Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

С. С. Расова, Б. П. Харламов

НЕУБЫВАЮЩИЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ ПОЛУМАРКОВСКИЙ ПРОЦЕСС: АСИМПТОТИКА И АСИММЕТРИЯ

Одномерным непрерывным полумарковским (НПМ) процессом называется процесс, обладающий марковским свойством относительно момента первого выхода из любого интервала из области его значений. Наиболее просто устроен монотонный процесс из этого класса процессов, который также называют обращеным процессом с независимыми положительными приращениями. Пусть $X(t)$ $(t \geqslant 0)$ – неубывающий НПМ процесс и (τ_x) $(x \geqslant 0)$ – семейство моментов первого достижения для такого процесса. Из полумарковского свойства процесса следует, что (τ_x) является процессом с независимыми приращениями (как функция от x), где

$$\tau_x(\xi) = \inf\{t \geqslant 0 : \xi(t) \geqslant x\},$$

ξ – выборочная траектория процесса. При этом для любых $0 \leqslant x \leqslant y < z$

$$\mathbf{P}_x(\tau_z - \tau_y > 0) = 1,$$

где $(\mathbf{P}_x)$ – согласованное семейство мер процесса $X(t)$.

Неубывающий НПМ процесс к теории надёжности по-видимому впервые применили И. Б. Герцбах и Х. Б. Кордонский [5]. В зарубежной литературе идея такого применения была высказана в работе J. D. Esary, A. W. Marshall, F. Proschan [4]. Систематическое изучение класса неубывающих непрерывных случайных процессов предпринял E. Çinlar [3], который выделил в нём подкласс неубывающих НПМ процессов. Наш интерес к этому подклассу [6] также связан с моделированием процессов износа в теории надёжности [7, 8].

Ключевые слова: монотонный процесс, непрерывный полумарковский процесс, процесс Леви, гамма-процесс, процесс максимумов, винеровский процесс, надёжность, износ.

Помимо хороших свойств траекторий (непрерывность, монотонность) класс неубывающих НПМ процессов замечательно приспособлен для решения задач вычисления характеристик распределения времени достижения фиксированного уровня износа. В связи с этим достаточно просто решаются задачи о вычислении оптимального уровня износа при замене отработавшего оборудования или его профилактическом обслуживании. Значительно сложнее в классе этих процессов решаются задачи о вычислении распределения уровня износа в фиксированный момент времени. Для этого вычисления целесообразно использовать приближённые формулы.

В настоящей работе мы исследуем достаточно широкий класс неубывающих НПМ процессов, для которых порождающие их процессы с независимыми приращениями имеют меру Леви вида e^{-u}/u^{α}, где $\alpha \in [1,2)$. В частности, такими процессами являются обращённый гамма-процесс ($\alpha = 1$) и процесс максимумов винеровского процесса ($\alpha = 3/2$) [1, 2]. Для процессов исследуемого класса сравнительно просто доказывается асимптотическая нормальность одномерного распределения при $t \to \infty$. Показано также, что асимптотическая асимметрия одномерного распределения положительна при $\alpha < 3/2$, отрицательна при $\alpha > 3/2$ и равна 0 при $\alpha = 3/2$.

Рассмотрим типичную задачу гарантийного страхования. Пусть $T > 0$ – гарантированный срок, в течении которого принимаются претензии покупателя на качество тормозных дисков, основная работа которых связана с износом. Диски называются изношенными и подлежат замене, если величина износа больше u. Естественный вопрос покупателя, какова величина износа в момент T, например, чему равно условное математическое ожидание величины износа дисков при условии, что в момент T они ещё не изношены. Имеем

$$\mathbf{E}_0(X(T) \mid X(T) \leqslant u) = \frac{\mathbf{E}_0(X(T)\,;\, X(T) \leqslant u)}{\mathbf{P}_0(X(T) \leqslant u)}.$$

