\{\gamma \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\, \eta_{d,m}\biggr\}.$$

Исследуем поведение $\rho_{d,\varepsilon}$ и $L_{d,\varepsilon}(\gamma)$ при больших d, когда ранг $n_{d,\varepsilon}$ принимает только значения $\lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^h \rfloor$ либо $\lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{-h} \rceil$, где $h \in (0,1)$. Из теорем 2.3 и 2.4 следует, что в каждом случае, решетчатом или нет, имеем

$$\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \asymp e^{-Ed - q_\varepsilon \sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty. \tag{27}$$

Это позволяет применять утверждения 3.1 и 3.2 при $x_d \asymp \lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}$.

Пусть U имеет нерешетчатое распределение. Тогда из формулы (10) и следствия 3.3 заключаем, что при больших d выполнятся неравенства

$$\mathcal{N}_d\bigl(\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} e^1\bigr) < n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) e^{-h} \quad \text{и} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon) e^h < \mathcal{N}_d\bigl(\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} e^{-1}\bigr).$$

По определению (14) считающей функции $\mathcal{N}_d$ при больших d будем иметь

$$\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{-1} < \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}} \leqslant \lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}, \qquad \text{при} \qquad n_{d,\varepsilon} = \lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{h} \rfloor,$$
$$\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \leqslant \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}} < \lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{1}, \qquad \text{при} \qquad n_{d,\varepsilon} = \lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{-h} \rceil.$$

Если U имеет решетчатое распределение с максимальным шагом $b > 0$, то из формулы (12) и следствия 3.5 при больших d получим неравенства

$$\mathcal{N}_d\big(\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{b+1}\big) < n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{-h} \quad \text{и} \quad n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)e^{h} < \mathcal{N}_d\big(\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{-b-1}\big).$$

Тогда по определению (14) считающей функции $\mathcal{N}_d$ при больших d имеем

$$\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{-b-1} < \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}} \leqslant \lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}, \qquad \text{при} \qquad n_{d,\varepsilon} = \lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{h} \rfloor,$$
$$\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \leqslant \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}} < \lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{b+1}, \qquad \text{при} \qquad n_{d,\varepsilon} = \lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{-h} \rceil.$$

В любом случае найдутся такие константы ω_1 и ω_2, что для любого сколь угодно малого h при больших d выполнится

$$\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{\omega_1} < \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}} < \lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}e^{\omega_2}. \tag{28}$$

Как следствие, используя (27), будем иметь

$$\lim_{d\to\infty} \frac{-\ln \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}} - Ed}{\sigma d^{1/2}} = q_\varepsilon, \tag{29}$$

где q_ε выбирается из равенства $\Phi(q_\varepsilon) = 1 - \varepsilon^2$.

Обратимся к величине $\rho_{d,\varepsilon}$. Рассмотрим множитель $c_{d,2}$

$$c_{d,2} = \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\right)^2 = \big(\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}) - n_{d,\varepsilon}\big) + \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\right)^2.$$

Здесь возникновение разности в скобках обусловлено различием условий суммирования $m > n_{d,\varepsilon}$ и $\lambda_{d,m} < \lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}$ по $m \in \widetilde{\mathbb{N}}_d$, которое проявляется, когда кратность собственного числа $\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}$ больше единицы и $\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}) - n_{d,\varepsilon} > 0$.

Получим оценки для отношения $c_{d,2}/\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}})$. С очевидностью имеем

$$0 \leqslant \frac{\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}) - n_{d,\varepsilon}}{\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}})} < 1.$$

С учетом (29) и следствий 3.4 и 3.6 для любого h во всяком случае имеем

$$\frac{1}{\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}})} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ \lambda_{d,m}<\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}} \left(\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\right)^2 \to C_0, \quad d\to\infty,$$

где $C_0 = e^{-b}$, если U имеет решетчатое распределение с максимальным шагом b и $C_0 = 1$ – если нерешетчатое. Тогда во всяком случае существуют положительные константы C_1 и C_2, что для любого h при достаточно больших d имеем

$$C_1 < \frac{c_{d,2}}{\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}})} < C_2. \tag{30}$$

