Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

А. А. Наумов

ПРЕДЕЛЬНЫЕ ТЕОРЕМЫ ДЛЯ ДВУХ КЛАССОВ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ С ГАУССОВСКИМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

§1. Введение

Рассмотрим треугольный массив случайных величин X_{jk}, $1 \leqslant j \leqslant k < \infty$, и предположим, что $\mathbf{E}\, X_{jk} = 0$, $\mathbf{E}\, X_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$, и пусть $X_{jk} = X_{kj}$ для всех $1 \leqslant j < k < \infty$. Фиксируем произвольное $n \in \mathbb{N}$ и сформируем случайную матрицу

$$\mathbf{X} = \{X_{jk}\}_{j,k=1}^n.$$

Обозначим через $\lambda_1 \leqslant \dots \leqslant \lambda_n$ собственные значения матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}$ и определим эмпирическую спектральную функцию распределения

$$\mathcal{F}^{\mathbf{X}}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n I(\lambda_i \leqslant x),$$

где через $I(B)$ мы обозначили индикатор события B. Дополнительно определим ожидаемую эмпирическую спектральную функцию распределения $F^{\mathbf{X}}(x) := \mathbf{E}\,\mathcal{F}^{\mathbf{X}}(x)$.

Пусть $g(x)$ и $G(x)$ обозначают плотность и функцию распределения стандартного полукругового закона

$$g(x) = \frac{1}{2\pi}\sqrt{4-x^2}\, I(|x| \leqslant 2), \quad G(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g(u)\, du.$$

В большинстве предыдущих работ, см., например [5] и [3], предполагалось, что все σ_{ij}^2 являются одинаковыми числами. В этой заметке мы изучим класс случайных матриц с гауссовскими элементами и покажем, что предельное распределение $F^{\mathbf{X}}(x)$ совпадает с полукруговым

Ключевые слова: случайные матрицы, полукруговой закон, закон Марченко–Пастура, числа Каталана.

Работа поддержана грантом SFB 701 Университета Билефельда и грантом DFG в рамках International Research Training Group IRTG 1132.

законом. Дополнительно подчеркнем, что мы не предполагаем, что все σ_{ij} являются одинаковыми.

Для всех $\tau > 0$ мы определим отношение Линдеберга для случайных матриц

$$L_n(\tau) := \frac{1}{n^2} \sum_{i,j=1}^{n} \mathbf{E}\,|X_{ij}|^2 I(|X_{ij}| \geqslant \tau\sqrt{n}),$$

и предположим, что для любого фиксированного $\tau > 0$

$$L_n(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Для всех $1 \leqslant i \leqslant n$ обозначим сумму дисперсий в строке через $B_i^2 := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2$. Наложим условия на поведение дисперсий σ_{ij}^2:

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |B_i^2 - 1| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty; \tag{2}$$

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} B_i \leqslant C, \tag{3}$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Замечание 1. Легко видеть, что условия (2) и (3) следуют из условия

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left|B_i^2 - 1\right| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

В этой заметке мы докажем следующую теорему.

Теорема 1. *Пусть элементы X_{ij} случайной матрицы $\mathbf{X}$ независимы для всех $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ и имеют гауссовское распределение с $\mathbf{E}\,X_{ij} = 0$, $\mathbf{E}\,X_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$. Предположим, что условия* (1)–(3) *выполнены. Тогда*

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}}(x) - G(x)| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

Замечание 2. Теорема 1 может быть обобщена на случай произвольных симметричных матриц с независимыми элементами, которые удовлетворяют условиям (1)–(3). Для этого нужно доказать аналог принципа универсальности Линдеберга для случайных матриц, который заключается в том, что мы можем заменить произвольную матрицу на матрицу с гауссовскими элементами. Детали см. в [2].

Результат также может быть обобщен на класс ковариационных матриц следующим образом. Рассмотрим массив случайных величин X_{jk}, $1 \leqslant j,\ k < \infty$, таких что $\mathbf{E}\,X_{jk} = 0$ и $\mathbf{E}\,X_{jk}^2 = \sigma_{jk}^2$. Сформируем

матрицу $\mathbf{X} = \{X_{jk}\}$ размера $p \times n$. Обозначим через $s_1^2 \leqslant \ldots \leqslant s_p^2$ собственные значения матрицы $\frac{1}{n}\mathbf{X}\mathbf{X}^*$ и определим эмпирическую спектральную функцию распределения

$$\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) = \frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} I(s_i^2 \leqslant x).$$

Положим $F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) := \mathbf{E}\,\mathcal{F}^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x)$.