Знаменатель этой дроби равен $\mathbf{P}_0(\tau_u \geqslant T)$, т. е. выражается в терминах исходного процесса с независимыми приращениями. Однако вычисление числителя требует знания одномерного распределения процесса $X(t)$. Обычно используется в таких случаях нормальное приближение

$$\mathbf{E}_0(X(T)\,;\, X(T) \leqslant u) \cong \int_{-\infty}^{u} \frac{x}{\sqrt{2\pi\sigma^2 T}} e^{-(x-aT)^2/(2\sigma^2 T)}\, dx,$$

которое требует знания математического ожидания aT и дисперсии $\sigma^2 T$ нормального закона. Отсюда следует прикладная направленность нашей статьи, где используются стандартные, но довольно громоздкие методы комплексного анализа.

1. Общие формулы

Класс изучаемых нами процессов (τ_x) с независимыми положительными приращениями имеет преобразование Лапласа одномерного распределения вида

$$\mathbf{E}_0 e^{-\lambda\tau_x} = e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\,ds},$$

где

$$L(\lambda, s) = a(s)\lambda + \int\limits_{0+}^{\infty} (1 - e^{-\lambda u})\,\nu(du, s),$$

$a(s) \geqslant 0$, а плотность меры Леви ν стремится к бесконечности при приближении аргумента u к нулю. Этим обеспечивается положительность всех приращений процесса τ_x, и как следствие – непрерывность процесса $X(t)$. Этот процесс не является марковским, что затрудняет вычисление характеристик одномерных распределений.

Очевидной является следующая формула

$$\mathbf{P}_0(X(t) \geqslant x) = \mathbf{P}_0(\tau_x \leqslant t).$$

Рассмотрим преобразование Лапласа по t от частей этого равенства.

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{P}_0(X(t) \geqslant x)\,dt = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\,dF_{\tau_x}(t) \equiv \frac{1}{\lambda}\,e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\,ds},$$

или

$$\frac{1}{\lambda} - \int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}\mathbf{P}_0(X(t) < x)\,dt = \frac{1}{\lambda}\,e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\,ds},$$

где $dF_{\tau_x}(t) = \mathbf{P}_0(\tau_x \in dt)$. Найдём теперь преобразование Лапласа по x от частей этого равенства. Слева имеем

$$\frac{1}{\lambda p} - \int\limits_0^\infty e^{-px} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{P}_0(X(t) < x)\, dt\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda p} - \frac{1}{p} \int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \int\limits_0^\infty e^{-px}\, dF_{X(t)}(x)\, dt$$

где $dF_{X(t)}(x) = \mathbf{P}_0(X(t) \in dx)$. Справа имеем

$$\frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\infty e^{-px} e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\, ds}\, dx$$

$$= \frac{1}{\lambda} \left(-\frac{1}{p} e^{-px} e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\, ds} \Bigg|_0^\infty + \frac{1}{p} \int\limits_0^\infty e^{-px} (-L(\lambda,x)) e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\, ds}\, dx \right)$$

$$= \frac{1}{\lambda p} - \frac{1}{\lambda p} \int\limits_0^\infty e^{-px} L(\lambda,x) e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\, ds}\, dx,$$

откуда получаем формулу

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_0 e^{-pX(t)}\, dt = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\infty e^{-px} L(\lambda,x) e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\, ds}\, dx.$$

Из этой формулы мы получаем формулы для преобразования Лапласа моментов любого порядка $m \geqslant 1$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_0 X^m(t)\, dt = \frac{1}{\lambda} \int\limits_0^\infty x^m L(\lambda,x) e^{-\int\limits_0^x L(\lambda,s)\, ds}\, dx.$$

В частности, для однородных по пространству процессов $X(t)$ имеем

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_0 e^{-pX(t)}\, dt = \frac{L(\lambda)}{\lambda(p + L(\lambda))}, \tag{1}$$

$$\int\limits_0^\infty e^{-\lambda t} \mathbf{E}_0 X^m(t)\, dt = \frac{m!}{\lambda (L(\lambda))^m}. \tag{2}$$