В то же время из (29) и следствий 3.3 и 3.5 вытекает

$$\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}) \cdot \frac{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}{\Lambda^d} \sim \frac{C_3}{d^{1/2}}, \quad d\to\infty,$$

где C_3 принимает значения $\Phi'(q_\varepsilon)/\sigma$ либо $b\Phi'(q_\varepsilon)/(\sigma(1-e^{-b}))$, когда величина U имеет соответственно нерешетчатое или решетчатое распределение. Следовательно, во всяком случае существуют положительные числа C_4 и C_5, что для любого h при больших d

$$C_4(\varepsilon^2-\varepsilon_d^2)\cdot d^{1/2} < \rho_{d,\varepsilon} < C_5(\varepsilon^2-\varepsilon_d^2)\cdot d^{1/2}.$$

Разность $\varepsilon^2-\varepsilon_d^2$ представим в виде

$$\varepsilon^2-\varepsilon_d^2 = \left(\varepsilon^2 - \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}\right) + \Delta_{d,\varepsilon}(h),$$

где

$$\Delta_{d,\varepsilon}(h) := \begin{cases} \displaystyle\sum_{n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)<m\leqslant n_{d,\varepsilon}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}, & \text{если } n_{d,\varepsilon} = \lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^h\rfloor; \\ \displaystyle -\sum_{n_{d,\varepsilon}<m\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d}, & \text{если } n_{d,\varepsilon} = \lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{-h}\rceil. \end{cases}$$

По определению величины $n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$0 \leqslant \varepsilon^2 - \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}} \frac{\lambda_{d,m}}{\Lambda^d} < \frac{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}{\Lambda^d}\,.$$

Тогда, применяя (27) совместно с замечанием 2.1, получим

$$d^{1/2}\cdot\frac{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}{\Lambda^d} \asymp \frac{d^{1/2}}{(\Lambda e^E)^d e^{q_\varepsilon\sigma d^{1/2}}} = o(1), \quad d\to\infty.$$

Для величины $\Delta_{d,\varepsilon}(h)$ имеем оценки

$$\begin{aligned}
|\Delta_{d,\varepsilon}(h)| &\geqslant |n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-n_{d,\varepsilon}|\cdot\frac{\min\{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)},\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}\}}{\Lambda^d}\\
&\geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\cdot\frac{(e^h-1)}{e^h}\cdot\frac{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}{\Lambda^d}\,e^{\omega_1}\\
&\geqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\,(e^h-1)\cdot\frac{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}{\Lambda^d}\,e^{\omega_1-1};\\
|\Delta_{d,\varepsilon}(h)| &\leqslant |n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)-n_{d,\varepsilon}|\cdot\frac{\max\{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)},\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}\}}{\Lambda^d}\\
&\leqslant n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\,(e^h-1)\cdot\frac{\lambda_{d,n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)}}{\Lambda^d}\,e^{\omega_2},
\end{aligned}$$

где числа ω_1 и ω_2 взяты из соотношения (28). Формулами (10) и (12) во всяком случае устанавливается существование положительных констант C_6 и C_7, что при любом малом h для достаточно больших d

$$0 < C_6(e^h-1) \leqslant |\Delta_{d,\varepsilon}(h)|\,d^{1/2} \leqslant C_7(e^h-1).$$

Таким образом, существуют положительные константы C_8 и C_9, что неравенство

$$0 < C_8(e^h-1) \leqslant |\rho_{d,\varepsilon}| \leqslant C_9(e^h-1) \tag{31}$$

достигается для любого h при больших d.

