Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

М. С. Ермаков

ПРИНЦИП БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ УМЕРЕННЫХ УКЛОНЕНИЙ ЭМПИРИЧЕСКИХ БУТСТРАП-МЕР

§1. Введение

Принцип больших уклонений для эмпирической меры независимых случайных величин (см. [2, 4, 8, 10, 13, 15, 17, 24]) позволяет получить большое число результатов о вероятностях больших уклонений статистических функционалов. Принцип больших уклонений для вероятностей больших уклонений эмпирической бутстрап-меры изучался не в столь большом числе работ (см. [6] и [7]). Цель настоящей работы – доказать принцип больших уклонений для условных распределений умеренных уклонений эмпирических бутстрап-мер при условии, что эмпирические меры заданы, а также аналогичный принцип больших уклонений для совместного распределения эмпирической бутстрап-меры и эмпирической меры. Для простоты терминологии, следуя [2], мы будем называть эти принципы принципами умеренных уклонений, хотя по форме и содержанию они представляют собой обычные принципы больших уклонений. При этом принцип умеренных уклонений для условного распределения эмпирической бутстрап-меры при условии, что эмпирическая мера задана, будем называть условным принципом умеренных уклонений.

Для бутстрап-версии выборочного среднего почти наверное версия принципа больших уклонений была получена в [22]. В [6] такой результат был доказан для эмпирической бутстрап-меры в случае слабой топологии. В [9] и [28] изучалась точная асимптотика вероятностей умеренных уклонений бутстрап-версии выборочного среднего.

Интерес к данной проблематике вызван следующими причинами.

Условный принцип умеренных уклонений справедлив для гораздо более широких зон умеренных уклонений, чем принцип умеренных уклонений для эмпирических мер. Это показывает, что с высокой

Ключевые слова: принцип больших уклонений, умеренные уклонения, бутстрап, эмпирическая мера.

Работа поддержана грантом РФФИ 11-01-00769-а.

вероятностью для распределений дифференцируемых статистических функционалов, зависящих от эмпирической бутстрап-меры, нормальная аппроксимация действует в гораздо более широких зонах умеренных уклонений, чем такая же аппроксимация для статистических функционалов, зависящих от эмпирической меры.

В то же время принцип умеренных уклонений для совместного распределения эмпирической меры и эмпирической бутстрап-меры справедлив в гораздо более узкой зоне вероятностей умеренных уклонений, чем соответствующий принцип умеренных уклонений для эмпирической меры. Это показывает значительную неустойчивость бутстрап-процедур, когда эмпирическая мера находится в зоне вероятностей умеренных уклонений.

В [15] и [16] было показано, что техника дифференцирования в функциональных пространствах позволяет выводить из принципа умеренных уклонений для эмпирических мер и эмпирических процессов аналогичные принципы умеренных уклонений для дифференцируемых статистических функционалов. В частности, в [16] было показано, что эта техника работает в той же мере, в какой она работает для доказательства асимптотической нормальности [27]. В [16] рассматривался случай функционалов, зависящих от эмпирических функций распределения. Цель настоящей работы — получить аналогичные результаты для функционалов, зависящих от эмпирических бутстрап-мер.

Обозначим

— S – топологическое пространство Хаусдорфа;

— $\mathcal{F}$ – σ-алгебру борелевских множеств на S;

— Λ – пространство всех вероятностных мер на $(S, \mathcal{F})$.

Пусть $X_1, \ldots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, принимающие значения в S и имеющие вероятностную меру $\mathbf{P} \in \Lambda$.

Обозначим $\widehat{\mathbf{P}}_n$ эмпирическую меру $X_1, \ldots, X_n$.

В 1979 году в основополагающей работе [12] было предложено изучать распределения статистик $V(X_1, \ldots, X_n)$ на основе бутстрапа. В бутстрапе мы рассматриваем эмпирическую меру $\widehat{\mathbf{P}}_n$ в качестве оценки вероятностной меры $\mathbf{P}$ и оцениваем распределение статистики $V(X_1, \ldots, X_n)$ на основе вероятностной меры $\widehat{\mathbf{P}}_n$. Другими словами, мы моделируем n независимых случайных величин $(X_{1i}^*, \ldots, X_{ni}^*)_{i \in [1,k]}$,

распределенных в соответствии с вероятностной мерой $\widehat{\mathbf{P}}_n$. После этого эмпирическое распределение $(V(X_{1i}^*, \ldots, X_{ni}^*))_{i\in[1,k]}$ рассматривается как оценка распределения $V(X_1, \ldots, X_n)$.

В статистических приложениях большой интерес представляет изучение вероятностей больших и умеренных уклонений статистик $V(X_1, \ldots, X_n)$. Такие задачи постоянно возникают в доверительном оценивании и проверке гипотез. Уровень значимости в доверительном оценивании и вероятности ошибок первого рода в проверке гипотез обычно малы и с этой точки зрения естественно анализировать их на основе техники вероятностей больших и умеренных уклонений.

Исследование вероятностей умеренных уклонений статистик $V(X_1, \ldots, X_n)$ проводится в следующей постановке задачи.

Мы используем задание статистик $V(X_1, \ldots, X_n)$ и $V(X_1^*, \ldots, X_n^*)$ в виде функционалов, зависящих от $\widehat{\mathbf{P}}_n$ и $\mathbf{P}_n^*$ соответственно. Здесь $\mathbf{P}_n^*$ – эмпирическая мера $X_1^*, \ldots, X_n^*$, называемая эмпирической бутстрап-мерой. Иначе говоря, мы задаем их в виде

$$V(X_1, \ldots, X_n) = T(\widehat{\mathbf{P}}_n),$$
$$V(X_1^*, \ldots, X_n^*) = T(\mathbf{P}_n^*)$$

Таким образом, мы сводим задачу к изучению вероятностей умеренных уклонений $T(\mathbf{P}_n^*) - T(\widehat{\mathbf{P}}_n)$.

Работа организована следующим образом.

В разделе 2 сформулированы два варианта принципа умеренных уклонений для условных распределений эмпирических бутстрап-мер при условии, что эмпирические меры фиксированы. Первый вариант (теорема 2.1) содержит принцип умеренных уклонений, доказанный с вероятностью единица. Во втором варианте (теорема 2.2) дана оценка скорости сходимости. Результаты доказаны в терминах τ_Θ-топологии, позволяющей изучать вероятности больших уклонений широкого класса неограниченных статистических функционалов.

В разделе 3 приведен принцип умеренных уклонений для совместного распределения эмпирической меры и эмпирической бутстрап-меры. Дан пример, показывающий, что топология слабой сходимости в этой теореме не может быть значительно усилена. Для сравнения приведен и принцип умеренных уклонений для эмпирической меры.