2. Моменты и их асимптотика для класса процессов с плотностью меры Леви $\gamma e^{-\delta u}/u^{\alpha}$ при $\alpha \in [1,2)$

Для таких процессов имеем

$$L(\lambda) = \begin{cases} \frac{\gamma\Gamma(2-\alpha)}{\alpha-1}\left((\lambda+\delta)^{\alpha-1} - \delta^{\alpha-1}\right), & 1 < \alpha < 2, \\ \gamma \ln(1+\lambda/\delta), & \alpha = 1. \end{cases}$$

2.1. Первый момент при $1 < \alpha < 2$.

$$\mathbf{E}_0 X(t) = \frac{1}{\gamma\Gamma(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}}\left(\delta t - \frac{\alpha-2}{2}\right)$$

$$-\frac{\alpha-1}{\pi\gamma\Gamma(2-\alpha)}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(x+\delta)t}}{x+\delta}\frac{x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)dx}{x^{2(\alpha-1)} + \delta^{2(\alpha-1)} - 2\delta^{\alpha-1}x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)}. \quad (3)$$

Асимптотика при $t \to \infty$

$$\mathbf{E}_0 X(t) \sim \frac{1}{\gamma\Gamma(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}}\left(\delta t - \frac{\alpha-2}{2}\right).$$

Первый момент при $\alpha = 1$.

$$\mathbf{E}_0 X(t) = \frac{1}{\gamma}\left(t\delta + 1/2 - \int\limits_0^\infty \frac{e^{-t\delta(x+1)}\,dx}{(x+1)(\ln^2 x + \pi^2)}\right). \quad (4)$$

Асимптотика при $t \to \infty$

$$\mathbf{E}_0 X(t) \sim \frac{1}{\gamma}(t\delta + 1/2),$$

2.2. Второй момент при $1 < \alpha < 2$.

$$\mathbf{E}_0 X^2(t)$$
$$= \frac{1}{\gamma^2\Gamma^2(2-\alpha)\delta^{2\alpha-2}}\left(\delta^2 t^2 - 2(\alpha-2)\delta t + \frac{5\alpha^2 - 16\alpha + 12}{6}\right) - A(t), \quad (5)$$

где

$$A(t) = -\frac{2(\alpha-1)^2}{\gamma^2\Gamma^2(2-\alpha)\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(x+\delta)t}\frac{\left(2\sin\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)x^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}-\sin\left(\frac{2\pi}{\alpha-1}\right)x^{2\alpha-2}\right)}{(x+\delta)B(x)}\,dx,$$

$$B(x) = x^{4\alpha-4}-4x^{3\alpha-3}\delta^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)+2x^{2\alpha-2}\delta^{2\alpha-2}\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha-1}\right)+4x^{2\alpha-2}\delta^{2\alpha-2}$$

$$-4x^{\alpha-1}\delta^{3\alpha-3}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)+\delta^{4\alpha-4}.$$

При $t\to\infty$ получаем асимптотическую формулу для дисперсии

$$\mathbf{D}_0X(t)\sim\frac{2-\alpha}{\gamma^2\Gamma^2(2-\alpha)\delta^{2\alpha-2}}\left(\delta t-\frac{7\alpha-6}{12}\right).$$

Второй момент при $\alpha=1$**.**

$$\mathbf{E}_0X^2(t)=\frac{1}{\gamma^2}\left(t^2\delta^2+2t\delta+\frac{1}{6}-4\int\limits_0^\infty\frac{e^{-t\delta(x+1)}\ln x\,dx}{(x+1)\left(\ln^2x+\pi^2\right)^2}\right). \tag{6}$$

Формулы (4) и (6) позволяют получить формулу для кривой дисперсии процесса $X(t)$, асимптота которой имеет вид

$$\mathbf{D}_0X(t)\sim\frac{1}{\gamma^2}\left(t\delta-\frac{1}{12}\right)\quad(t\to\infty).$$