Предположим, что $p = p(n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n} = y$. Без потери общности мы можем считать, что $y \in (0, 1]$.

Пусть $g_y(x)$ и $G_y(x)$ обозначают плотность и функцию распределения стандартного закона Марченко–Пастура.

$$g_y(x) = \frac{1}{2yx\pi}\sqrt{(x-a)(b-x)}I[a,b](x), \quad G_y(x) = \int\limits_{-\infty}^{x} g_y(u)du,$$

где $a = (1-\sqrt{y})^2$, $b = (1+\sqrt{y})^2$.

Предположим, что выполнено условие (1), но мы переопределим $L_n(\tau)$ следующим образом

$$L_n(\tau) := \frac{1}{np}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{E}\,X_{ij}^2 I\Big(|X_{ij}| \geqslant \tau\sqrt{n}\Big). \tag{5}$$

Для всех $1 \leqslant i \leqslant p$ обозначим через $B_i^2 := \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_{ik}^2$ и для всех $1 \leqslant j \leqslant n$ положим $D_j := \frac{1}{p}\sum\limits_{l=1}^{p}\sigma_{lj}^2$. Наложим условия на поведения σ_{ij}^2:

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{p}|B_i^2 - 1| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty; \tag{6}$$

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}|D_j^2 - 1| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty; \tag{7}$$

$$\max\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant p} B_i, \max_{1\leqslant j\leqslant n} D_j\Big) \leqslant C, \tag{8}$$

где C – некоторая абсолютная константа.

Теорема 2. *Пусть элементы X_{ij} матрицы $\mathbf{X}$ независимы для всех $1 \leqslant i \leqslant p$, $1 \leqslant j \leqslant n$ и имеют гауссовское распределение с $\mathbf{E}\,X_{ij} = 0$,*

$\mathbf{E}\, X_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$. *Предположим, что выполнено условие* (1), *условия* (6)–(8) *и* $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{p}{n} = y \in (0,1]$. *Тогда*

$$\sup_x |F^{\mathbf{X}\mathbf{X}^*}(x) - G_y(x)| \to 0 \quad \textit{при} \quad n \to \infty.$$

В работе [4] Рурке доказал сходимость к закону Марченко–Пастура для ансамбля случайных матриц, для которого выполнены аналоги условий (6)–(7).

Доказательство теоремы 2 может быть проведено аналогично доказательству теоремы 1, поэтому мы его опустим.

Замечание 3. Мы можем заменить произвольное $\tau > 0$ в (1) убывающей к нулю последовательностью τ_n, такой что

$$L_n(\tau_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{9}$$

и $\lim\limits_{n\to\infty} \tau_n \sqrt{n} = \infty$.

§2. Доказательство теоремы 1

Для доказательства теоремы мы будем использовать метод моментов. Легко видеть, что моменты ожидаемой эмпирической функции распределения $F^{\mathbf{X}}(x)$ могут быть переписаны в виде нормированного следа степени матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}$:

$$\int\limits_{\mathbb{R}} x^k dF^{\mathbf{X}}(x) = \mathbf{E}\, \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X} \right)^k, \quad k \geqslant 1.$$

Для доказательства сходимости последовательности $F^{\mathbf{X}}(x)$ к $G(x)$ достаточно показать, что

$$\mathbf{E}\, \frac{1}{n} \operatorname{Tr} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{X} \right)^k = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k dG(x) + o_k(1).$$

для всех $k \geqslant 1$, где $o_k(1)$ стремится к нулю при $n \to \infty$ для любого фиксированного k.

Хорошо известно, что моменты полукругового закона равны

$$\beta_k = \int\limits_{\mathbb{R}} x^k dG(x) = \begin{cases} \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}, & k = 2m, \\ 0, & k = 2m+1. \end{cases}$$

Отметим, что моменты β_{2m} совпадают с числами Каталана.