В разделе 4 принципы умеренных уклонений применяются для получения результатов о вероятностях умеренных уклонений статистических функционалов, зависящих от эмпирической бутстрап-меры. На

основе принципа сжатия (contraction principle [10]) получены теоремы, переносящие принципы умеренных уклонений для эмпирической бутстрап-меры на задачи о вероятностях умеренных уклонений статистических функционалов, дифференцируемых по Адамару. Предложенная методология работает практически для всех задач, для которых удается доказать асимптотическую нормальность распределений статистических функционалов, дифференцируемых по Адамару (см. [25, 27]). Это прекрасно показано в [16], где она применяется для всех классов статистических функционалов, рассмотренных в [27]. Чтобы продемонстрировать, что эта методология (см. [25, 27]) совершенно идентично работает и в случае эмпирических бутстрап-мер, мы устанавливаем принципы умеренных уклонений для эмпирического бутстрап-квантильного процесса и эмпирической бутстрап-копула-функции. Условные принципы умеренных уклонений для дифференцируемых статистических функционалов, зависящих от эмпирических бутстрап-мер, доказаны в более широких зонах вероятностей умеренных уклонений, чем соответствующие результаты для фунционалов, зависящих от эмпирического процесса [16].

Вероятности умеренных уклонений статистик изучались в широком круге публикаций (см. [1, 3, 19, 20], а также библиографию в этих публикациях). Однако только в последнее время эта задача стала изучаться с точки зрения свойства дифференцируемости функционалов [15, 16].

В разделах 5, 6 и 7 даны доказательства теорем раздела 2 и 3 соответственно.

Условимся обозначать:

– $\mathbf{Q} << \mathbf{P}$, если $\mathbf{Q} \in \Lambda$ абсолютно непрерывна относительно $\mathbf{P} \in \Lambda$;

– $\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_1$ – декартово произведение вероятностных мер $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_1 \in \Lambda$;

– $\Lambda^2 = \Lambda \times \Lambda$ обозначает множество всех мер $\mathbf{Q}_2 \times \mathbf{Q}_1$ для $\mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_1 \in \Lambda$;

– C, c – положительные постоянные;

– $\chi(A)$ – индикатор события A;

– $\int$ всегда обозначает $\int\limits_S$.

§2. Условный принцип умеренных уклонений для эмпирической бутстрап-меры

2.1. τ_Σ-топологии. Пусть Σ – некоторое множество функций $f : S \to R^1$, таких что $\mathbf{E}\,[|f(X)|] < \infty$.

Обозначим

$$\Lambda_\Sigma = \left\{ \mathbf{P} \in \Lambda : \int |f(X)| d\mathbf{P} < \infty, \quad f \in \Sigma \right\}.$$

Топология слабой сходимости в Λ_Σ, порожденная отображениями

$$\mathbf{Q} \Rightarrow \int f\, d\mathbf{Q} \quad \text{для всех} \quad f \in \Sigma,\ \mathbf{Q} \in \Lambda_\Sigma,$$

известна как τ_Σ-топология (в дальнейшем, все топологические свойства будут рассматриваться относительно τ_Σ-топологии). Обозначим σ_Σ наименьшую σ-алгебру, в которой все приведенные выше линейные отображения измеримы. Для произвольного множества $\Omega \subset \Lambda_\Sigma$ обозначим $\mathfrak{cl}(\Omega)$ и $\mathfrak{int}(\Omega)$ замыкание и внутренность множества Ω соответственно.

Для множества $\Sigma = \Theta_0$ – всех вещественных ограниченных функций τ_{Θ_0}-топология совпадает с τ-топологией (см. [10, 13, 17]). Для $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Lambda$ и $\mathbf{P}, \mathbf{Q} \in \Lambda_\Sigma$ соответственно определим множества Λ_0 и $\Lambda_{0\Sigma}$ всех разностей $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$. В $\Lambda_{0\Sigma}$ τ_Σ-топология определяется стандартным образом, так же как $\mathfrak{cl}(\overline{\Omega}_0)$ и $\mathfrak{int}(\overline{\Omega}_0)$, являющиеся замыканием и внутренностью $\Omega_0 \subset \Lambda_{0\Sigma}$.

2.2. Функционал действия. Для $\mathbf{G} \in \Lambda_0$, функционал действия равен

$$\rho_0^2(\mathbf{G}, \mathbf{P}) = \begin{cases} \frac{1}{2} \int \left(\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{P}}\right)^2 d\mathbf{P}, & \mathbf{G} \ll \mathbf{P}, \\ \infty, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что функционалы действия ρ_0^2 возникают стандартным образом в задачах о вероятностях умеренных уклонений (см. [2, 4, 15] и [16]). В статистических приложениях такой функционал действия допускает естественную интерпретацию в качестве информационного количества Фишера.

Для множества $\Omega_0 \subset \Lambda_0$ обозначим

$$\rho_0^2(\Omega_0, \mathbf{P}) = \inf\{\rho_0^2(\mathbf{G}, \mathbf{P}), \mathbf{G} \in \Omega_0\}.$$

2.3. Внешняя и внутренняя вероятности. Статистические функционалы (см. [8, 16, 21]) часто не являются измеримыми. Поэтому результаты будут даны в терминах внутренних и внешних вероятностей. Пусть $(\Upsilon, \mathrm{Im}, \mathbf{P})$ является вероятностным пространством. Внешняя вероятностью множества $B \subset \Upsilon$ равна

$$(\mathbf{P})^*(B) = \inf\{\mathbf{P}(A); B \subseteq A, A \in \sigma_{\Lambda_{0\Sigma}}\},$$

а его внутренняя вероятность равна $(\mathbf{P})_*(B) = 1 - (\mathbf{P})^*(\Lambda_{0\Sigma} \setminus B)$.

Для последовательности случайных величин $Z_n : \Upsilon \to R^1$ (Z_n – не обязательно измеримы) скажем, что $\liminf_{n\to\infty} Z_n \geqslant c$ внутренне почти наверное ($a.s_*$), если существует измеримая случайная величина Δ_n, такая что $\Delta_n \leqslant Z_n$ и $\mathbf{P}(\liminf\limits_{n\to\infty} \Delta_n \geqslant c) = 1$.

Скажем что $\limsup\limits_{n\to\infty} Z_n \leqslant c$ внешне почти наверное ($a.s^*.$) если $\liminf\limits_{n\to\infty} -Z_n \geqslant -c$ $a.s_*$.

Скажем что $\limsup\limits_{n\to\infty} Z_n = -\infty$ внешне почти наверное ($a.s^*.$) если $\liminf\limits_{n\to\infty} -Z_n \geqslant -c$ $a.s_*$ для любого $c > 0$.

2.4. Принцип умеренных уклонений для условных распределений эмпирических бутстрап-мер. Теорема 2.1, приведенная ниже, показывает, что принцип больших уклонений имеет место почти наверное для условного распределения эмпирической бутстрап-меры при условии, что известна эмпирическая мера выборки. В этой постановке объему $k = k_n$ бутстрап-выборки разрешается принимать значения отличные от n.

