Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

Л. В. Розовский

ВЕРОЯТНОСТИ МАЛЫХ УКЛОНЕНИЙ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН С МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИМСЯ В НУЛЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ

§1. Введение и результаты

Рассмотрим независимые копии $\{X_i\}_{i\geqslant 1}$ положительной случайной величины X. Обозначим $S_n = X_1 + \ldots + X_n,\ n \geqslant 1$.

Настоящая работа является продолжением исследований из [1] и [2], в которых, в частности, было доказано, что если функция распределения $V(x) = \mathbf{P}(X < x)$ убывает в нуле "степенным" образом, то в обозначениях

$$L(h) = \mathbf{E}e^{-hX}, \quad m(h) = -\big(\log L(h)\big)', \quad \sigma^2(h) = \big(\log L(h)\big)'', \quad h \geqslant 0, \tag{1.1}$$

вероятность малых уклонений суммы S_n при $n \to \infty$ имеет классическую асимптотику

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim \frac{1}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\, L^n(h)\, e^{h\,x}, \quad n \to \infty, \tag{1.2}$$

равномерно по $0 < x \leqslant \mu\, n$, где постоянная $\mu < \mathbf{E}X \leqslant \infty$, функция $h = h(x/n)$ является единственным решением уравнения

$$m(h) = \frac{x}{n}. \tag{1.3}$$

Нами будет исследован случай, ранее не рассмотренный в литературе, когда $V(x)$ является функцией, медленно меняющейся в нуле. Из полученных результатов вытекает, в частности, что в этой ситуации асимптотика типа (1.2) сохраняет справедливость лишь для не "слишком маленьких" $x = x(n)$.

Ключевые слова: малые уклонения, суммы независимых положительных случайных величин, медленно меняющиеся функции.

Работа поддержана грантом НШ-1216.2012.1 и грантом РФФИ 10-01-00242-а.

Введем ключевое для настоящей работы условие

$$\frac{1}{y}\int\limits_0^y u\,dV(u) \sim l(y), \quad y \to +0, \tag{1.4}$$

где функция $l(y)$ медленно меняется в нуле (и, без потери общности, может считаться положительной и непрерывной при $0 < y \leqslant y_0$).

Заметим, что из (1.4) следует $l(+0) = 0$ и

$$V(y) \sim \widetilde{l}(y) = \int\limits_0^y l(u)/u\,du, \quad y \to +0, \tag{1.5}$$

причем функция $\widetilde{l}(y)$ медленно меняется в нуле.

Условия (1.4) и (1.5), очевидно, выполняются, если распределение V абсолютно непрерывно в некоторой положительной полуокрестности нуля с плотностью $p(x)$ такой, что $p(y) \sim l(y)/y,\ y \to +0$.

Приведем результаты.

Теорема 1. *Пусть выполнено условие* (1.4). *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim \frac{\sqrt{hx/n}}{h\sigma(h)}\,L^n(h)\,(hx)^{hx}/\Gamma(1+hx), \quad n \to \infty, \tag{1.6}$$

равномерно по $0 < x \leqslant \mu n$, *где функция* $h = h(x/n)$ *является единственным решением уравнения* (1.3), *а постоянная* $\mu < \mathbf{E}X$.

В частности, если $x > 0$ *удовлетворяет условию* $\lim x/n = 0$, *то*

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim L^n(h)\,(hx)^{hx}/\Gamma(1+hx),\ n \to \infty. \tag{1.6$'$}$$

Замечание 1. Если случайная величина X является нерешетчатой, то асимптотика (1.2) (или (1.6)) имеет место равномерно по $\varepsilon\, n \leqslant x \leqslant \mu\, n$ при любом $\varepsilon > 0$. Условие (1.4) при этом не требуется.

В конце параграфа будет приведен пример использования формулы (1.6$'$).

В следующем результате вероятности малых уклонений суммы S_n исследуются более детально.

Пусть (см. (1.4) и (1.5))

$$\kappa(y) = l(y)/\widetilde{l}(y) = y\left(\ln\widetilde{l}(y)\right)', \quad 0 < y \leqslant y_0, \tag{1.7}$$

и $\kappa(y) = \kappa(y_0)$ на (y_0, ∞).

Отметим, что функция $\kappa(y)$ медленно меняется в нуле и $\kappa(y) \to 0$ при $y \to +0$.

Обозначим $\tau = n\,\kappa(1/h)$.