Всюду далее мы будем использовать обозначения и определения из [1]. Графом мы будем называть триплет (E, V, F), где E – множество ребер, V – множество вершин, и F – функция, $F : E \to V \times V$. Пусть $\boldsymbol{i} = (i_1, \dots, i_k)$ обозначает вектор, принимающий значения из множества $\{1, \dots, n\}^k$. По вектору $\boldsymbol{i}$ мы построим Г-граф следующим образом. Нарисуем горизонтальную линию и нанесем на нее числа $i_1, \dots, i_k$. Будем рассматривать различные числа в качестве вершин и нарисуем k ребер e_j из i_j в i_{j+1}, $j = 1, \dots, k$, используя соглашение $i_{k+1} = i_1$. Обозначим число различных чисел i_j через t. Построенный таким образом граф мы будем обозначать $\Gamma(k, t)$.

Мы будем говорить, что два $\Gamma(k, t)$-графа изоморфны, если один может быть получен из другого перестановкой $(1, \dots, n)$. В силу этого определения, все Г-графы могут быть разбиты на классы изоморфных между собой графов. Мы назовем $\Gamma(k, t)$-граф каноническим, если он удовлетворяет следующим условиям:

1) Множество вершин $\{1, \dots, t\}$;

2) Множество ребер $\{e_1, \dots, e_k\}$;

3) Существует функция g из $\{1, \dots, k\}$ в $\{1, \dots, t\}$, удовлетворяющая $g(1) = 1$ и $g(i) \leqslant \max\{g(1), \dots, g(i-1)\} + 1$ для $1 < i \leqslant k$;

4) $F(e_i) = (g(i), g(i+1))$, для $i = 1, \dots, k$, где мы используем соглашение $g(k+1) = g(1) = 1$.

Легко видеть, что каждый класс изоморфных графов содержит один и только один канонический Г-граф с ассоциированой с ним функцией g. Произвольный граф в этой категории может быть определен с помощью соотношения $F(e_j) = (i_{g(j)}, i_{g(j+1)})$. Легко видеть, что каждый класс изоморфных графов содержит $n(n-1)\cdots(n-t+1)$ $\Gamma(k, t)$-графов.

Мы разобьем все канонические графы на три категории. Категория 1 содержит все канонические $\Gamma(k, t)$-графы, у которых каждое ребро совпадает ровно с одним ребром, идущим в противоположном направлении, и граф несовпадающих ребер является деревом. Легко видеть, что если k нечетно, то категория 1 не содержит ни одного графа. Если k четно, скажем $k = 2m$, мы обозначим $\Gamma(k, t)$-граф через $\Gamma_1(2m)$. Категория 2 содержит все канонические графы, у которых существует хотя бы одно ребро с нечетной кратностью. Граф из этой категории мы обозначим через $\Gamma_2(k, t)$. Категория 3 состоит

из всех остальных канонических графов, которые мы будем обозначать $\Gamma_3(k,t)$.

Известно, см. [1, лемма 2.4], что число канонических $\Gamma_1(2m)$-графов равно $\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$.

Мы перепишем след степени матрицы $n^{-1/2}\mathbf{X}$ в виде суммы

$$\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}\right)^k = \frac{1}{n^{k/2}} \sum_{i_1,i_2,\dots,i_k} X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \dots X_{i_k i_1}, \tag{10}$$

где суммирование берется по всем векторам $\boldsymbol{i} = (i_1, ..., i_k) \in \{1, ..., n\}^k$.

По каждому вектору $\boldsymbol{i}$ мы построим граф $G(\boldsymbol{i})$ как указано выше. Обозначим $X(\boldsymbol{i}) = X(G(\boldsymbol{i}))$.

Мы можем разбить моменты $F^{\mathbf{X}}(x)$ на три группы

$$\mathbf{E}\,\frac{1}{n}\operatorname{Tr}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{X}\right)^k = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\boldsymbol{i}} \mathbf{E}\, X_{i_1 i_2} X_{i_2 i_3} \dots X_{i_k i_1} = S_1 + S_2 + S_3,$$

где

$$S_j = \frac{1}{n^{k/2+1}} \sum_{\Gamma(k,t)\in C_j} \sum_{G(\boldsymbol{i})\in\Gamma(k,t)} \mathbf{E}[X(G(\boldsymbol{i}))],$$

и суммирование в первой сумме $\sum\limits_{\Gamma(k,t)\in C_j}$ производится по всем каноническим $\Gamma(k,t)$-графам в категории C_j, а суммирование в $\sum\limits_{G(\boldsymbol{i})\in\Gamma(k,t)}$ производится по всем графам изоморфным данному каноническому графу.