Рассмотрим функцию $L_{d,\varepsilon}$. Из независимости случайных величин $(\eta_{d,m})_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}$ и их ограниченности снизу вытекает $\eta_{d,m}\geqslant -1$, а также из сходимости при каждом d ряда $\sum\limits_{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d}\lambda_{d,m}$ следует

$$L_{d,\varepsilon}(\gamma) = \frac{1}{c_{d,2}}\sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} L_\eta\biggl(\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\,\gamma\biggr).$$

Далее воспользуемся разложением (21)

$$L_{d,\varepsilon}(\gamma) = \frac{1}{c_{d,2}} \sum_{\substack{m\in\widetilde{\mathbb{N}}_d:\\ m>n_{d,\varepsilon}}} \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty} \frac{(2\gamma)^k}{k}\left(\frac{\lambda_{d,m}}{\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}}\right)^k = \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(\frac{c_{d,k}}{c_{d,2}}\right)\frac{(2\gamma)^k}{k},$$

где последний ряд сходится для каждого $|\gamma| < 1/2$ равномерно по d, так как числа $c_{d,k} > 0$ по определению (25) составляют невозрастающую последовательность по $k \geqslant 2$. В частности, $c_{d,2} \geqslant c_{d,k}$ при $k \geqslant 2$. Следовательно, имеет место оценка

$$|L_{d,\varepsilon}(\gamma)| \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{|2\gamma|^k}{k} = L_\eta(|\gamma|), \quad |\gamma| < 1/2.$$

Далее вернемся непосредственно к $H_{d,\varepsilon}(\gamma)$.

$$H_{d,\varepsilon}(\gamma) = c_{d,2}\big(\gamma\rho_{d,\varepsilon} - L_{d,\varepsilon}(\gamma)\big) \geqslant c_{d,2}\big(\gamma\rho_{d,\varepsilon} - L_\eta(|\gamma|)\big).$$

В интересующем случае $\gamma\rho_{d,\varepsilon} > 0$ (см. (23), (24) и (26)) при достаточно малых h и больших d, используя стандартную оптимизацию и формулу (31), будем иметь

$$\sup\{\big(\gamma\rho_{d,\varepsilon} - L_\eta(|\gamma|)\big) : \gamma\rho_{d,\varepsilon} > 0\} > C_{10}(e^h - 1)^2 > 0,$$

где C_{10} – некоторая положительная константа. Тогда с учетом (30) получим

$$\sup\{H_{d,\varepsilon}(\gamma) : \gamma\rho_{d,\varepsilon} > 0\} > c_{d,2}C_{10}(e^h - 1)^2 > C_1\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}})\cdot C_{10}(e^h - 1)^2.$$

Здесь для величины $\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}})$ в силу следствий 3.3 и 3.5 справедливо

$$\mathcal{N}_d(\lambda_{d,n_{d,\varepsilon}}) \asymp d^{-1/2}(\Lambda e^E)^d\, e^{q_\varepsilon \sigma d^{1/2}}, \quad d \to \infty.$$

В итоге при достаточно больших d имеем

$$\begin{aligned}\sup\{H_{d,\varepsilon}(\gamma) : \gamma\rho_{d,\varepsilon} > 0\} &> d^{-1/2}(\Lambda e^E)^d\, e^{q_\varepsilon\sigma d^{1/2}}\cdot C_{11}(e^h - 1)^2\\ &> -\ln\left(\min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1 - \delta_{d,\varepsilon}\}\right),\end{aligned}$$

где C_{11} – некоторая положительная константа.

Следовательно, если $n_{d,\varepsilon} = \lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^h\rfloor$, то получаем

$$\mathsf{P}_{d,\varepsilon} \leqslant \exp\{-\sup_{\gamma>0} H_{d,\varepsilon}(\gamma)\} < \min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1 - \delta_{d,\varepsilon}\} \leqslant \delta_{d,\varepsilon}.$$

Тогда при таких d по определению величины $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon})$ имеем

$$n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon, \delta_{d,\varepsilon}) \leqslant \lfloor n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^h\rfloor.$$

Если же $n_{d,\varepsilon} = \lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{-h} \rceil$, то справедливо

$$1 - \mathsf{P}_{d,\varepsilon} \leqslant \exp\{-\sup_{\gamma<0} H_d(\gamma)\} < \min\{\delta_{d,\varepsilon}, 1-\delta_{d,\varepsilon}\} \leqslant 1-\delta_{d,\varepsilon},$$

т.е. $\mathsf{P}_{d,\varepsilon} \geqslant \delta_{d,\varepsilon}$, а значит по определению $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta_d)$ верно $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta_d) \geqslant \lceil n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)\, e^{-h} \rceil$.