Теорема 2. *Пусть выполнено условие* (1.4). *Тогда при* $n \to \infty$
1)

$$\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x)$$
$$= L^n(h)\, e^{h\,x}\, \frac{1 - e^{-h\,y}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}} \left(e^{-\beta^2/2} + O\left(\tau^{-1/2} + (\tau^{1/\varepsilon}\, h\, y)^{-1}\right)\right) \tag{1.8}$$

равномерно по $x > 0$, $y > 0$ *и* $h > \varepsilon$ *при любом* $\varepsilon > 0$, *где* $\beta = (x - n\,m(h))/(\sigma(h)\sqrt{n})$;
2)

$$\mathbf{P}(x - y \leqslant S_n < x) = L^n(h)\, \left(h^\tau\, \frac{x^\tau - (x-y)^\tau}{\Gamma(1+\tau)} + o\,(1)\right) \tag{1.9}$$

равномерно по $\{h:\ h > n,\ \varepsilon_n < \tau < 1/\varepsilon_n\}$, $\{x : 0 < hx = O\,(1+\tau)\}$ *и* $\{y : 0 < y \leqslant x\}$, *где* $\varepsilon_n > 0$ – *некоторая стремящаяся к нулю последовательность*;
3)

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim L^n(h) \tag{1.10}$$

равномерно по $h \to \infty$ *и* $\{x : 0 < xh \to 0,\ \tau/(hx) = O\,(1)\}$.

Теорема 1 является прямым следствием теоремы 2 при h, удовлетворяющем уравнению (1.3), с учетом леммы 1 настоящей работы и формулы Стирлинга $\Gamma(1+\lambda) = \sqrt{2\pi\lambda}\,(\lambda/e)^\lambda\, e^{\theta/\lambda}$, $0 < \theta < 1/12$, применяемой, когда $\lambda = hx \to \infty$.

Замечание 2. Пусть

$$\liminf_{y \to +0}\ \min_{y \leqslant u \leqslant 1} \kappa(u)/\kappa(y) > 0 \tag{1.11}$$

(например, функция $\kappa(y)$ не убывает на $(0,1)$).

Тогда, если последовательность h_n стремится к бесконечности так, что $n\,\kappa(1/h_n) \to \infty$, то в теореме 2(1) можно считать, что $\varepsilon < h < h_n$, а если h_n стремится к бесконечности так, что $n\,\kappa(1/h_n) \to 0$, то в теореме 2(3) условие $h \to \infty$ можно заменить на $h > h_n$.

Рассмотрим пример.

Пример. Пусть $a > 0$, $\delta > 0$, $a_1, a_2, \dots$ – некоторые постоянные. Предположим, что при любом целом $k \geqslant 1$

$$V(e^{-t}) = a\, t^{-\delta} \Big(1 + \sum_{j=1}^{k} a_j\, t^{-j} + O(t^{-k-1})\Big), \quad t \to +\infty. \tag{1.12}$$

Тогда в соотношении (1.6')

$$h = \frac{\delta}{\varepsilon\xi} \Big(1 + \sum_{j=1}^{k} \pi_j(s)\, \xi^{-j} + O(s/\xi)^{k+1}\Big), \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} \log L(h) = \log a - \delta s - \frac{\delta}{\xi} \Big(1 + \sum_{j=1}^{k-1} \pi_j(s)\, \xi^{-j}\Big) \\ +\delta \sum_{j=1}^{k-1} \xi^{-j} \Big(\sum_{m=0}^{j} \pi_j^{(m)}(s)/j^{m+1}\Big) + O(s/\xi)^{k+1}, \end{aligned} \tag{1.14}$$

где $k \geqslant 1$, $\varepsilon = x/n$, $\xi = -\log\varepsilon$, $s = \log\xi$, $\pi_j(\cdot)$ - многочлены степени j с явно определенными коэффициентами, зависящими от δ и $a_1, \dots, a_j$ (так, $\pi_1(s) = \delta^{-1}\, a_1 - C - \log\delta + s$, где C - постоянная Эйлера).

В частности, если $x > 0$ при $n \to \infty$ изменяется таким образом, что $\xi = \log(n/x) \to \infty$ и $\delta\, n/\xi \to \rho$, где постоянная $\rho \in [0, \infty)$, то

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim A\, a^n\, e^{-\delta n(1-1/\xi)\, \log\xi}, \quad n \to \infty,$$

где $A = e^{\rho(\log\rho + \delta^{-1}\, a_1 - C - \log\delta)}/\Gamma(1+\rho)$; если же

$$n/\xi \to \infty \ \text{ и } \ n(\log\xi/\xi)^2 \to 0,$$

то

$$\mathbf{P}(S_n < x) \sim a^n \sqrt{\frac{\xi}{2\pi\delta n}}\, e^{-\delta n(\log\xi - (\delta^{-1}\, a_1 - C - \log\delta + \log\xi)/\xi)}, \quad n \to \infty.$$

§2. Доказательство теоремы 2(1)

Введем вспомогательную случайную величину $X(h)$, $h \geqslant 0$, с распределением $e^{-hr}\, V(dr)/L(h)$. Отметим (см. (1.1)), что $m(h) = \mathbf{E}X(h)$, $\sigma^2(h) = \mathbf{Var}X(h)$.