Из независимости X_{ij} и $\mathbf{E}\, X_{ij}^{2s-1} = 0$, $s \geqslant 1$ следует, что $S_2 = 0$.

Для графов из категории C_1 and C_3 нам потребуются дополнительные обозначения. Рассмотрим $\Gamma(k,t)$-граф $G(\boldsymbol{i})$. Без потери общности мы будем считать, что i_l, $l = 1, \dots, t$, являются различными координатами вектора $\boldsymbol{i}$ и определим вектор $\boldsymbol{i}_t = (i_1, \dots, i_t)$. Обозначим $G(\boldsymbol{i}_t) := G(\boldsymbol{i})$. Пусть

$$\widetilde{\boldsymbol{i}_t} = (i_1, \dots, i_{q-1}, i_{q+1}, \dots, i_t)$$

и

$$\widehat{\boldsymbol{i}_t} = (i_1, \dots, i_{p-1}, i_{p+1}, \dots, i_{q-1}, i_{q+1}, \dots, i_t)$$

обозначают векторы, полученные из $\boldsymbol{i}_t$ удалением элементов в позициях q и p, q соотвественно. Мы обозначим граф без вершины i_q и всех

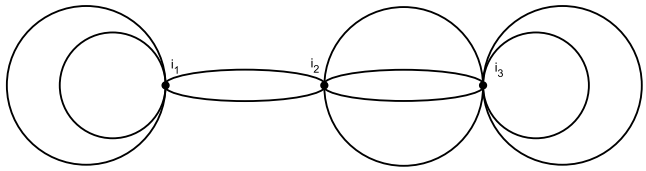

Рис. 1. Граф $\Gamma_3(10,3)$.

инцидентных ей ребер через $G(\widetilde{\boldsymbol{i}_t})$. Если существует петля инцидентная вершине i_q, то мы обозначим через $G'(\boldsymbol{i}_t)$ граф с удаленной петлей с учетом ее кратности.

Производя обход всех вершин графа по ребрам, начиная с i_1, мы скажем, что ребро является инновационным, если оно ведет к новой вершине.

Теперь мы перейдем к оценке S_3. Для графа из категории C_3 мы знаем, что k должно быть четным числом, например $k = 2m$. На рис. 1 мы изобразили пример $\Gamma_3(k,t)$-графа. Этот граф соответствует элементу $X(G(\boldsymbol{i}_3)) = X^2_{i_1 i_1} X^2_{i_1 i_2} X^4_{i_2 i_3} X^2_{i_3 i_3}$.

Заметим, что $\mathbf{E}\, X^{2s}_{i_p i_q} \leqslant_s \sigma^{2s}_{i_p i_q}$, где мы воспользовались тем, что X_{ij} имеют нормальное распределение. Это позволяет нам воспользоваться условиями (2) и (3).

Каждый граф G из категории C_3 мы представим в виде объединения $G = G_1 \cup G_2$ следующим образом. Раскрасим все ребра G в два цвета, причем совпадающие ребра будут иметь один цвет. Выберем граф G_1 так, чтобы было выполнено одно из следующих условий:

i) граф G_1 содержит одну вершину и все инцидентные ей петли;

ii) граф G_1 содержит две вершины и ребро между ними, причем кратность ребра больше двух;

iii) каждое ребро из G_1 совпадает ровно с одним ребром идущим в противоположном направлении, и граф из несовпадающих ребер представляет собой простой цикл.

Предположим, что сумма кратностей всех ребер графа G_1 равна $2s$. Нам остается рассмотреть оставшиеся $2(m-s)$ ребер графа G_2.