В итоге доказана искомая эквивалентность $n_d^{\mathrm{pr}}(\varepsilon,\delta_d) \sim n_d^{\mathrm{avg}}(\varepsilon)$ при $d \to \infty$.

Литература

1. R. Adler, J. Taylor, *Random Fields and Geometry.* Springer, New York, 2007.
2. C.-G. Esseen, *Fourier analysis of distribution functions. A mathematical study of the Laplace–Gaussian law.* — Acta Math. **77** (1945), 1–125.
3. M. A. Lifshits, E. V. Tulyakova, *Curse of dimentionality in approximation of random fields.* — Probab. Math. Stat. **26** (2006), No. 1, 97–112.
4. E. Novak, I. H. Sloan, J. F. Traub, H. Wózniakowski, *Essays on the Complexity of Continuous Problems. European Mathematical Society Publishing House.* Zürich, 2009.
5. E. Novak, H. Wózniakowski, *Tractability of Multivariate Problems.* Volume I: *Linear Information.* EMS Tracts Math. 6. European Mathematical Society Publishing House. Zürich, 2008.
6. E. Novak, H. Wózniakowski, *Tractability of Multivariate Problems.* Volume II: *Standard Information for Functionals.* EMS Tracts Math. 12. European Mathematical Society Publishing House. Zürich, 2010.
7. E. Novak, H. Wózniakowski, *Tractability of Multivariate Problems.* Volume III: *Standard Information for Operators.* EMS Tracts Math. 18. European Mathematical Society Publishing House. Zürich, 2012.
8. K. Ritter, *Average-case Analysis of Numerical Problems.* — Lect. Notes Math. No. **1733**, Springer, Berlin, 2000.
9. В. В. Петров, *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* Наука, М., 1987.
10. А. А. Хартов, *Аппроксимация в среднем тензорных случайных полей возрастающей размерности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 233–256.

Khartov A. A. Approximation in probability of tensor product-type random fields of increasing parametric dimension.

Consider a sequence of Gaussian tensor product-type random fields X_d, $d \in \mathbb{N}$, given by

$$X_d(t) = \sum_{k \in \widetilde{\mathbb{N}}^d} \prod_{l=1}^{d} \lambda_{k_l}^{1/2}\, \xi_k \prod_{l=1}^{d} \psi_{k_l}(t_l), \quad t \in [0,1]^d,$$

where $(\lambda_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ and $(\psi_i)_{i\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ are all positive eigenvalues and eigenfunctions of covariance operator of process X_1, $(\xi_k)_{k\in\widetilde{\mathbb{N}}}$ are standard Gaussian random variables, and $\widetilde{\mathbb{N}}$ is a subset of natural numbers. We investigate the exact asymptotic behavior of probabilistic complexity of approximation for X_d by partial sums $X_d^{(n)}$:

$$n_d^{pr}(\varepsilon,\delta) := \min\Big\{n\in\mathbb{N} : \mathbf{P}\left(\|X_d - X_d^{(n)}\|_{2,d}^2 > \varepsilon^2\,\mathbf{E}\,\|X_d\|_{2,d}^2\right) \leqslant \delta\Big\},$$

when the parametric dimension $d\to\infty$, the error threshold $\varepsilon\in(0,1)$ is fixed, and the confidence level $\delta=\delta_{d,\varepsilon}$ may go to zero.

С.-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
14 линия В. О. 29а,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: AlexeyKhartov@gmail.com

Поступило 10 февраля 2013 г.