Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2012 г.

М. А. Лифшиц

ЦИКЛИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАКСИМУМА СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ВЕЛИЧИН

§1. Введение и основные результаты

В недавней работе автора была доказана циклическая предельная теорема в иерархической схеме суммирования, которая может быть интерпретирована также и в терминах ветвящегося случайного блуждания. Оказалось, что для ветвящегося случайного блуждания с двумя потомками и симметричным бернуллиевским смещением частиц распределение положения экстремальной (максимальной или минимальной) частицы двигается, с ростом числа шагов, вдоль некоторой спирали в пространстве распределений. Если же принять во внимание сдвиги, то распределения положений экстремальных частиц вращаются вдоль замкнутой кривой. Более того, поскольку движение последовательности вдоль предельной спирали происходит с замедлением, то все точки спирали являются предельными точками при подходящих нормировках типа сдвига, и никакого единственного предельного распределения положения экстремальных статистик не имеют.

Циклический эффект в неявном виде и без указания геометрической интерпретации содержится также в теореме 1 классической работы Брамсона [1]. Преимущества его результата в том, что рассмотрен более общий механизм ветвления и аппроксимация производится п.н., а не по распределению.

В настоящей заметке показывается, как тот же самый эффект цикличности может быть достигнут при обычном суммировании: распределения максимума 2^n независимых копий суммы n независимых одинаково распределённых случайных величин с ростом n притягиваются к некоторой спирали распределений.

Ключевые слова: распределение максимума, суммы независимых случайных величин, большие уклонения, циклическая предельная теорема.

Работа поддержана грантами РФФИ 13-01-00172, 11-01-12104-офи_м, ФЦП 2010-1.1.-111-128-033 и грантом НИР СПбГУ 6.38.672.2013.

Пусть $(\xi_i)_{i\in\mathbf{N}}$ – *целые* н.о.р. случайные величины. Рассмотрим сумму $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, и пусть $S_n^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, – независимые копии S_n. Нас интересует поведение величин $M_n := \max_{j\leqslant 2^n} S_n^{(j)}$.

Относительно распределений исходных случайных величин мы будем предполагать, что

$$\mathbf{E}|\xi_1| < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\exp\{\gamma\xi_1\} < \infty,\ \forall\gamma > 0. \tag{1}$$

Пусть ω – верхняя граница распределения,

$$\omega := \sup\{m \in \mathbf{N} : \mathbf{P}(\xi_1 = m) > 0\}.$$

Предположим, что выполнено одно из двух следующих условий: либо

(i) $\omega = \infty$,

либо

(ii) $\omega < \infty$ и $\mathbf{P}(\xi_1 = \omega) < 1/2$.

Смысл этих условий раскрывается в следующей лемме о поведении кумулянты $L(\gamma) := \ln \mathbf{E}\exp\{\gamma\xi_1\}$.

Лемма 1. *Пусть выполнено* (1). *Тогда при условии* $\omega = \infty$ *верно*

$$\lim_{\gamma\to+\infty}[L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)] = -\infty,$$

а при условии $\omega < \infty$ *верно*

$$\lim_{\gamma\to+\infty}[L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)] = \ln \mathbf{P}(\xi_1 = \omega).$$

Поскольку кумулянта $L(\cdot)$ выпукла, то функция $L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)$ – убывающая. Кроме, того, она непрерывна и равна нулю при $\gamma = 0$. Если дополнительно предположить, что выполнено условие (1) и одно из условий (i) или (ii), то из леммы 1 следует, что

$$\lim_{\gamma\to+\infty}[L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)] < \ln(1/2).$$

Поэтому решение уравнения

$$L(\gamma) - \gamma L'(\gamma) = \ln(1/2) \tag{2}$$

на $(0, +\infty)$ существует. Обозначим его γ_* и положим $\rho_* := L'(\gamma_*)$. Заметим ещё, что при выполнении любого из условий (i) или (ii) распределение с.в. ξ_i невырождено (не сосредоточено в одной точке), а следовательно решение уравнения (2) единственно.

Теорема 2. *Предположим, что выполнено условие* (1) *и одно из условий* (*i*) *или* (*ii*). *Пусть* ρ_*, γ_* *определены уравнением* (2). *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{M_n < \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z\right\} = \exp\left\{-\frac{\exp\{-\gamma_* z\}(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}\sigma(\gamma_*)(1-e^{-\gamma_*})}\right\}, \quad (3)$$

где $\sigma(\cdot)^2 = L''(\cdot)$, *равномерно по*[1]

$$z \in I \bigcap \left[\mathbf{Z} - \rho_* n + \frac{\ln n}{2\gamma_*}\right]$$

для любого ограниченного интервала I.