Результаты будут даны в терминах τ_Θ-топологий.

Для всех $t > 2$ определим множество $\Theta = \Theta_t$ вещественных функций $f : S \to R^1$, таких что $\mathbf{E}\left[|f(X)|^t\right] < \infty$.

Для убывающей функции $h : R^1_+ \to R^1_+$ определим множество $\Theta = \Theta_{t,h}$, $t \geqslant 2$, вещественных функций f, таких что

$$\mathbf{P}(|f(X)| > s^{-1}) < h(s), \quad s > 0 \tag{2.1}$$

и

$$\mathbf{E}\left[|f(X)|^t\right] < \infty. \tag{2.2}$$

Пусть $X_1^*, \ldots, X_{k_n}^*$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, имеющие вероятностную меру $\widehat{\mathbf{P}}_n$. Обозначим $\mathbf{P}_{k_n}^*$ эмпирическую меру $X_1^*, \ldots, X_{k_n}^*$. Предположим, что $\frac{k_n}{n} < c < \infty$ и $k_n \to \infty$ при $n \to \infty$.

Теорема 2.1. *Пусть $a_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $a_n \to 0$, $a_{n+1}/a_n \to 1$, $k_n a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть*

$$\sum_{n=1}^{\infty} h(ca_n) < \infty \tag{2.3}$$

для любого $c > 0$. Пусть $\Omega_0 \subset \Lambda_{0\Theta_{2,h}}$. Тогда

$$\liminf_{n\to\infty} (k_n a_n^2)^{-1} \ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n\Omega_0) \geqslant -\rho_0^2(\mathfrak{int}(\Omega_0), \mathbf{P}) \quad a.\, s_* \tag{2.4}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} (k_n a_n^2)^{-1} \ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n\Omega_0) \leqslant -\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P}) \quad a.\, s^*, \tag{2.5}$$

где замыкание и внутренность множества Ω_0 в (2.4) и (2.5) рассматриваются относительно $\tau_{\Theta_{2,h}}$-топологии. Внешняя вероятностная мера $(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*$ и внутренняя вероятностная мера $(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*$ рассматриваются относительно $\sigma_{\Theta_{2,h}}$-алгебры.

Пусть $\Omega_0 \subset \Lambda_{0\Theta_t}$, $t > 2$ и пусть $a_n = o(n^{-1/t})$. Тогда (2.4) и (2.5) имеют место для $\mathfrak{int}(\Omega_0)$ и $\mathfrak{cl}(\Omega_0)$ рассматриваемых относительно τ_{Θ_t}-топологии. Внешняя вероятностная мера $(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*$ и внутренняя вероятностная меры $(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*$ рассматриваются относительно σ_{Θ_t}-алгебры.

2.5. Оценка скорости сходимости в условном принципе умеренных уклонений.

Теорема 2.2. *Пусть $a_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $a_n \to 0$, $a_{n+1}/a_n \to 1$, $k_n a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть функция $h : R^1_+ \to R^1_+$ удовлетворяет*

$$\lim_{n\to\infty} nh\left(\frac{a_n}{c}\right) = 0 \tag{2.6}$$

при любом $c > 0$. Пусть $\Omega_0 \subset \Lambda_{0\Theta_{t,h}}$, $t > 2$. Тогда для любых

$$\epsilon > 0 \quad и \quad n > n_0(\epsilon, \{k_i\}_{i=1}^{\infty}, \Omega_0)$$

имеет место

$$(k_n a_n^2)^{-1} \log(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n\Omega_0) \geqslant -\rho_0^2(\mathfrak{int}(\Omega_0), \mathbf{P}) - \epsilon \tag{2.7}$$

и, если $\rho_0^2(\mathfrak{cl}_{\Theta_{t,h}}(\Omega_0), \mathbf{P}) < \infty$ дополнительно, то

$$(k_n a_n^2)^{-1} \log(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n\Omega_0) \leqslant -\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P}) + \epsilon \tag{2.8}$$

на множестве событий, имеющем внутреннюю вероятность больше, чем $\kappa_n = \kappa_n(\epsilon, \Omega_0) = 1 - C(\epsilon, \Omega_0)[\beta_{1n} + \beta_{2n}]$, *где* $\beta_{1n} = nh(\frac{a_n}{\epsilon C_1(\epsilon, \Omega_0)})$ *и* $\beta_{2n} = C_2(\epsilon, \Omega_0) n^{1-t/2}$.

Если $\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P}) = \infty$, *то для любого* $L > 0$

$$(k_n a_n^2)^{-1} \log(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n \Omega_0) \leqslant -L \tag{2.9}$$

на множестве событий, имеющем внутреннюю вероятность больше, чем $\kappa_{1n} = \kappa_{1n}(L, \Omega_0) = 1 - C(L, \Omega_0)[\beta_{1n} + \beta_{2n}]$, *где* $\beta_{1n} = nh(\frac{a_n}{C_1(L, \Omega_0)})$ *и* $\beta_{2n} = C_2(L, \Omega_0) n^{1-t/2}$.

§3. Принцип умеренных уклонений для совместного распределения эмпирической меры и эмпирической бутстрап-меры

В данном разделе будет доказан принцип умеренных уклонений для совместного распределения $(\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) \times (\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P})$. При этом мы предполагаем, что $k_n/n \to \nu$ при $n \to \infty$.

3.1. Основные понятия. Зададим последовательность положительных чисел b_n, таких что

$$\left.\begin{array}{ll} b_n & \to 0 \\ nb_n^2 & \to \infty \\ \frac{b_n}{b_{n+1}} & \to 1 \end{array}\right\} \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Результаты будут даны в терминах τ_Φ-топологии, где Φ – множество измеримых функций, таких что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{nb_n^2} \log(n\mathbf{P}(|f(X)| > b_n^{-1})) = -\infty. \tag{3.1}$$

Зададим τ_Φ-топологию на Λ^2_Φ и $\Lambda^2_{0\Phi}$ как соответствующее произведение τ_Φ-топологий.

Асимптотика вероятностей умеренных уклонений будет задаваться следующим функционалом действия ρ^2_{0b}. Для любого $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1 \in \Lambda^2_0$ определим функционал действия

$$\rho^2_{0b}(\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{P}) = \nu\, \rho^2_0(\mathbf{G}_2, \mathbf{P}) + \rho^2_0(\mathbf{G}_1, \mathbf{P}).$$

Для любого множества $\overline{\Omega}_0 \subset \Lambda^2_{0\Phi}$ обозначим

$$\rho^2_{0b}(\overline{\Omega}_0, \mathbf{P}) = \inf\{\, \rho^2_{0b}(\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{P}) \,:\, \overline{\mathbf{G}} \in \overline{\Omega}_0 \,\}.$$

Для любого множества $A \in \mathcal{F}$ и любой знакопеременной меры $\mathbf{G} \in \Lambda_0$ обозначим $|\mathbf{G}|(A) = \sup\{\mathbf{G}(B) - \mathbf{G}(D) : B \subseteq A, D \subseteq A\}$.