Обозначим через V_1, E_1 и V_2, E_2 множества вершин и ребер графов G_1 и G_2 соответственно. Мы определим $\boldsymbol{i}_t^1 := (i_l, i_l \in V_1)$. Фиксируем граф G_1 и рассмотрим граф G_2.

a) Если E_2 пусто, то мы переходим на шаг c). Иначе, рассмотрим следующие возможности:

(1) Существует петля из E_2, инцидентная вершине $i_q \in V_2$ с кратностью $2a, a \geqslant 1$. В этом случае мы оценим

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\boldsymbol{i}) \in \Gamma(2m,t)} \mathbf{E}[Y(G(\boldsymbol{i}))] \leqslant_a \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\boldsymbol{i}_t} \mathbf{E}[Y(G'(\boldsymbol{i}_t))] \sigma_{i_q i_q}^{2a}.$$

Применяя a раз неравенство $n^{-1}\sigma_{i_q i_q}^2 \leqslant B_{i_q}^2$ и условие (3), мы удалим все петли инцидентные вершине i_q;

(2) Не существует петель инцидентных $i_q \in V_2 \setminus V_1$, но i_q соединено только с одной вершиной $i_p \in V_2$ ребром из G_2, и кратность этого ребра равна $2b, b \geqslant 1$. В этом случае мы оценим

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\boldsymbol{i}) \in \Gamma(2m,t)} \mathbf{E}[Y(G(\boldsymbol{i}))] \leqslant_b \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\widetilde{\boldsymbol{i}}_t} \mathbf{E}[Y(G(\widetilde{\boldsymbol{i}}_t))] \sum_{i_q=1}^{n} \sigma_{i_p i_q}^{2b}.$$

Мы можем использовать $b-1$ раз неравенство $n^{-1}\sigma_{i_p i_q}^2 \leqslant B_{i_p}^2$ и условие (3) и последовательно удалить все ребра за исключением двух. На последнем шаге мы можем снова использовать (3) и удалить i_q.

(3) Не существует петель в G_2 и не существует вершин в $V_2 \setminus V_1$, которые соединены в точности с одной вершиной из V_2. Тогда мы можем взять любые две вершины, скажем i_p и i_q, из V_2 и написать оценку

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\boldsymbol{i}) \in \Gamma(2m,t)} \mathbf{E}[Y(G(\boldsymbol{i}))] \leqslant_b \frac{1}{n^{m+1}} \sum_{\boldsymbol{i}_t} \mathbf{E}[Y(\widetilde{G}(\boldsymbol{i}_t))] \sigma_{i_p i_q}^{2c},$$

где через $\widetilde{G}(\boldsymbol{i}_t)$ мы обозначили граф $G(\boldsymbol{i}_t)$ с удаленным ребром между i_p в i_q с учетом кратности $2c, c \geqslant 1$. Снова используя c раз неравенство $n^{-1}\sigma_{i_p i_q}^2 \leqslant B_{i_p}^2$ и условие (3), мы удалим все ребра между i_p и i_q.

b) переходим на шаг a);

c) Легко видеть, что на каждого шаге a) мы используем одно и тоже

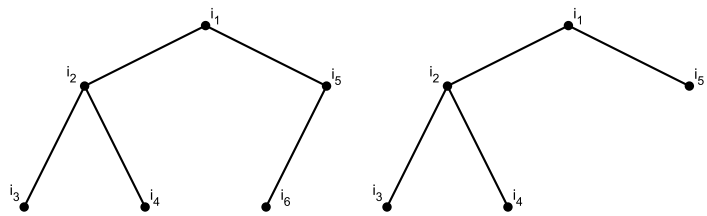

Рис. 2. Слева: дерево несовпадающих вершин графа $\Gamma_1(10)$. Справа: дерево несовпадающих вершин графа $\Gamma_1(10)$ с удаленным листом i_6.

условие (3). Следовательно, мы можем написать

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\boldsymbol{i})\in\Gamma(2m,t)} \mathbf{E}[Y(G(\boldsymbol{i}))] \leqslant_m \frac{C^{2(m-s)} n^{m-s}}{n^{m+1}} \sum_{\boldsymbol{i}_t^1} \mathbf{E}[Y(G_1(\boldsymbol{i}_t^1))]. \quad (11)$$

Остается оценить правую часть в (11). В случае i) напишем оценку

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{s+1}} \sum_{i_1=1}^{n} \mathbf{E}\, Y_{i_1 i_1}^{2s} &\leqslant_s \frac{1}{n^{s+1}} \sum_{i_1=1}^{n} \sigma_{i_1 i_1}^{2s} \leqslant \frac{C^{2(s-1)}}{n^2} \sum_{i_1=1}^{n} \sigma_{i_1 i_1}^{2} \\ &\leqslant C^{2(s-1)} \tau_n^2 + \frac{C^{2(s-1)}}{n^2} \sum_{i_1=1}^{n} \mathbf{E}\, Y_{i_1 i_1}^2 I(|Y_{i_1 i_1}| \geqslant \tau_n \sqrt{n}) \\ &\leqslant C^{2(s-1)} \tau_n^2 + C^{2(s-1)} L_n(\tau_n) = o_s(1),\end{aligned}$$

где мы использовали неравенство $n^{-1}\sigma_{i_1 i_1}^2 \leqslant B_{i_1}^2$ и (3).