Лемма 1. *Пусть выполнено условие* (1.4). *Тогда (см.* (1.5) *и* (1.7)*) при* $h \to \infty$

$$V(1/h) \sim L(h) \sim \widetilde{l}(1/h), \tag{2.1}$$

$$(-1)^k\, L^{(k)}(h) \sim (k-1)!\; l(1/h)/h^k, \quad k = 1, 2, \dots, \tag{2.2}$$

$$h\,m(h) \sim h^2\,\sigma^2(h) \sim \kappa(1/h), \quad h\mathbf{E}X^3(h)/\sigma^2(h) = O\,(1). \tag{2.3}$$

Доказательство леммы 1. Для $y > 0$ положим

$$\mu(y) = \int\limits_0^y u\,dV(u), \quad \hat{\mu}(y) = \mu(y)/y, \quad \widetilde{\mu}(y) = \int\limits_0^y \hat{\mu}(u)\,du/u.$$

При $h \to \infty$ имеем

$$(-1)^k\,L^{(k)}(h) = \int\limits_0^\infty e^{-hy} y^{k-1}\,d\mu(y) = -\int\limits_0^\infty \mu(y)\,dy^{k-1}\,e^{-hy}$$

$$= -\int\limits_0^\infty \hat{\mu}(y)\,\{(k-1)y^{k-1} - hy^k\}\,e^{-hy}\,dy$$

$$\sim l(1/h)\,h^{-k} \int\limits_0^\infty e^{-t}\{t^k - (k-1)t^{k-1}\}\,dt,$$

откуда следует (2.2); далее, по (1.5)

$$L(h) = h\int\limits_0^\infty e^{-hu}\,V(u)\,du = \int\limits_0^\infty e^{-y}\,V(y/h)\,dy \sim V(1/h)$$

и, следовательно, (2.1) справедливо.

Теперь проверим (2.3). Имеем по (2.1) и (2.2) при $h \to \infty$,

$$h^2\,\sigma^2(h) = \frac{hL'(h)}{L(h)}\Big(\frac{hL''(h)}{L'(h)} - \frac{hL'(h)}{L(h)}\Big) \sim -\frac{hL'(h)}{L(h)} \sim \kappa(1/h);$$

аналогично,

$$h\mathbf{E}X^3(h)/\sigma^2(h) = \big|hL'''(h)/(L(h)\,\sigma^2(h))\big| \to 2.$$

Лемма 1 доказана. □

Лемма 2. *Положим* $f_h(t) = \mathbf{E}e^{it\,X(h)}$. *Если выполнено условие* (1.4), *то*

$$1 - |f_h(v)| \geqslant \delta\,e^{-2\pi h/v}\,l(1/v)/L(h), \quad v > v_0, \quad h > 0, \tag{2.4}$$

где v_0 *достаточно велико, а положительное* δ *не зависит от* v *и* h.

Доказательство леммы 2. Положим $Y = X(h)$. Имеем,

$$1 - |f_h(v)| \geqslant I = \int\limits_0^{a+(2-\tau)\pi} 2\sin^2\left(\tfrac{y-a}{2}\right) dF_Y(y/v),$$

где $a = a(v) \in [0, 2\pi)$, $\tau \in (0,1)$, $F_Y(y)$ – функция распределения Y.

При $s_1 = [a - (2-\tau)\pi, a - \tau\pi]$ и $s_2 = [a + \tau\pi, a + (2-\tau)\pi]$ функция

$$2\sin^2\left(\tfrac{y-a}{2}\right) \geqslant c_0 = 2\sin^2(\tau\pi/2).$$

Пусть $\tau = 1/2$. Тогда $c_0 = 1$, $s_1 = [a - 3\pi/2, a - \pi/2]$ и $s_2 = [a + \pi/2, a + 3\pi/2]$. Отсюда,

$$I \geqslant \int\limits_{s_2} dF_Y(y/v) + \int\limits_{s_1} dF_Y(y/v) = I_1 + I_2. \tag{2.5}$$