Зафиксируем знакопеременные меры $H, H_n \in \Lambda_{0\Phi}$ удовлетворяющие следующим предположениям.

A. Имеет место

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{P} + b_n H_n \in \Lambda_\Phi, \quad \mathbf{P} + b_n H \in \Lambda_\Phi$$

и $H_n \to H$ при $n \to \infty$ в τ_Φ-топологии.

B1. Для любого $f \in \Phi$

$$\limsup_{n\to\infty} \sup_m (nb_n^2)^{-1} \log\left(nb_n \int \chi(|f(x)| > b_n^{-1})\, d|H_m|\right) = -\infty.$$

Определим знакопеременную меру $\mathbf{O} \in \Lambda_{0\Phi}$, такую что $\mathbf{O}(A) = 0$ для любого множества $A \in \mathrm{Im}$. Для всех $\mathbf{G} \in \Lambda_{0\Phi}$ обозначим $\widetilde{\mathbf{G}} = \mathbf{O} \times \mathbf{G}$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* A *и* B1. *Пусть* $\overline{\Omega}_0 \subset \Lambda^2_{0\Phi}$ *является* σ_Φ*-измеримым множеством* $\Lambda^2_{0\Phi}$. *Тогда имеет место принцип умеренных уклонений*

$$\liminf_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}_n((\mathbf{P}_n^* - \widehat{\mathbf{P}}_n) \times (\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_0) \in b_n\overline{\Omega}_0) \geqslant -\rho^2_{0b}(\mathfrak{int}(\overline{\Omega}_0 - \widetilde{H}), \mathbf{P})$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}_n((\mathbf{P}_n^* - \widehat{\mathbf{P}}_n) \times (\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}) \in b_n\overline{\Omega}_0) \leqslant -\rho^2_{0b}(\mathfrak{cl}(\overline{\Omega}_0 - \widetilde{H}), \mathbf{P}).$$

В [5] был доказан принцип больших уклонений [11], когда распределения $\mathbf{P}_n$ слабо сходятся и удовлетворены условия равномерно экспоненциального интегрирования. Теорема 3.1 и последующие результаты могут рассматриваться как некоторые аналоги этого принципа [5].

Замечание 2.1. В задачах проверки гипотез вероятности ошибок второго рода часто рассматриваются для альтернатив $\mathbf{P}_n$, приближающихся к гипотезе $\mathbf{P}$. Теорема 3.1 позволяет изучать вероятности умеренных уклонений в этой постановке. Доказательство эффективности процедур существенной выборки в зоне вероятностей умеренных уклонений также базируется на принципе умеренных уклонений для последовательности вероятностных мер $\mathbf{P}_n$, сходящихся к вероятностной мере $\mathbf{P}$ (см. [15]). Естественно, если предположить, что H_n,

H отсутствуют, мы получим обычную форму принципа умеренных уклонений.

Современная форма принципа больших уклонений (см. [8, 16, 21]) охватывает случай неизмеримых множеств $\overline{\Omega}_0$ и дается в терминах внешних и внутренних вероятностей (см. теоремы 2.2 и 2.1). Теорема 3.1 также может быть дана в этой постановке без каких либо существенных изменений в доказательстве. Мы не привели ее в такой форме, только чтобы не загромождать обозначения.

Теорема 3.2, приводимая ниже, показывает, что зоны вероятностей умеренных уклонений, задаваемые теоремой 3.1, не могут быть существенно расширены.

Теорема 3.2. *Пусть случайные величины $Y = |f(X)|$ удовлетворяют* (3.1). *Пусть последовательности r_n и e_n, такие что $b_n^{-1} < r_n$, $b_n^{-1}e_n \to \infty$, $ne_n/r_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и*

$$\lim_{n\to\infty} (ne_n^2)^{-1} \log\left(n\mathbf{P}\left(Y > r_n\right)\right) = 0, \tag{3.2}$$

$$\lim_{n\to\infty} (r_n e_n)^{-1} \log \frac{ne_n}{r_n} = 0. \tag{3.3}$$

Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые копии Y и пусть $Y_1^*, \ldots, Y_n^*$ получены из $Y_1, \ldots, Y_n$ на основе бутстрапа. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} (ne_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^* > ne_n\right) = 0.$$

Доказательство теоремы 3.2 дано в разделе 7.

Пример. Пусть $\mathbf{P}(Y > t) = \exp\{-t^\gamma\}$, $0 < \gamma < 1$. Тогда $b_n = o(n^{-\frac{1}{2+\gamma}})$. Непосредственными вычислениями проверяется, что (3.2), (3.3) имеет место для любой последовательности $r_n = n^{\frac{1}{2+\gamma}} f_n$, $e_n = n^{-\frac{1}{2+\gamma}} f_n^{\frac{\gamma}{2}-\delta}$, где $(\log n)^{\frac{1}{1+\frac{\gamma}{2}-\delta}} << f_n << n^{\frac{\gamma}{(2+\gamma)(1+\delta)}}$ и $0 < \delta < \frac{\gamma}{2}$. Таким образом, зона вероятностей умеренных уклонений теоремы 3.1 не может быть существенно расширена для такой асимптотики $\mathbf{P}(Y > t)$.

3.2. Принцип умеренных уклонений для эмпирической меры. Теорема 3.3, приводимая ниже, является аналогом принципа умеренных уклонений, доказанного в [2] для эмпирического процесса. В данном виде она была доказана в [15] и приводится здесь для сравнения с результатами по бутстрапу.

Определим множество Ψ измеримых функций $f : S \to R^1$, таких что

$$\lim_{n\to\infty} (nd_n^2)^{-1} \log(n\mathbf{P}(|f(X)| > nd_n)) = -\infty, \tag{3.4}$$

где $d_n \to 0$, $nd_n^2 \to \infty$, $d_{n+1}/d_n \to 1$ при $n \to \infty$.

Сделаем следующие предположения:

B2. Для любого $f \in \Psi$, имеет место

$$\lim_{n\to\infty} (nd_n^2)^{-1} \sup_m \log\left(nd_n \int \chi(|f(x)| > nd_n)\, d|H_m|\right) = -\infty.$$

Используя рассуждения леммы 2.5 в [14], получаем, что B1 или B2 означает, что

$$\sup_m \int f^2 d|H_m| < \infty \tag{3.5}$$

и (3.1) или (3.4) означает

$$\int f^2 d\mathbf{P} < \infty. \tag{3.6}$$

В лемме 2.5 в [14] (3.6) было доказано, если d_n убывает и $n^{1/2}d_n$ возрастает. Так как $d_n/d_{n-1} \to 1$ при $n \to \infty$, то мы можем выбрать подпоследовательность d_{n_k}, такую что $n_k^{1/2}d_{n_k}$ возрастает и $d_{n_k}/d_{n_{k-1}} \to 1$ при $k \to \infty$. После этого мы можем выбрать подпоследовательность $d_{n_{k_i}}$, такую что $d_{n_{k_i}}$ убывает и $d_{n_{k_i}}/d_{n_{k_{i-1}}} \to 1$ при $i \to \infty$. Применяя к подпоследовательности $d_{n_{k_i}}$ те же самые рассуждения, что и при доказательстве леммы 2.5 в [14], получаем (3.6) без предположений монотонности последовательностей d_n и $n^{1/2}d_n$.