Оценки в случаях ii) и iii) могут быть получены аналогичными рассуждениями. Мы оставляем доказательство читателю. Детали можно найти в [2]. Окончательно, для случаев i)–iii) мы можем написать

$$\frac{1}{n^{m+1}} \sum_{G(\boldsymbol{i})\in\Gamma(2m,t)} \mathbf{E}[Y(G(\boldsymbol{i}))] \leqslant_m C^{2(m-1)} (\tau_n^2 + L_n(\tau_n)) = o_m(1).$$

В качестве примера мы рекомендуем проверить алгоритм для графа, изображенного на рис. 1.

Легко видеть, что число канонических графов в категории C_3 имеет порядок $O_m(1)$. Окончательно мы получим оценку для S_3

$$S_3 = o_m(1).$$

Нам остается оценить S_1. Для графа из категории C_1 мы знаем, что k должно быть четным числом, например $k = 2m$. Для графов из категории C_1 используя обозначения $\boldsymbol{i}_t, \widetilde{\boldsymbol{i}}_t$ и $\widehat{\boldsymbol{i}}_t$, мы будем полагать $t = m + 1$.

В левой части рис. 2 мы изобразили пример дерева несовпадающих вершин графа $\Gamma_1(2m)$ для $m = 5$. Элемент, соответствующий этому дереву, равен $X(G(\boldsymbol{i}_6)) = X^2_{i_1 i_2} X^2_{i_2 i_3} X^2_{i_2 i_4} X^2_{i_1 i_5} X^2_{i_5 i_6}$.

Обозначим через $\sigma^2(\boldsymbol{i}_{m+1}) = \sigma^2(G(\boldsymbol{i}_{m+1}))$ произведение m чисел $\sigma^2_{i_s i_t}$, где $i_s, i_t, s < t$, – некоторые вершины графа $G(\boldsymbol{i}_{m+1})$, соединенные ребром из этого графа. В нашем примере

$$\sigma^2(\boldsymbol{i}_{m+1}) = \sigma^2(\boldsymbol{i}_6) = \sigma^2_{i_1 i_2} \sigma^2_{i_2 i_3} \sigma^2_{i_2 i_4} \sigma^2_{i_1 i_5} \sigma^2_{i_5 i_6}.$$

Если $m = 1$, то $\sigma^2(\boldsymbol{i}_2) = \sigma^2_{i_1 i_2}$ и

$$\frac{1}{n^2} \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \neq i_2}}^{n} \sigma^2_{i_1 i_2} = \frac{1}{n} \sum_{i_1=1}^{n} \left[\frac{1}{n} \sum_{i_2=1}^{n} \sigma^2_{i_1 i_2} - 1 \right] + 1 + o(1), \tag{12}$$

где мы использовали $n^{-2} \sum\limits_{i_1=1}^{n} \sigma^2_{i_1 i_1} = o(1)$. В силу (2), первое слагаемое в (12) имеет порядок $o(1)$. Число канонических графов в C_1 для $m = 1$ равно 1. Мы заключим, что для $m = 1$

$$S_1 = n^{-2} \sum_{\Gamma_1(2)} \sum_{\substack{i_1, i_2 = 1 \\ i_1 \neq i_2}}^{n} \sigma^2_{i_1 i_2} = 1 + o(1).$$

Далее предположим, что $m > 1$. Рассмотрим дерево несовпадающих ребер графа G. Мы можем найти лист в дереве, скажем i_q, и вершину i_p, которая соединена с i_q ребром из этого дерева. Мы имеем $\sigma^2(\boldsymbol{i}_{m+1}) = \sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}) \cdot \sigma^2_{i_p i_q}$, где $\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}) = \sigma^2(G(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}))$.