Очевидно,

$$I_1 \geqslant \int\limits_{\pi}^{3\pi/2} dF_Y(y/v),\ a \in [0, \pi/2]; \quad I_1 \geqslant \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi} dF_Y(y/v),\ a \in [\pi/2, \pi];$$

$$I_2 \geqslant \int\limits_{\pi/2}^{\pi} dF_Y(y/v),\ a \in [3\pi/2, 2\pi]; \quad I_2 \geqslant \int\limits_{0}^{\pi/2} dF_Y(y/v),\ a \in [\pi, 3\pi/2].$$

Далее, если $b > a$, то

$$\int\limits_a^b dF_Y(y/v) = \frac{1}{L(h)} \int\limits_{a/v}^{b/v} e^{-hu}\, dV(u) \geqslant \frac{1}{L(h)}\, e^{-bh/v} \int\limits_{a/v}^{b/v} dV(u). \tag{2.6}$$

Поскольку $\int\limits_\alpha^\beta dV(u) = \int\limits_\alpha^\beta d\mu(u)/u \geqslant (\mu(\beta) - \mu(\alpha))/\beta$, $\alpha < \beta$, то при любых фиксированных $0 < a < b < \infty$

$$\int\limits_{a/v}^{b/v} dV(u) \geqslant \frac{v}{b}\, \mu(1/v)\, \frac{\mu(b/v) - \mu(a/v)}{\mu(1/v)} \sim \frac{v}{b}\, \mu(1/v)\, (b-a)$$

$$\sim \frac{b-a}{b}\, l(1/v),\ v \to \infty. \tag{2.7}$$

Соотношение (2.4) следует из (2.5), (2.6) и (2.7) с учетом оценок снизу для I_1 и I_2. Лемма 2 доказана. $\square$

Доказательство теоремы 2(1). Так же, как в [2], обозначим через $X_j(h)$, $j \geqslant 1$, независимые копии случайной величины $X(h)$ и положим (см. (1.1))

$$S_n(h) = X_1(h) + \cdots X_n(h), \quad g_h(t) = \mathbf{E}\exp\Big(it\,\frac{S_n(h) - n\,m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}\Big),$$

$$\tau = h\sigma(h)\sqrt{n},\ \beta = \frac{x - n\,m(h)}{\sigma(h)\sqrt{n}}, \quad \delta_\gamma(h) = \int\limits_0^{1/\gamma} |g_h(t) - e^{-t^2/2}|\,dt\ (\gamma > 0). \tag{2.8}$$

В [3, лемма 2] доказано, что при любых положительных x, h, y и γ

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(x - y < S_n \leqslant x) &= L^n(h)\,e^{h\,x}\,\frac{1 - e^{-h\,y}}{h\sigma(h)\sqrt{2\pi n}}\\ &\times\Big(e^{-\beta^2/2} + \theta\,(|\beta|\,e^{-\beta^2/2}/\tau + 1/\tau^2 + \rho_\gamma(h,y))\Big),\end{aligned} \tag{2.9}$$

где $|\theta|$ ограничено некоторой абсолютной постоянной,

$$\rho_\gamma(h,y) = \delta_\gamma(h) + (1 + \delta_\gamma(h))(1 + \tfrac{1}{h\,y})\,\tau\gamma. \tag{2.10}$$

Имеем (см. [4, гл. 5, лемма 1])

$$|g_h(t) - e^{-t^2/2}| \leqslant 16\nu\,e^{-t^2/3},\ |t| \leqslant 1/\nu, \tag{2.11}$$

где (см. (2.3))

$$\nu = \frac{4}{\sigma^3(h)\sqrt{n}}\mathbf{E}|X(h) - \mathbf{E}X(h)|^3 \leqslant \frac{1}{c_1\tau} \tag{2.12}$$

(здесь и далее, c_i, $i = 1, 2, \ldots$ некоторые положительные постоянные).

Считая, что τ достаточно велико (в противоположном случае (1.6) выполняется в силу оценки $\mathbf{P}(S_n < x) \leqslant L^n(h)\,e^{h\,x}$), положим $\gamma = \tau^{-k-1}\,(k \geqslant 1)$. Из (2.8), (2.11) и (2.12) следует

$$\delta_\gamma(h) \leqslant c_2/\tau + I(h), \quad I(h) = \tau\int\limits_{c_1}^{\tau^k} |f_h(th)|^n dt. \tag{2.13}$$

Пусть сначала $h > h_0$, где h_0 достаточно велико (критический случай). Оценивая $|f_h(th)|$ по (2.4), (2.3) и используя то, что функция $l(\cdot)$

медленно меняется в нуле, при любом фиксированном k найдем (см. (1.7))

$$|f_h(t\,h)| \leqslant e^{-c_3\,\kappa(1/h)/\tau}, \quad t \in (c_1, \tau^k), \tag{2.14}$$

и, следовательно,

$$I(h) \leqslant c_4\,/\tau. \tag{2.15}$$

Пусть теперь $h \in [\varepsilon, h_0]$. Тогда $c_5 \leqslant h^2\,\sigma^2(h) \leqslant c_6$ (и $L(h) \leqslant 1$), откуда при $t \geqslant t_0$ по аналогии с (2.14)

$$|f_h(t\,h)| \leqslant e^{-c_7/\sqrt{n}}, \quad t \in (c_1, \tau^k),$$

и (2.15) вновь имеет место.