Теорема 3.3. *Пусть выполнено условие* A *для* $\Phi = \Psi$ *и условие* B2. *Пусть множество* Ω_0 *является* σ_Ψ*-измеримым подмножеством* $\Lambda_{0\Psi}$. *Тогда справедлив принцип умеренных уклонений*

$$\liminf_{n\to\infty} (nd_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P} + d_n\Omega_0) \geqslant -\rho_0^2(\mathfrak{int}(\Omega_0 - H), \mathbf{P}_0)$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} (nd_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}_n(\widehat{\mathbf{P}}_n \in \mathbf{P} + d_n\Omega_0) \leqslant -\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0 - H), \mathbf{P}_0)$$

Пример. Пусть $\mathbf{E}\left[\exp\{c|f(X_1)|^\gamma\}\right] < \infty$, где $\gamma > 0$ для всех $f \in \Theta$. Тогда имеют место следующие асимптотики:

$$b_n = o\left(n^{-\frac{1}{1+\gamma}}\right), \quad d_n = o\left(n^{-\frac{1-\gamma}{2-\gamma}}\right) \quad \text{и} \quad a_n = o\left(|\log n|^{-\gamma}\right).$$

Таким образом, условный принцип умеренных уклонений справедлив в гораздо более широкой зоне, чем принцип умеренных уклонений для эмпирической меры.

§4. Вероятности умеренных уклонений статистических функционалов

В [16] было показано, что методология дифференцируемости по Адамару, позволяющая доказать асимптотическую нормальность широких классов статистических функционалов (см. [25], [27, гл. 3.9]), может быть полностью перенесена для доказательства для них принципа умеренных уклонений. Это техника позволила получить в [16] новые результаты о вероятностях умеренных уклонений ранговых статистик, L и M оценок, оценки Каплана–Мейера, оценок функции интенсивности отказов, эмпирического квантильного процесса и эмпирической копула-функции. В [16] рассматривались статистические функционалы, зависящие от эмпирического процесса. В приведенных ниже теоремах 4.1–4.4 мы показываем, что техника дифференцируемости по Адамару в той же мере применима и к статистическим функционалам, зависящим от эмпирической меры или эмпирической бутстрап-меры.

4.1. Функционалы, имеющие производную по Адамару. Для всех $r > 0$ определим множество $\Gamma_{0r} = \{\mathbf{G} : \rho_0^2(\mathbf{G}, \mathbf{P}) < r, \mathbf{G} \in \Lambda_0\}$. Как будет следовать из доказательства леммы 5.1, множество Γ_{0r} является компактным и секвенциально компактным в τ_Σ-топологии для $\Sigma = \Theta, \Phi, \Psi$.

Пусть Y – линейное метрическое пространство с метрикой ρ. Скажем, что функционал $T : \Lambda_{0\Sigma} \to Y$ имеет производную по Адамару $T' : \Lambda_{0\Sigma} \to Y$, если выполнено следующее условие.

$\mathbf{C}_\Sigma$. Для любого $r > 0$ для каждого $\mathbf{G} \in \Gamma_{0r}$ и любой последовательности $\mathbf{G}_k \in \Gamma_{0r}$, сходящейся к $\mathbf{G}$ в τ_Σ-топологии, имеет место

$$\limsup_{n\to\infty} \rho(u_k^{-1}(T(\mathbf{P} + u_k\mathbf{G}_k) - T(\mathbf{P}_0)) - T'(\mathbf{G}), 0) = 0 \qquad (4.1)$$

для всех последовательностей $u_k \to 0$ при $k \to \infty$, таких что $u_k > 0$, $1 \leqslant k < \infty$.

Теорема 4.1. *Пусть $a_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $a_n \to 0$, $a_{n+1}/a_n \to 1$, $k_n a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть убывающая функция $h : R_+^1 \to R_+^1$ удовлетворяет (2.3). Пусть функционал $T(\mathbf{P})$ непрерывен в $\tau_{\Theta_{2,h}}$-топологии и пусть $C_{\Theta_{2,h}}$ выполнено.*

Тогда, для любого множества $\Omega \subset Y$, имеет место

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}(k_n a_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*(T(\mathbf{P}^*_{k_n}) - T(\widehat{\mathbf{P}}_n) \in a_n\Omega)\\ &\geqslant -\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{int}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda_0\} \quad a.\,s_*\end{aligned} \tag{4.2}$$

и

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}(k_n a_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(T(\mathbf{P}^*_{k_n}) - T(\widehat{\mathbf{P}}_n) \in a_n\Omega)\\ &\leqslant -\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{cl}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda_0\} \quad a.\,s^*.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Если $T'(\mathbf{G})$ непрерывен в $\tau_{\Theta_{2,h}}$-топологии и если

$$\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{cl}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda_0\} < \infty,$$

то для любого $\delta > 0$ имеет место

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}(k_n a_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\rho(a_n^{-1}(T(\mathbf{P}^*_n)\\ &- T(\widehat{\mathbf{P}}_n)) - T'(\mathbf{P}^*_n - \widehat{\mathbf{P}}_n), 0) > \delta) = -\infty \quad a.s^*.\end{aligned} \tag{4.4}$$

Пусть функционал $T(\mathbf{P})$ непрерывен в τ_{Θ_t}-топологии, $t > 2$ и пусть C_{Θ_t} имеет место. Пусть $\Omega \subset Y$ и пусть $a_n = o(n^{-1/t})$. Тогда (4.2) и (4.3) выполнены соответственно для $\mathfrak{int}(\Omega)$ и $\mathfrak{cl}(\Omega)$, рассматриваемых относительно τ_{Θ_t}-топологии.