Формулу (3) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\left\{M_n < m\right\} = \exp\left\{-\exp\{-\gamma_*(m-a_n)\}(1+o(1))\right\}, \qquad m \in \mathbf{Z}, \quad (4)$$

где

$$a_n := \rho_* n - \frac{\ln[\sqrt{2\pi n}\sigma(\gamma_*)(1-e^{-\gamma_*})]}{\gamma_*}\ .$$

Для каждого $a \in \mathbf{R}$ определим $\mathcal{F}^a$ – распределение на множестве целых чисел, задаваемое соотношением

$$\mathcal{F}^a((m,+\infty)) = \exp\left\{-\exp\{-\gamma_*(m-a)\}\right\}, \qquad m \in \mathbf{Z}.$$

Тогда $(\mathcal{F}^a)_{a\in\mathbf{R}}$ – кривая в пространстве распределений. Её естественно воспринимать как спираль, поскольку имеется 1-периодичность с точностью до сдвига: $\mathcal{F}^{a+1}\{m+1\} = \mathcal{F}^a\{m\}$. Соотношение (4) показывает, что распределение с.в. M_n равномерно аппроксимируется элементом $\mathcal{F}^{a_n}$ этой спирали, а после подходящего центрирования оно аппроксимируется элементом $\mathcal{F}^{[a_n]}$ витка спирали $(\mathcal{F}^a)_{0\leqslant a<1}$. При этом любое распределение вида $(\mathcal{F}^a)_{0\leqslant a<1}$ является пределом некоторой подпоследовательности центрированных распределений M_n.

Доказательство теоремы 2, которое приводится в следующем разделе, основано на одной теореме В. В. Петрова о больших уклонениях.

Разумеется, количество сумм 2^n может быть с очевидными изменениями в формулировках заменено на любую другую экспоненциально растущую последовательность.

[1]Иными словами, мы рассматриваем такие z, что выражение в левой части является целым числом.

В качестве примера рассмотрим бернуллиевский случай. Пусть $\xi_i = B_i$ – независимые случайные величины с несимметричным распределением Бернулли, т.е.

$$\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = -1) = p < 1/2.$$

Положим $q = 1 - p$ и определим коэффициент сноса ρ_* уравнением

$$2p^\rho q^{1-\rho} = \rho^\rho (1-\rho)^{1-\rho}. \tag{5}$$

Нам также потребуются две дополнительные константы

$$\kappa := \frac{p(1-\rho_*)}{q\rho_*} \in (0,1)$$

и $\beta := 2\pi\rho_*(1-\rho_*)$. Тогда результат теоремы 2 примет следующий вид.

Теорема 3. *Верно представление*

$$\mathbf{P}\left\{M_n < \rho_* n - \frac{\ln(\beta n)}{2|\ln\kappa|} + z\right\} = \exp\left\{-\frac{\kappa^z}{1-\kappa}\,(1+o(1))\right\}, \tag{6}$$

равномерно по

$$z \in I \bigcap \left[\mathbf{Z} - \rho_* n + \frac{\ln(\beta n)}{2|\ln\kappa|}\right]$$

для любого ограниченного интервала I.

Замечание. При $p \geqslant \frac{1}{2}$ ни одно из условий $(i), (ii)$ не выполнено. Уравнение (2) не имеет решений, так что теорема 2 неприменима.

§2. Доказательства

Доказательство леммы 1. 1) В силу выпуклости $L(\cdot)$ и равенства $L(0) = 0$ функция $\gamma \to \gamma L'(\gamma) - L(\gamma)$ будет возрастающей и неотрицательной. Поэтому существует неотрицательный предел

$$C := \lim_{\gamma\to+\infty}[\gamma L'(\gamma) - L(\gamma)].$$

Предположим, что $C < \infty$. Тогда для любого $\gamma > 0$ имеем

$$\gamma L'(\gamma) - L(\gamma) \leqslant C.$$

Интегрируя неравенство $\frac{L'(\gamma)}{L(\gamma)+C} \leqslant \frac{1}{\gamma}$, получим при $\gamma > 1$

$$\ln(L(\gamma)+C) - \ln(L(1)+C) \leqslant \ln\gamma,$$

откуда

$$L(\gamma) \leqslant (L(1)+C)\gamma - C. \tag{7}$$

С другой стороны, для любого $m \in \mathbf{N}$ имеем

$$L(\gamma) \geqslant \ln \mathbf{P}(\xi_1 = m) + \gamma m.$$

Поэтому условие $\omega = \infty$ и (7) несовместны. Следовательно, из $\omega = \infty$ следует $C = +\infty$.