Наконец, если $c_1 \leqslant t \leqslant t_0$ и $\varepsilon \leqslant h \leqslant h_0$, то $|f_h(t\,h)| \leqslant e^{-c_9}$ поскольку случайная величина X в силу (1.4) является нерешетчатой, а отображение между распределениями X и $X(h)$ непрерывно по h, и (2.15) снова справедливо.

Равенство (1.8) следует из (2.9), (2.10), (2.13) и (2.15), а для проверки замечания 1 можно воспользоваться последним пунктом доказательства теоремы 2(1). Замечание 2 в части теоремы 2(1) справедливо, поскольку из (1.11) при некотором $\delta > 0$ следует $\min\limits_{1 \leqslant h \leqslant h_n} \kappa(1/h) \geqslant \delta\,\kappa(1/h_n)$. □

§3. Доказательства теоремы 2(2,3)

Имеем (см. [5, теорема 2 и (1.8)] при $x > 0$, $h > 0$, $K > 1$ и $u = K\,h$

$$L^n(h)\,e^{h\,x} \geqslant \mathbf{P}(S_n < x) \geqslant L^n(u)(1 - n\,m(u)/x). \tag{3.1}$$

Далее, по лемме 1 при $h \to \infty$

$$\log L(u) - \log L(h) = -\int\limits_h^u m(t)dt \sim -\kappa(1/h)\,\log K,\ m(u) \sim m(h)/K. \tag{3.2}$$

Используя оценки (3.2) в (3.1) и устремляя K к бесконечности, придем к (1.10).

Замечание 2 к теореме 2(3) справедливо в силу того, что (1.11) равносильно условию $\limsup\limits_{y \to +0} \max\limits_{0 < u \leqslant y} \kappa(u)/\kappa(y) < \infty$, откуда следует, что $n \max\limits_{h_n \leqslant h < \infty} \kappa(1/h) \to 0$.

Проверим теперь соотношение (1.9). Имеем (см., например, [3, (2.1)]),

$$\mathbf{P}(x-y \leqslant S_n < x) = L^n(h) \int_{h\,(x-y)}^{h\,x} e^u \, dF_h(u), \tag{3.3}$$

где $F_h(\cdot)$ – функция распределения $h\,S_n(h)$ (см. (2.8)).

Пусть $G_\tau(\cdot)$ обозначает гамма-распределение с параметром $\tau = n\,\kappa(1/h)$, а соответствующая характеристическая функция $\hat{G}_\tau(t) = (1-it)^{-\tau}$.

Тогда

$$\int_{h\,(x-y)}^{h\,x} e^t \, dF_h(t) = \int_{h\,(x-y)}^{h\,x} e^u \, dG_\tau(u) + \int_{h\,(x-y)}^{h\,x} e^u \, d\Delta_h(u) = I + J, \tag{3.4}$$

где $\Delta_h(u) = F_h(u) - G_\tau(u)$.

Очевидно,

$$I = \int_{h\,(x-y)}^{h\,x} e^u \, e^{-u} u^{\tau-1}/\Gamma(\tau) \, du = h^\tau \, \frac{x^\tau - (x-y)^\tau}{\Gamma(1+\tau)}. \tag{3.5}$$

Для того, чтобы доказать теорему 2(2), достаточно показать, что найдется последовательность $0 < \varepsilon_n \to 0$, такая что

$$J = o\,(1), \quad n \to \infty, \tag{3.6}$$

равномерно по

$$h > n, \quad 0 < hx = O\,(1+\tau) \;\text{ и }\; \varepsilon_n < \tau < 1/\varepsilon_n. \tag{3.7}$$

Займемся этим. Обозначив $\sup\limits_u |\Delta_h(u)|$ через Δ_h, найдем

$$|J| \leqslant 2\, e^{h\,x}\, \Delta_h. \tag{3.8}$$

Оценим Δ_h. С этой целью применим теоремы 1 и 2 из [4, гл. V]. Несложные расчеты показывают, что при любом $T > 1$

$$\Delta_h \leqslant C\,(T^{-\nu} + T\,\delta_T), \tag{3.9}$$

где $\nu = \min(1,\tau)$, $\delta_T = \sup\limits_{0<t\leqslant T} |q_h^n(t) - \hat{G}_\tau(t)|/t$, а $q_h(t) = \mathbf{E}e^{it\,h X(h)}$.