Теорема 4.2. *Пусть $a_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $a_n \to 0$, $a_{n+1}/a_n \to 1$, $k_n a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть убывающая функция $h : R_+^1 \to R_+^1$ удовлетворяет (2.6). Пусть функционал $T(\mathbf{P})$ непрерывен $\tau_{\Theta_{t,h}}$-топологии и пусть $C_{\Theta_{t,h}}$ имеет место для $t > 2$.*

Пусть $\Omega \subset Y$. Тогда для любого $\epsilon > 0$ и $n > n_0(\epsilon, \{k_i\}_{i=1}^\infty, \Omega, T)$ имеет место

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}(k_n a_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*(T(\mathbf{P}^*_{k_n}) - T(\widehat{\mathbf{P}}_n) \in a_n\Omega)\\ &\geqslant -\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{int}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda\} - \epsilon\end{aligned}$$

и, если $\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{cl}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda_0\} < \infty$ дополнительно, то

$$\limsup_{n\to\infty}(k_n a_n^2)\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*(T(\mathbf{P}^*_{k_n})-T(\widehat{\mathbf{P}}_n)\in a_n\Omega)$$
$$\leqslant -\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0):T'(\mathbf{G})\in\mathfrak{cl}(\Omega),\mathbf{G}\in\Lambda_0\}+\epsilon$$

на множестве событий, имеющих внутреннюю вероятность больше, чем $\kappa_n=\kappa_n(\epsilon,\Omega,T)=1-C(\epsilon,\Omega)[\beta_{1n}+\beta_{2n}]$, *где* $\beta_{1n}=nh(\frac{a_n}{\epsilon C_1(\epsilon,\Omega,T)})$ *и* $\beta_{2n}=C_2(\epsilon,\Omega,T)n^{1-t/2}$.

Если $T'(\mathbf{G})$ *непрерывен в* $\tau_{\Theta_{th}}$*-топологии и если* $\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P}_0):T'(\mathbf{G})\in\mathfrak{cl}(\Omega),\mathbf{G}\in\Lambda_0\}<\infty$, *то для любого* $\delta>0$ *и любого* $L>0$ *найдется* $n_0=n_0(L,\delta,\{k_i\}_{i=1}^{\infty},T)$, *такое что для всех* $n>n_0$ *имеет место*

$$\limsup_{n\to\infty}(k_n a_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\rho(a_n^{-1}(T(\mathbf{P}^*_n)-T(\widehat{\mathbf{P}}_n))-T'(\mathbf{P}^*_n-\widehat{\mathbf{P}}_n),0)>\delta)<-L$$

на множестве событий, имеющих внутреннюю вероятность больше, чем $\overline{\kappa}_n=\overline{\kappa}_n(L,\delta)=1-C(L,\delta)[\overline{\beta}_{1n}+\overline{\beta}_{2n}]$, *где* $\overline{\beta}_{1n}=nh\left(\frac{a_n}{C_1(L,\delta,T)}\right)$ *и* $\overline{\beta}_{2n}=C_2(L,\delta,T)n^{1-t/2}$.

Теорема 4.3. *Пусть выполнены условия* A, B1, C_Φ. *Пусть дана последовательность* $b_n>0$, *такая что* $b_n\to 0$, $b_{n+1}/b_n\to 1$, $nb_n^2\to\infty$ *при* $n\to\infty$. *Пусть функционалы* $T_2(\mathbf{P})$ *и* $T_1(\mathbf{P})$ *непрерывны в* τ_Φ*-топологии и удовлетворяют условию* C_Φ *для* $T=T_2$ *и* $T=T_1$. *Тогда для любого множества* $\overline{\Omega}\subset Y\times Y$ *имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\ln(\mathbf{P}_n)_*((T_2(\mathbf{P}^*_n)-T_2(\widehat{\mathbf{P}}_n),T_1(\widehat{\mathbf{P}}_n)-T_1(\mathbf{P}_n))\in b_n\overline{\Omega})$$
$$\geqslant -\inf\{\rho_{0b}^2(\overline{\mathbf{G}},\mathbf{P}_0):(T_2'(\mathbf{G}_2),T_1'(\mathbf{G}_1))\in\mathfrak{int}(\overline{\Omega}),$$
$$\overline{\mathbf{G}}=\mathbf{G}_2\times\mathbf{G}_1\in\Lambda_0^2\}\quad(4.5)$$

и

$$\limsup_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\ln(\mathbf{P}_n)^*((T_2(\mathbf{P}^*_n)-T_2(\widehat{\mathbf{P}}_n),T_1(\widehat{\mathbf{P}}_n)-T_1(\mathbf{P}_n))\in b_n\overline{\Omega})$$
$$\leqslant -\inf\{\rho_{0b}^2(\overline{\mathbf{G}},\mathbf{P}_0):(T_2'(\mathbf{G}_2),T_1'(\mathbf{G}_1))\in\mathfrak{cl}(\overline{\Omega}),$$
$$\overline{\mathbf{G}}=\mathbf{G}_2\times\mathbf{G}_1\in\Lambda_0^2\}.\quad(4.6)$$

Если $T_2'(\mathbf{G})$ и $T_2'(\mathbf{G})$ непрерывны в τ_Φ-топологии и правая часть (4.6) *не равна бесконечности, то для любого $\delta > 0$*

$$\limsup_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\ln(\mathbf{P}_n)^*(\rho(b_n^{-1}(T_2(\mathbf{P}_n^*) - T_2(\widehat{\mathbf{P}}_n) - T_2'(\mathbf{P}_n^* - \widehat{\mathbf{P}}_n), 0) > \delta,$$
$$\rho(b_n^{-1}(T_1(\widehat{\mathbf{P}}_n) - T_1(\mathbf{P}_n) - T_1'(\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_0)), 0) \geqslant \delta) = -\infty. \quad (4.7)$$

Теорема 4.4. *Пусть выполнены условия* A, B2, C_Ψ. *Пусть дана последовательность $d_n > 0$, такая что $d_n \to 0$, $d_{n+1}/d_n \to 1$, $nd_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть функционал $T(\mathbf{P})$ непрерывен в τ_Ψ-топологии. Тогда для любого множества $\Omega \subset Y$ имеет место*

$$\begin{aligned}&\liminf_{n\to\infty}(nd_n^2)^{-1}\ln(\mathbf{P}_n)_*(T(\widehat{\mathbf{P}}_n) - T(\mathbf{P}_n) \in d_n\Omega)\\ &\geqslant -\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G}, \mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{int}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda_0\}\end{aligned} \quad (4.8)$$

и

$$\begin{aligned}&\limsup_{n\to\infty}(nd_n^2)^{-1}\ln(\mathbf{P}_n)^*(T(\widehat{\mathbf{P}}_n) - T(\mathbf{P}_n) \in d_n\Omega)\\ &\leqslant -\inf\{\rho_0^2(\mathbf{G}, \mathbf{P}_0) : T'(\mathbf{G}) \in \mathfrak{cl}(\Omega), \mathbf{G} \in \Lambda_0\}.\end{aligned} \quad (4.9)$$

Если $T'(\mathbf{G})$ непрерывен в τ_Ψ-топологии и правая часть (4.9) *не равна бесконечности, то для любого $\delta > 0$*

$$\limsup_{n\to\infty}(nd_n^2)^{-1}\ln(\mathbf{P}_n)^*(\rho(d_n^{-1}(T(\widehat{\mathbf{P}}_n) - T(\mathbf{P}_n)$$
$$- T'(\widehat{\mathbf{P}}_n - \mathbf{P}_0)), 0) \geqslant \delta) = -\infty. \quad (4.10)$$

Для доказательства (4.5) и (4.6) теоремы 4.3 достаточно применить принцип сжатия (contraction principle) теоремы 4.2.23 в [10] к последовательностям функций $f_{kj}(\mathbf{G}) = b_k^{-1}(T_j(\mathbf{P}_n + b_k\mathbf{G}) - T_j(\mathbf{P}_n))$, $j = 1, 2$. В теореме 4.2.23 в [10] предполагается, что

$$\limsup_{k\to\infty}\sup_{\mathbf{G}\in\Gamma_{0r}}\rho(f_{kj}(\mathbf{G}), T_j'(\mathbf{G})) = 0. \quad (4.11)$$

Так как Γ_r – компактное и секвенциально компактное множество в τ_Θ-топологии (см. лемму 5.1 ниже), то (4.11) следует из (4.1).