2.3. Третий момент при $1<\alpha<2$**.**

$$\mathbf{E}_0X^3(t)=\frac{1}{\gamma^3\Gamma^3(2-\alpha)\delta^{3\alpha-3}}\left(\delta^3t^3-\frac{9}{2}(\alpha-2)\delta^2t^2+3(2\alpha^2-7\alpha+6)\delta t\right.$$
$$\left.-\frac{3}{4}\left(3\alpha^3-13\alpha^2+18\alpha-8\right)\right)-A_1(t), \tag{7}$$

где

$$A_1(t)=\frac{(\alpha-1)^3}{\gamma^3\Gamma^3(2-\alpha)\pi}\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(x+\delta)t}}{x+\delta}\left(x^{\alpha-1}\left(x^{2\alpha-2}\sin\left(\frac{3\pi}{\alpha-1}\right)\right.\right.$$

$$- \; 3x^{\alpha-1}\delta^{\alpha-1}\sin\left(\frac{2\pi}{\alpha-1}\right) + 3\delta^{2\alpha-2}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)\Bigg)\Bigg)\;\frac{1}{B_1(x)}\,dx,$$

где

$$B_1(x) = x^{6\alpha-6} - 6x^{5\alpha-5}\delta^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right) + 6x^{4\alpha-4}\delta^{2\alpha-2}\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha-1}\right)$$

$$-2x^{3\alpha-3}\delta^{3\alpha-3}\cos\left(\frac{3\pi}{\alpha-1}\right)9x^{4\alpha-4}\delta^{2\alpha-2} - 18x^{3\alpha-3}\delta^{3\alpha-3}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)$$

$$+6x^{2\alpha-2}\delta^{4\alpha-4}\cos\left(\frac{2\pi}{\alpha-1}\right)+9x^{2\alpha-2}\delta^{4\alpha-4}-6x^{\alpha-1}\delta^{5\alpha-5}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)+\delta^{6\alpha-6}.$$

Тогда при $t \to \infty$ получаем асимптотическую формулу для асимметрии (третий центральный момент)

$$\mathbf{E}_0(X(t) - \mathbf{E}_0X(t))^3 \sim \frac{1}{\gamma^3\Gamma^3(2-\alpha)\delta^{3\alpha-3}}\left(\left(2\alpha^2 - 7\alpha + 6\right)\delta t\right.$$

$$\left. -\frac{5}{4}\alpha^3 + \frac{19}{4}\alpha^2 - \frac{11}{2}\alpha + 2\right). \tag{8}$$

Третий момент при $\alpha = 1$.

$$\mathbf{E}_0X^3(t) = \frac{1}{\gamma^3}\left((\delta t)^3 + \frac{9}{2}(\delta t)^2 + 3\delta t - 6\int_0^\infty \frac{e^{-\delta(x+1)t}(3\ln^2 x - \pi^2)}{(x+1)(\ln^2 x + \pi^2)^3}\,dx\right). \tag{9}$$

Из формул (3), (5), (7) может быть вычислен третий центральный момент, асимптотика которого при $t \to \infty$ задается формулой

$$\mathbf{E}_0(X(t) - \mathbf{E}_0X(t))^3 \sim \frac{\delta t}{\gamma^3}.$$

2.4. Замечание. Интересно заметить, что трёхчлен $2\alpha^2 - 7\alpha + 6$, стоящий в правой части формулы (8) в виде коэффициента при t, имеет корни $3/2$ и 2. Из этого следует, что предел $\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}_0(X(t) - \mathbf{E}_0X(t))^3/t$ положителен при $\alpha < 3/2$, отрицателен при $\alpha > 3/2$ и равен нулю при $\alpha = 3/2$ (процесс максимумов винеровского процесса).

3.4. Асимптотическая нормальность.