Пусть $0 < t \leqslant T$. Имеем (см.(1.1) и (2.3)),

$$|n(q_h(t)-1)| \leqslant n\,t\,h\,m(h) \sim t\,\tau, \quad h \to \infty.$$

Отсюда, если

$$T\,\tau/\sqrt{n} = o\,(1), \tag{3.10}$$

то

$$q_h^n(t) = e^{n(q_h(t)-1)} + O\,(t^2\,\tau^2/n), \quad 0 < t \leqslant T,\ n \to \infty. \tag{3.11}$$

Оценим $q_h(t) - 1$ более аккуратно. Положим $u(y) = e^{-y}(e^{it\,y} - 1)/y$. Используя обозначения из леммы 1, получим

$$L(h)(q_h(t) - 1) = \int_0^\infty u(y)\,h\,d\mu(y/h) = -\int_0^\infty \hat{\mu}(y/h)\,y\,u'(y)\,dy. \tag{3.12}$$

Стандартные рассуждения, использующие свойства медленно меняющихся функций, показывают, что при условии (1.4)

$$\int_0^\infty \hat{\mu}(y/h)\,y\,u'(y)\,dy = l(1/h)\Big(\int_0^\infty y\,u'(y)\,dy + \theta\,t\,\varepsilon(h)\Big), \quad h \to \infty,$$

где $t > 0$, функция $\varepsilon(h) \to 0$, а $|\theta|$ равномерно по t и $h > 1$ ограничен постоянной.

Отсюда, из (3.12) и леммы 1 следует, что аналогичная оценка (с другими θ и $\varepsilon(h)$) справедлива для $n(q_h(t) - 1)$:

$$n(q_h(t) - 1) = \tau\Big(\int_0^\infty y\,u'(y)\,dy + \theta\,t\,\varepsilon(h)\Big), \quad h \to \infty, \tag{3.13}$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_0^\infty y\,u'(y)\,dy = -\int_0^\infty u(y)\,dy = \ln\,(1 - it),$$

из (3.13) в предположении

$$\tau\varepsilon(h) = o\,(1), \quad n \to \infty, \tag{3.14}$$

получим равномерно по $t \in (0, T]$ при подходящем выборе T, который сделаем позже,

$$e^{n(q_h(t)-1)} - \hat{G}_\tau(t) = t\,\hat{G}_\tau(t)\,O\,(\tau\varepsilon(h)), \quad n \to \infty.$$

Таким образом (см. также (3.9) и (3.11))

$$\delta_T \leqslant C\,(\tau\varepsilon(h) + T\,\tau^2/n), \tag{3.15}$$

где постоянная C при всех достаточно больших n равномерно ограничена по T.

Пусть (см.(3.7)) $T = (\tau\varepsilon(h))^{-1/(1+\nu)}$. Без потери общности предполагая, что $n\,\varepsilon^2(h) > 1$ (условие (3.10) в этом случае выполняется), из (3.7), (3.8) и (3.9) получим при всех достаточно больших n(и h) с некоторой постоянной c

$$|J| \leqslant c\,e^{c\tau}(\varepsilon(h))^{\nu/(1+\nu)},$$

откуда при соответствующем выборе ε_n следует (3.6).

Теорема 2(2) доказана. □

§4. Проверка утверждения примера

Пусть выполнено условие (1.12). Покажем (см. (1.1)), что в этом случае при $h \to \infty$

$$\begin{aligned} L(h) &= a\,\tau^{-\delta}\Big(1 + \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu \tau^{-\nu} + O\,(\tau^{-k-1})\Big), \\ h\,L'(h) &= -a\,\tau^{-\delta-1}\Big(\delta + \sum_{\nu=1}^{k} (\delta+\nu)\,b_\nu\,\tau^{-\nu} + O\,(\tau^{-k-1})\Big) \end{aligned} \tag{4.1}$$

при любом $k \geqslant 1$, где $\tau = \log h$, а для постоянных коэффициентов b_ν имеются явные формулы. В частности, $b_1 = a_1 - \delta C$, $b_2 = a_2 - a_1(1+\delta)C + \delta(1+\delta)(C^2 + \pi^2/6)/2$, где C - постоянная Эйлера.