Доказательство (4.7) аналогично доказательству подобного утверждения (3.4) теоремы 3.1 в [16] и теоремы 3.9.4 в [27] (см. также замечание 2.1 в [16]). Мы рассматриваем последовательность отображений

$$\phi_k : \Lambda_{0\Phi}^2 \to Y^4 = Y \times Y \times Y \times Y,$$

задаваемых соотношением $\phi_k(\overline{\mathbf{G}}) = (f_{k2}(\mathbf{G}_2), T_2'(\mathbf{G}_2), f_{k1}(\mathbf{G}_1), T_1'(\mathbf{G}_1))$ для всех $\overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1 \in \Lambda_{0\Theta}^2$. В силу (4.2), (4.3), мы получаем, что

$\phi_n(\mathbf{P}_n^* - \widehat{\mathbf{P}}_n)$ удовлетворяет принципу больших уклонений с функционалом действия

$$\overline{\rho}^2(y_1, y_2, y_3, y_4) = \inf\{\rho_{0b}^2(\overline{\mathbf{G}}, \mathbf{P}) : T_2'(\mathbf{G}_2) = y_1 = y_2, T_1'(\mathbf{G}_1) = y_3 = y_4, \overline{\mathbf{G}} = \mathbf{G}_2 \times \mathbf{G}_1 \in \Lambda_{0\Phi}^2\},$$

где $(y_1, y_2, y_3, y_4) \in Y^4$.

Следовательно, по стандартной форме принципа сжатия (см. теорему 4.2.1 в [10]), мы имеем (4.7).

Рассуждения при доказательстве теорем 4.1, 4.2 и 4.4 аналогичны. Отметим, что "стохастический характер" теорем 4.1 и 4.2 (рассмотрение принципа умеренных уклонений относительно $\widehat{\mathbf{P}}_n$) никак не сказывается на применении в доказательствах теоремы 4.2.23 [10]. Поскольку несмотря на "стохастичность", все топологические свойства и свойства функционала действия сохраняются.

В [27, глава 3.9], доказательство асимптотической нормальности статистических функционалов основано на их непрерывности в супремум-норме, заданной на множестве функций распределения. В [16] тот же самый метод был применен для доказательства принципа умеренных уклонений статистических функционалов. Если $S = [a, b] \subseteq R^1$ или S является замыканием выпуклой области в R^d, супремум-норма непрерывна относительно τ_Σ-топологии (см. [17, лемма 2.1] и [15, лемма 4.1]) для $\Sigma = \Phi, \Psi, \Theta$. В силу принципа сжатия (см. теорему 4.2.1 в [10]), это означает, что принципы умеренных уклонений теорем 4.1–4.4 распространяются на статистические функционалы, заданные на множествах эмпирических функций распределения и эмпирических бутстрап-функций распределения, которые лежат в банаховом пространстве $D(a, b)$ всех непрерывных слева функций $z : [a, b] \to R^1$, снабженном равномерной нормой. Таким образом, техника, развитая в [27, гл. 3.9], позволяет изучать вероятности умеренных уклонений статистических функционалов на основе теорем 4.1–4.2.

Принципы умеренных уклонений для эмпирического квантильного бутстрап-процесса и эмпирической бутстрап-копула-функции будут доказаны ниже в теоремах 4.5 и 4.7. Теоремы 4.5 и 4.7 являются бутстрап-аналогами принципов умеренных уклонений для эмпирического квантильного процесса и эмпирической копула-функции, доказанных в теоремах 4.5 и 4.6 в [16]. Бутстрап-версия принципа больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений для оценок

Каплана–Мейера и функции интенсивности отказов могут быть также легко получены аналогично подобным результатам в [16], теоремы 4.2–4.4. Принципы больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений для L и M-оценок, доказанные в [15] (теоремы 4.2 и 4.3), также автоматически переносятся на бутстрап-постановку.

4.2. Эмпирический бутстрап-квантильный процесс. Пусть $F(x)$, $x \in (a,b) \supset R^1$ – функция распределения случайной величины $X_1, \dots, X_n$. Обозначим $\widehat{F}_n$ эмпирическую функцию распределения $X_1, \dots, X_n$ и $F^*_{k_n}$ эмпирическую функцию $X^*_1, \dots, X^*_{k_n}$.

Для произвольной функции распределения $G(x)$, $x \in (a,b) \supset R^1$ и любого $p \in (0,1)$ положим $(G)^{-1}(p) = \inf\{x : G(x) \geqslant p\}$.

Теорема 4.5. *Пусть $a_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $a_n \to 0$, $a_{n+1}/a_n \to 1$, $k_n a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть даны фиксированные значения p, q, где $0 < p < q < 1$. Пусть F имеет непрерывную и положительную плотность распределения на интервале $[(F)^{-1}(p)-\epsilon, (F)^{-1}(q)+\epsilon]$ для некоторого $\epsilon > 0$. Тогда для любого множества $\Omega \subset D((F)^{-1}(p)-\epsilon, (F)^{-1}(q)+\epsilon)$ имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty} (k_n a_n^2)^{-1} \ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*((F^*_{k_n})^{-1} - (\widehat{F}_n)^{-1} \in a_n\Omega) \geqslant -I_q(\mathfrak{int}(\Omega)) \quad a.\,s_*$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} (k_n a_n^2)^{-1} \ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*((F^*_{k_n})^{-1} - (\widehat{F}_n)^{-1} \in a_n\Omega) \leqslant -I_q(\mathfrak{cl}(\Omega)) \quad a.\,s^*,$$

где для любого множества $\Psi \subset D((F)^{-1}(p)-\epsilon, (F)^{-1}(q)+\epsilon)$

$$I_q(\Psi) = \inf\left\{\rho_0^2(\mathbf{Q},\mathbf{P}) : \mathbf{Q} \in \Lambda_{0\Theta_2},\ q = \frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}}, -\frac{q((F)^{-1}(x))}{f((F)^{-1}(x))} = \phi(x),\right.$$
$$\left.\phi(x) \in \Omega,\ x \in [p,q]\right\}.$$