2) Пусть выполнено $\omega < \infty$. Тогда без ограничения общности можно считать, что $\omega = 0$, поскольку при переходе от с.в. ξ к с.в. $\xi - \omega$ функция $L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)$ не меняется. Далее, имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\gamma \to +\infty} L(\gamma) &= \lim_{\gamma \to +\infty} \ln \left(\mathbf{P}(\xi_1 = 0) + \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_1 = -j) e^{-\gamma j} \right) \\ &= \ln \mathbf{P}(\xi_1 = 0). \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\gamma L'(\gamma) = -\gamma \left(\mathbf{E} e^{\gamma \xi_1} \right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{P}(\xi_1 = -j) j e^{-\gamma j},$$

откуда при $\gamma \to \infty$

$$|\gamma L'(\gamma)| \leqslant \gamma e^{-\gamma} \left(\mathbf{P}(\xi_1 = 0) \right)^{-1} \sum_{j=1}^{\infty} j e^{-\gamma (j-1)} \to 0.$$

Поэтому

$$\lim_{\gamma \to +\infty} [L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)] = \lim_{\gamma \to +\infty} L(\gamma) - \lim_{\gamma \to +\infty} \gamma L'(\gamma) = \ln \mathbf{P}(\xi_1 = 0).$$

□

Доказательство теоремы 2. Очевидно, что

$$\begin{aligned} \ln \mathbf{P} \left\{ M_n < \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z \right\} &= 2^n \ln \mathbf{P} \left\{ S_n < \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z \right\} \\ &= 2^n \ln \left(1 - \mathbf{P} \left\{ S_n \geqslant \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z \right\} \right) \\ &= -2^n \, \mathbf{P} \left\{ S_n \geqslant \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z \right\} (1 + o(1)). \end{aligned} \tag{8}$$

Последнюю вероятность больших уклонений оценим с помощью теоремы В.В. Петрова, см. [3] или дополнение 2 в [4, §4 гл. VIII]. Согласно

этой теореме,

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant nx\right\} = \frac{\exp(-n(\gamma x - L(\gamma)))}{\sqrt{2\pi L''(\gamma)n}\,(1-e^{-\gamma})}\,\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{9}$$

где γ – единственное решение уравнения $L'(\gamma) = x$.

В нашем случае

$$x = x_n := \rho_* - \frac{\ln n}{2\gamma_* n} + \frac{z}{n} \to \rho_*.$$

Поэтому знаменатель дроби (9) эквивалентен $\sqrt{2\pi L''(\gamma_*)n}\,(1-e^{-\gamma_*})$, где γ_* – решение уравнения $L'(\gamma) = \rho_*$, то есть (согласно определению ρ_*) то самое γ_*, которое фигурирует в утверждении доказываемой теоремы. Поэтому остаётся исследовать выражение

$$\begin{aligned}\mathcal{E} \quad &:= \quad \frac{\exp(-n(\gamma x - L(\gamma)))}{\sqrt{n}} := \exp(-n(\gamma_n x_n - L(\gamma_n)) - \tfrac{\ln n}{2}) \\ &= \quad \exp(-n(\gamma_n x_n \pm \gamma_*\rho_* - L(\gamma_n) \pm L(\gamma_*)) - \tfrac{\ln n}{2}). \end{aligned} \tag{10}$$

Разложения в ряд Тейлора дают

$$\begin{aligned}\gamma_n x_n - \gamma_*\rho_* &= \rho_*(\gamma_n - \gamma_*) + \gamma_*(x_n - \rho_*) + (\gamma_n - \gamma_*)(x_n - \rho_*) \\ &= \rho_*(\gamma_n - \gamma_*) + \gamma_*\left(\frac{z}{n} - \frac{\ln n}{2\gamma_* n}\right) + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right) \\ &= \rho_*(\gamma_n - \gamma_*) + \frac{\gamma_* z}{n} - \frac{\ln n}{2n} + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right); \\ L(\gamma_n) - L(\gamma_*) &= L'(\gamma_*)(\gamma_n - \gamma_*) + O\left((\gamma_n - \gamma_*)^2\right) \\ &= \rho_*(\gamma_n - \gamma_*) + O\left((x_n - \rho_*)^2\right) \\ &= \rho_*(\gamma_n - \gamma_*) + O\left(\frac{(\ln n)^2}{n^2}\right).\end{aligned}$$