При $1 < \alpha < 2$ из формулы (1) следует

$$\mathbf{E}_0 e^{-pX(t)}$$

$$= \frac{p\,\exp\left(\left(\left(\delta^{\alpha-1} - \frac{p(\alpha-1)}{\gamma\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \delta\right)t\right)}{\gamma\Gamma(2-\alpha)\left(\delta - \left(\delta^{\alpha-1} - \frac{p(\alpha-1)}{\gamma\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\left(\delta^{\alpha-1} - \frac{p(\alpha-1)}{\gamma\Gamma(2-\alpha)}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}} - A_2(p,t).$$

где

$$A_2(p,t) = -\frac{\gamma\Gamma(2-\alpha)}{\pi}\int\limits_0^\infty e^{-(x+\delta)t}\frac{p(\alpha-1)x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)}{(x+\delta)B_2(p,x)}\,dx,$$

где

$$B_2(p,x) = p^2(\alpha-1)^2 + 2p(\alpha-1)\gamma\Gamma(2-\alpha)\left(x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right) - \delta^{\alpha-1}\right) +$$

$$+\gamma^2\Gamma(2-\alpha)^2\left(x^{2\alpha-2} - 2\delta^{\alpha-1}x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right) + \delta^{2\alpha-2}\right).$$

Рассмотрим процесс

$$Y(t) = \frac{X(t) - \mathbf{E}_0 X(t)}{\sqrt{\mathbf{D}_0 X(t)}}.$$

Учитывая асимптотику математического ожидания и дисперсии $X(t)$, получаем при $t \to \infty$

$$Y(t) \sim \frac{\gamma\Gamma(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}X(t) - \delta t}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}_0 e^{-pY(t)} \sim \exp\left(p\frac{\sqrt{\delta t}}{\sqrt{2-\alpha}}\right)\mathbf{E}_0\exp\left(-p\frac{\gamma\Gamma(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}X(t)\right). \quad (10)$$

Отсюда получаем

$$\mathbf{E}_0\exp\left(-p\frac{\gamma\Gamma(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}X(t)\right)$$

$$= \frac{p\delta^{\alpha-1}\exp\left(\left(\left(\delta^{\alpha-1} - \frac{(\alpha-1)p\delta^{\alpha-1}}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}} - \delta\right)t\right)}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}\left(\delta - \left(\delta^{\alpha-1} - \frac{(\alpha-1)p\delta^{\alpha-1}}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}\right)^{\frac{1}{\alpha-1}}\right)\left(\delta^{\alpha-1} - \frac{(\alpha-1)p\delta^{\alpha-1}}{\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}\right)^{\frac{\alpha-2}{\alpha-1}}}$$

$$+\frac{\gamma\Gamma(2-\alpha)}{\pi}\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(x+\delta)t}}{(x+\delta)\sqrt{(2-\alpha)\delta t}}\frac{p\gamma\Gamma(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}x^{\alpha-1}\sin\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)}{A_3(p,t,x)}dx,$$

где

$$A_3(p,t,x)=\frac{p^2\gamma^2\Gamma^2(2-\alpha)\delta^{2\alpha-2}(\alpha-1)^2}{(2-\alpha)\delta t}+\frac{2p\gamma^2\Gamma^2(2-\alpha)\delta^{\alpha-1}(\alpha-1)}{B_3(p,t,x)},$$

и

$$B_3(p,t,x)=\sqrt{(2-\alpha)\delta t}\left(x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)-\delta^{\alpha-1}\right)$$

$$+\gamma^2\Gamma^2(2-\alpha)\left(x^{2\alpha-2}-2\delta^{\alpha-1}x^{\alpha-1}\cos\left(\frac{\pi}{\alpha-1}\right)+\delta^{2\alpha-2}\right).$$

Подставляя последнее выражение в (10) и переходя к пределу при $t\to\infty$, получаем

$$\mathbf{E}_0e^{-pY(t)}\to e^{\frac{p^2}{2}},$$

что соответствует преобразованию Лапласа нормально распределенной случайной величины.