Обозначим $y_0 = \tau^{-k-1}/h$, $y_1 = (k+1)\log\tau/h$, $y_2 = (\delta+k+1)\log\tau/h$.

Имеем,

$$L(h) = \Big(\int_0^{y_0} + \int_{y_0}^{y_1} + \int_{y_1}^{\infty}\Big) V(y) e^{-hy}\,dhy = I_1 + I_2 + I_3. \tag{4.2}$$

При этом,

$$\begin{aligned} &I_1 \leqslant V(y_0) h y_0 \sim a\tau^{-\delta-k-1}, \\ &I_3 \leqslant \tau^{-\delta-k-1} + \int_{y_1}^{y_2} V(y) e^{-hy}\,dhy \sim (1+a)\tau^{-\delta-k-1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Оценим I_2. Положим $g(t) = a\,t^{-\delta}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} a_j\,t^{-j}\right)$. Тогда

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{y_0}^{y_1} g(-\log y) e^{-hy}\,dhy + O\,(1) \int_{y_0}^{y_1} (-\log y)^{-\delta-k-1} e^{-hy}\,dhy \\ &= I_4 + O\,(\tau^{-\delta-k-1}), \end{aligned} \tag{4.4}$$

где

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \int\limits_{t_0}^{t_1} g(\tau+t)e^{-t}e^{-e^{-t}}\,dt, \\
t_0 &= -\log\log\tau - \log(k+1), \quad t_1 = (k+1)\log\tau.
\end{aligned}
\tag{4.5}
$$

Далее,

$$
g(\tau+t) = \sum_{l=0}^{k} g^{(l)}(\tau)\,t^l/l! + g^{(k+1)}(\tau+\theta t)\,t^{k+1}/(k+1)!,\ 0<\theta<1,
$$

где

$$
g^{(l)}(u) = au^{-\delta-l}\sum_{\nu=0}^{k} a_{\nu l}u^{-\nu},\ a_{0l} = (-1)^l\Gamma(l+\delta)/\Gamma(\delta),
$$

$$
a_{\nu l} = a_\nu\,(-1)^l\,l!/\Gamma(\delta)\sum_{m=0}^{l}\Gamma(l+\delta-m)\,C^m_{\nu+m-1}/(l-m)!, \quad \nu\geqslant 1.
$$

Поэтому

$$
\begin{aligned}
I_4 &= \sum_{l=0}^{k} g^{(l)}(\tau)/l!\int\limits_{t_0}^{t_1} t^l\,e^{-t}e^{-e^{-t}}\,dt + O\left(\tau^{-\delta-k-1}\right) \\
&= \sum_{l=0}^{k} c_l\,g^{(l)}(\tau) + O\left(\tau^{-\delta-k-1}\right),
\end{aligned}
$$

где $c_l = (-1)^l\Gamma^{(l)}(1)/l!$ ($c_0=1$, $c_1=C$, $c_2=C^2/2+\pi^2/12$).

Отсюда и из (4.2)–(4.5) следует первое равенство в (4.1) с коэффициентами

$$
b_\nu = \sum_{l=0}^{\nu} c_l\,a_{\nu-l,l}.
$$

Второе утверждение с учетом равенства $h\,L'(h) = \int\limits_0^\infty V(y)\,d(hye^{-hy})$ проверяется аналогично.

Из (4.1) (см. также [4, гл.VI, лемма 1] и (1.1)) следует, что

$$
h\,m(h) = \delta\,\tau^{-1}\Big(\sum_{\nu=0}^{k}\beta_\nu\,\tau^{-\nu} + O\left(\tau^{-k-1}\right)\Big), \tag{4.6}
$$

причем $\beta_0 = 1$,

$$\beta_\nu = \frac{\nu}{\delta} \sum (-1)^{r-1}(r-1)! \prod_{l=1}^{\nu} \frac{(b_l)^{m_l}}{m_l!}, \ \nu \geqslant 1, \tag{4.7}$$

где суммирование производится по всем целым неотрицательным решениям $(m_1, \ldots, m_\nu)$ уравнения $1 \cdot m_1 + \cdots + \nu \cdot m_\nu = \nu$, а $r = m_1 + \cdots + m_\nu$.

В частности, $\beta_1 = b_1/\delta$, $\beta_2 = (2b_2 - b_1^2)/\delta$, $\beta_3 = (3b_3 - 3b_1 b_2 + b_1^3)/\delta$.

Рассмотрим уравнение

$$m(h) = \varepsilon \tag{4.8}$$

и покажем, что функция $h = h(\varepsilon)$ из (1.13) при подходящих многочленах $\pi_j(\cdot)$ является его приближенным решением с нужной степенью точности.