Подставляя эти выражения в (10) и воспользовавшись уравнением (2), получим

$$\mathcal{E} = \exp(-\gamma_* z - n\gamma_*\rho_* + nL(\gamma_*))\ (1 + o(1)) = 2^{-n}\exp(-\gamma_* z)\ (1 + o(1)).$$

Собирая полученные оценки, найдём

$$\mathbf{P}\left\{S_n \geqslant \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z\right\} = 2^{-n}\,\frac{\exp(-\gamma_* z)}{\sqrt{2\pi L''(\gamma_*)}\,(1-e^{-\gamma_*})}\ (1 + o(1)).$$

По определению, $\sqrt{L''(\gamma_*)} = \sigma(\gamma_*)$. Подставляя полученное выражение в (8), получим искомое выражение (3). Равномерность оценки также следует из упомянутой выше теоремы В. В. Петрова. $\square$

Доказательство теоремы 3. Для распределения Бернулли имеем $L(\gamma) = \ln(pe^\gamma + q)$ и $\rho := L'(\gamma) = \frac{pe^\gamma}{pe^\gamma+q}$. Выражая γ через ρ, получим

$$e^\gamma = \tfrac{\rho q}{p(1-\rho)}. \tag{11}$$

Уравнение (2) для бернуллиевских величин примет вид

$$\ln(pe^\gamma + q) - \gamma\rho = -\ln 2.$$

Подставляя сюда выражения для γ и e^γ, получим

$$\ln\left(\frac{q}{1-\rho}\right) - \rho\ln\left(\frac{\rho q}{p(1-\rho)}\right) = -\ln 2$$

и приходим к уравнению (5). Далее, используя определение $\sigma(\cdot)$ и (11), находим

$$\begin{aligned}\sigma^2(\gamma) &= L''(\gamma) = \frac{d}{d\gamma}\,\frac{pe^\gamma}{pe^\gamma+q}\\ &= \frac{pqe^\gamma}{(pe^\gamma+q)^2} = \rho(1-\rho),\end{aligned}$$

откуда $\sigma(\gamma_*) = [\rho_*(1-\rho_*)]^{1/2}$.

Для произвольного z положим $z_1 := z - \frac{\ln\beta}{2|\ln\kappa|}$ и рассмотрим соответствующую границу для максимума из левой части (3). Поскольку из (11) следует

$$\gamma_* = \ln\left(\frac{\rho_* q}{p(1-\rho_*)}\right) = |\ln\kappa|,$$

имеем

$$\begin{aligned}\rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z_1 &= \rho_* n - \frac{\ln n}{2|\ln\kappa|} + z - \frac{\ln\beta}{2|\ln\kappa|}\\ &= \rho_* n - \frac{\ln(\beta n)}{2|\ln\kappa|} + z,\end{aligned}$$

то есть мы пришли к аналогичной границе из левой части (6).

Остаётся сравнить правые части (3) и (6). Действительно, мы имеем

$$\begin{aligned}\frac{\exp\{-\gamma_* z_1\}}{\sqrt{2\pi}\sigma(\gamma_*)(1-e^{-\gamma_*})} &= \frac{\kappa^{z_1}}{\sqrt{2\pi\rho_*(1-\rho_*)}(1-\kappa)} \\ &= \frac{\kappa^{z-\frac{\ln\beta}{2|\ln\kappa|}}}{\sqrt{\beta}(1-\kappa)} = \frac{\kappa^z\sqrt{\beta}}{\sqrt{\beta}(1-\kappa)} = \frac{\kappa^z}{1-\kappa}\,,\end{aligned}$$

так что правые части (3) и (6) совпадают и теорема 3 следует из теоремы 2. □

Литература

1. M. Bramson, *Minimal displacement of branching random walk.* — Z. Wahrsch. verw. Gebiete **45** (1978), 89–108.
2. М. А. Лифшиц, *Циклическое поведение максимума сумм независимых величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ, **408** (2012), 268–284.
3. В. В. Петров, *О вероятностях больших уклонений сумм независимых случайных величин.* — Теор. вероятн. и её примен. **10** (1965), 310–322.
4. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М. (1972).

Lifshits M. A. Cyclic behavior of the maximum of sums of independent random variables.

In a recent author's work the cyclic behavior of maxima in a hierarchical summation scheme was discovered. In the present note we show how the same phenomenon appears in the scheme of conventional summation: the distribution of maximum of 2^n independent copies of a sum of n i.i.d. random variables approaches, as n grows, some helix in the space of distributions.

С.-Петербургский
государственный университет,
С.-Петербург, Россия;
MAI, Linköping University
E-mail: lifts@mail.rcom.ru

Поступило 2 декабря 2012 г.