Для обращённого гамма-процесса (случай $\alpha=1$) с параметрами исходного гамма-процесса δ и γ имеем

$$\mathbf{E}_0e^{-pX(t)}=\frac{p\,e^{(e^{-\frac{p}{\gamma}}-1)\delta t}}{\gamma\left(e^{\frac{p}{\gamma}}-1\right)}+\gamma p\int\limits_0^\infty\frac{e^{-(x+1)\delta t}\,dx}{(x+1)\left(p^2+2p\gamma\ln x+\gamma^2\ln^2x+\gamma^2\pi^2\right)}.$$

Учитывая известную асимптотику математического ожидания и дисперсии для $X(t)$, получаем

$$Y(t)\sim\frac{X(t)-t\delta/\gamma}{\sqrt{t\delta}/\gamma}.$$

Тогда

$$\mathbf{E}_0e^{-pY(t)}=\exp\left(p\sqrt{t\delta}\right)\mathbf{E}_0\exp\left(-p\frac{X(t)}{\sqrt{t\delta}/\gamma}\right),\tag{11}$$

откуда

$$\mathbf{E}_0e^{-p\frac{X(t)}{\sqrt{t\delta}/\gamma}}$$

$$=\frac{p\,e^{(e^{-\frac{p}{\sqrt{t\delta}}}-1)\delta t}}{\sqrt{t\delta}\left(e^{\frac{p}{\sqrt{t\delta}}}-1\right)}+\int\limits_0^{+\infty}\frac{\frac{\gamma^2p}{\sqrt{t\delta}}\,e^{-(x+1)\delta t}\,dx}{(x+1)\left(\frac{p^2\gamma^2}{t\delta}+\frac{2p\gamma^2}{\sqrt{t\delta}}\ln|x|+\gamma^2\ln^2|x|+\gamma^2\pi^2\right)}.$$

Подставляя последнее выражение в (11) и переходя к пределу при $t \to \infty$, получаем

$$\mathbf{E}_0 e^{-pY(t)} \to e^{\frac{p^2}{2}} \quad (p > 0),$$

что соответствует преобразованию Лапласа нормально распределенной случайной величины.

Авторы выражают благодарность профессору Я. И. Белопольской за полезные советы и благожелательную критику.

Литература

1. A. N. Borodin and P. Salminen, *Handbook of Brownian Motion – Facts and Formulae*. Birkhäuser Verlag (1996).
2. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории*. М. (1968).
3. E. Çinlar, *On increasing continuous processes*. — Stochastic Process. Appl. **9** (1979), 147–154.
4. J. D. Esary, A. W. Marshall, and F. Proschan, *Shock models and wear processes*. — Ann. Probab. **1** (1973), 627–649.
5. И. Б. Герцбах, Х. Б. Кордонский, *Модели отказов*. М. (1966).
6. Б. П. Харламов, *Обращенный процесс с независимыми положительными приращениями: конечномерные распределения*. — Зап. научн. семин. ПОМИ, **311** (2004), 286–297.
7. B. P. Harlamov, *Continuous semi-Markov processes and their applications*. In: N. Limnios. Semi-Markov processes and their applications. Commun. Statist., Theory and Methods. **33**, No. 3 (2004), 569–589.
8. B. P. Harlamov, *Inverse gamma-process as a model of wear*. In: Longevity, Aging Degradation Models, **2** (2004), 180–190.

Rasova S. S., Harlamov B. P. Non-decreasing continuous semi-Markov processes: asymptotics and asymmetry.

The authors consider a non-decreasing continuous random process with a family of the first hitting times for levels $x > 0$, which form Lévy process with positive increments. Asymptotics of the first three moments of their one-dimensional distributions as t goes to infinity are derived for the case when the Lévy density is e^{-u}/u^{α} $(1 \leqslant \alpha < 2)$.

Институт проблем машиноведения РАН,
Большой пр. ВО, д. 61,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: s.rasova@gmail.com, b.p.harlamov@gmail.com

Поступило 23 ноября 2012 г.