Предварительно отметим, что в обозначениях из (1.13)

$$\begin{aligned} \tau = \log h &= \log\delta + \xi - s + \xi \sum_{\nu=2}^{k+1} Q_\nu(s)\, \xi^{-\nu} + O(s/\xi)^{k+1} \\ &= \xi \Big(1 + \sum_{\nu=1}^{k+1} Q_\nu(s)\, \xi^{-\nu}\Big) + O(s/\xi)^{k+1}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

где (см. обозначения в (4.7))

$$Q_1(t) = \log\delta - t, \ Q_{\nu+1}(t) = \sum (-1)^{r-1}(r-1)! \prod_{l=1}^{\nu} \pi_l^{m_l}(t)/m_l!, \ \nu \geqslant 1. \tag{4.10}$$

Например,

$$\begin{aligned} Q_2(s) = \pi_1(s),\, Q_3(s) &= \pi_2(s) - \pi_1^2(s)/2,\, Q_4(s) \\ &= \pi_3(s) - \pi_1(s)\pi_2(s) + \pi_1^3(s)/3. \end{aligned}$$

Также

$$\begin{aligned} \tau^{-l} &= \xi^{-l} \Big(1 + \sum_{\nu=1}^{k+1} Q_\nu(s)\, \xi^{-\nu} + O(s^{k+1}/\xi^{k+2})\Big)^{-l} \\ &= \xi^{-l} \Big(\sum_{\nu=0}^{k} c_{l\nu}(s)\, \xi^{-\nu} + O(s/\xi)^{k+1}\Big), \end{aligned} \tag{4.11}$$

где целое $l \geqslant 1$, $c_{l0}(s) = 1$ и (см. (4.7)) коэффициенты

$$c_{l\nu}(t) = \frac{1}{(l-1)!} \sum (-1)^r (l+r-1)! \prod_{l=1}^{\nu} Q_l^{m_l}(t)/m_l!, \ \nu \geqslant 1, \tag{4.12}$$

являются многочленами от t степени ν (и зависят от функций $\pi_j(t)$ при $1 \leqslant j < \nu$).

Подставляя (4.6), (4.11) и (1.13) в (4.8), найдем представление для функций $\pi_\nu(\cdot)$, при которых (4.8) удовлетворяется, в виде рекуррентного соотношения

$$\pi_m(t) = \sum_{l=0}^{m} \beta_l \, c_{l+1,m-l}(t), \tag{4.13}$$

позволяющего, принимая во внимание (4.7), (4.10) и (4.12), последовательно эти функции вычислять.

Таким образом, решение $h(\varepsilon)$ уравнения (4.8) имеет вид

$$h(\varepsilon) = \frac{\delta}{\varepsilon\xi} \Big(1 + \sum_{j=1}^{k} \pi_j(s)\, \xi^{-j} + O(s/\xi)^{k+1}\Big), \quad \varepsilon \to +0, \tag{4.14}$$

где произвольное целое $k \geqslant 1$, $\xi = -\log\varepsilon$, $s = \log\xi$.

Соотношение (1.13) вытекает из (4.14) при $\varepsilon = x/n \to +0$.

Для проверки (1.14) воспользуемся оценкой (4.14) и справедливым при условии (1.12) равенством

$$\log L(h(\varepsilon)) = -\delta \, \log\log(1/\varepsilon) + \log a - \varepsilon\, h(\varepsilon) + \int_0^{\varepsilon} \Big(h(\varepsilon) - \frac{\delta}{\varepsilon|\log\varepsilon|}\Big)\, d\varepsilon, \ \varepsilon > 0. \tag{4.15}$$

Литература

1. T. Höglund, *A unified formulation of the central limit theorem for small and large deviations from the mean.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb., **49** (1979), 105–117.
2. Л. В. Розовский, *Вероятности малых уклонений для одного класса распределений со степенным убыванием в нуле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **328** (2005), 182–190.
3. Л. В. Розовский, *О вероятностях малых уклонений положительных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **320** (2004), 150–159.
4. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин*, Наука, М., 1972.

5. L. V. Rozovsky, *Remarks on a link between Laplace transform and distribution function of a nonnegative random variable*, Statistics and Probability Letters, **79** (2009), 1501–1508.

Rozovsky L. V. Small deviation probabilities for sums of independent positive random variables with distributions which are slowly varying at zero.

In the note we study small deviation probabilities for sums of independent identically distributed positive random variables whose distribution function is slowly varying at zero.

Химико-фармацевтическая Академия,
ул. проф. Попова 14,
197376, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: L_Rozovsky@mail.ru

Поступило 19 ноября 2012 г.