В нашем примере мы можем взять лист i_6. В правой части Рис. 2 мы изобразили дерево с удаленным листом i_6. Мы имеем $\sigma^2_{i_p i_q} = \sigma^2_{i_5 i_6}$ и $\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_6) = \sigma^2_{i_1 i_2} \sigma^2_{i_2 i_3} \sigma^2_{i_2 i_4} \sigma^2_{i_1 i_5}$.

Легко видеть, что

$$\begin{aligned}\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{\boldsymbol{i}_{m+1}}\sigma^2(\boldsymbol{i}_{m+1}) &= \frac{1}{n^{m+1}}\sum_{\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}}\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1})\sum_{i_q=1}^{n}\sigma^2_{i_p i_q}+o_m(1)\\ &= \frac{1}{n^m}\sum_{\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}}\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1})\left[\frac{1}{n}\sum_{i_q=1}^{n}\sigma^2_{i_p i_q}-1\right] \qquad (13)\\ &+\frac{1}{n^m}\sum_{\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}}\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}) \qquad (14)\\ &+o_m(1),\end{aligned}$$

где мы добавили некоторые графы из категории C_3 и воспользовались оценками, аналогичными оценкам для члена S_3. Теперь мы покажем, что слагаемое (13) имеет порядок $o_m(1)$. Заметим, что

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n^m}\sum_{\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}}\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1})\left|\frac{1}{n}\sum_{i_q=1}^{n}\sigma^2_{i_p i_q}-1\right|\\ &\qquad=\frac{1}{n}\sum_{i_p=1}^{n}\left|\frac{1}{n}\sum_{i_q=1}^{n}\sigma^2_{i_p i_q}-1\right|\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{\widehat{\boldsymbol{i}}_{m+1}}\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1}). \qquad (15)\end{aligned}$$

Мы можем последовательно удалить все вершины из дерева и, используя (3), получить

$$\frac{1}{n^{m-1}}\sum_{\widehat{\boldsymbol{i}}_{m+1}}\sigma^2(\widetilde{\boldsymbol{i}}_{m+1})\leqslant C^{2(m-1)}. \qquad (16)$$

В силу (16) и (2) мы показали, что слагаемое (13) имеет порядок $o_m(1)$. Для второго слагаемого (14) мы можем повторить процедуру и остановиться, если у нас осталось только две различные вершины. На последнем шаге мы можем воспользоваться результатом (12). Окончательно мы имеем

$$S_1=\frac{1}{n^{m+1}}\sum_{\Gamma_1(2m)}\sum_{\boldsymbol{i}_{m+1}}\sigma^2(\boldsymbol{i}_{m+1})=\frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}+o_m(1),$$

что завершает доказательство теоремы 1. □

Литература

1. Z. D. Bai, J. W. Silverstein, *Spectral Analysis of Large Dimensional Random Matrices*. 2nd ed. Spinger, 2010.
2. F. Götze, A. A. Naumov, A. N. Tikhomirov, *Semicircle law for a class of random matrices with dependent elements*. Preprint; `arXiv.org:0708.2895`.
3. Л. А. Пастур, *Спектры случайных самосопряженных операторов*. — Успехи матем. наук **28**, (1973), 3–64.
4. S. O'Rourke, *A note on the Marchenko–Pastur law for a class of random matrices with dependent entries*. Preprint; `arXiv:1201.3554`.
5. E. P. Wigner, *On the distribution of the roots of certain symmetric matrices*. — Ann. Math. **67**, (1958), 325–327.

Naumov A. A. Limit theorems for two classes of random matrices with Gaussian elements.

In this note, we consider ensembles of random symmetric matrices with Gaussian elements. Suppose that $\mathbb{E}X_{ij} = 0$ and $\mathbb{E}X_{ij}^2 = \sigma_{ij}^2$. We do not assume that all σ_{ij} are equal. Assuming that the average of the normalized sums of variances in each row converges to one and Lindeberg condition holds true we prove that the empirical spectral distribution of eigenvalues converges to Wigner's semicircle law. We also provide analogue of this result for sample covariance matrices and prove convergence to the Marchenko–Pastur law.

Московский государственный
университет ГСП-1, Ленинские горы,
119991 Москва, Россия
E-mail: `naumovne@gmail.com`

Поступило 17 февраля 2013 г.