Доказательство теоремы 4.5. Так как супремум-норма непрерывна в τ_{Θ_2}-топологии, то в силу принципа сжатия (см. теорему 4.2.1 в [10]), мы можем использовать при изучении вероятностей умеренных уклонений $(F^*_{k_n})^{-1} - (\widehat{F}_n)^{-1}$ технику эмпирических процессов. Это позволяет следовать в рассуждениях доказательству принципа больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений эмпирического квантильного процесса (см. теорему 4.5 в [16]). При этом в доказательстве применение теоремы 3.1 в [16] заменяется на применение теоремы 4.1. □

Теорема 4.6. *Пусть $b_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $b_n \to 0$, $b_{n+1}/b_n \to 1$, $k_n b_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть $k_n/n \to \nu$ при $n \to \infty$. Пусть F удовлетворяет условиям теоремы 4.5. Тогда для любых множеств*

$$\Omega_1 \subset D((F)^{-1}(p)-\epsilon, (F)^{-1}(q)+\epsilon) \quad \text{и} \quad \Omega_2 \subset D((F)^{-1}(p)-\epsilon, (F)^{-1}(q)+\epsilon)$$

имеет место

$$\liminf_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \ln(\mathbf{P})_*((F_{k_n}^*)^{-1} - (\widehat{F}_n)^{-1} \in b_n\Omega_2, (\widehat{F}_n)^{-1} - (F)^{-1} \in b_n\Omega_1)$$
$$\geqslant -\nu I_q(\mathfrak{int}(\Omega_2))\, I_q(\mathfrak{int}(\Omega_1)) \quad a.\, s_*$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \ln(\mathbf{P})^*((F_{k_n}^*)^{-1} - (\widehat{F}_n)^{-1} \in b_n\Omega_2, (\widehat{F}_n)^{-1} - (F)^{-1} \in b_n\Omega_1)$$
$$\leqslant -\nu I_q(\mathfrak{cl}(\Omega_2))\, I_q(\mathfrak{cl}(\Omega_1)) \quad a.\, s^*.$$

Доказательство теоремы 4.6 аналогично доказательству теоремы 4.5 и опускается.

4.3. Эмпирические бутстрап-копула-процессы. Пусть (X_1, Y_1), $\ldots, (X_n, Y_n)$ – независимые одинаково распределенные случайные векторы имеющие вероятностную меру $\mathbf{P}$, заданную на $(a,b)\times(c,d) \supset R^2$. Пусть H – функция распределения $\mathbf{P}$. Для копула-функции $C(u,v) = H((F)^{-1}(u), (G)^{-1}(v))$ ее эмпирическая оценка определяется как $\widehat{C}_n(u,v) = \widehat{H}_n((\widehat{F}_n)^{-1}(u), (\widehat{G}_n)^{-1}(v))$, где $\widehat{H}_n$ и $\widehat{F}_n$, $\widehat{G}_n$ являются совместной и маргинальными эмпирическими функциями наблюдений. Эмпирическая бутстрап-копула-функция $C_n^*(u,v) = H_n^*((F_n^*)^{-1}(u), (G_n^*)^{-1}(v))$ определяется аналогично по наблюдениям (X_1^*, Y_1^*), $\ldots, (X_{k_n}^*, Y_{k_n}^*)$. Здесь $(X_1^*, Y_1^*), \ldots, (X_{k_n}^*, Y_{k_n}^*)$ распределены в соответствии с вероятностной мерой $\widehat{\mathbf{P}}_n$ порожденной $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$.

Для произвольного множества S обозначим $l_\infty(S)$ линейное пространство всех отображений $z : S \to R^1$ с нормой $\|z\| = \sup\limits_{s\in S} |z(s)|$.

Теорема 4.7. *Пусть $a_n > 0$ – убывающая последовательность, такая что $a_n \to 0$, $a_{n+1}/a_n \to 1$, $k_n a_n^2 \to \infty$ при $n \to \infty$. Пусть значения $0 < p_1 < q_1 < 1$ и $0 < p_2 < q_2 < 1$ фиксированы. Пусть функции распределения F и G имеют строго положительные непрерывные плотности f и g на интервалах $[(F)^{-1}(p_1) - \epsilon, (F)^{-1}(q_1) + \epsilon]$ и $[(G)^{-1}(p_2) - \epsilon, (G)^{-1}(q_2) + \epsilon]$ соответственно для некоторого $\epsilon > 0$.*

Предположим, что $\partial H/\partial x$ *and* $\partial H/\partial y$ *существуют и непрерывны на произведении интервалов*

$$[(F)^{-1}(p_1)-\epsilon,(F)^{-1}(q_1)+\epsilon]\times[(G)^{-1}(p_2)-\epsilon,(G)^{-1}(q_2)+\epsilon].$$

Тогда для произвольного множества $\Omega\subset l_\infty([p_1,q_1]\times[p_2,q_2])$ *имеет место*

$$\liminf_{n\to\infty}(k_na_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)_*(C^*_{k_n}-\widehat{C}_n\in a_n\Omega)\geqslant -I_C(\mathfrak{int}(\Omega))\quad a.\,s_*$$

и

$$\limsup_{n\to\infty}(k_na_n^2)^{-1}\ln(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(C^*_{k_n}-\widehat{C}_n\in a_n\Omega)\leqslant -I_q(\mathfrak{cl}(\Omega))\quad a.\,s^*,$$

где для любого множества $\Psi\subset l_\infty([p_1,q_1]\times[p_2,q_2])$

$$I_C(\Psi)=\inf\left\{\rho_0(\mathbf{Q}|\mathbf{P}):q=\frac{d\mathbf{Q}}{d\mathbf{P}},\ \mathbf{Q}\in\Lambda_{0\Theta_2},\ \Phi'_H(\alpha)=\phi,\ \phi\in\Omega,\right.$$
$$\left.\alpha(s,t)=\int\limits_{-\infty}^{s}\int\limits_{-\infty}^{t}q(x,y)H(dx,dy)\right\},$$

и Φ'_H *задается равенством*

$$\Phi'_H(\alpha)(u,v)=\alpha((F)^{-1}(u),(G)^{-1}(v))$$
$$-\frac{\partial H}{\partial x}((F)^{-1}(u),(G)^{-1}(v))\frac{\alpha((F)^{-1}(u),\infty)}{f((F)^{-1}(u))}$$
$$-\frac{\partial H}{\partial y}((F)^{-1}(u),(G)^{-1}(v))\frac{\alpha(\infty,(G)^{-1}(v))}{g((G)^{-1}(v))}.$$

Доказательство теоремы 4.7 проводится аналогично доказательству принципа больших уклонений для вероятностей умеренных уклонений эмпирического копула-роцесса (см. теорему 4.6 в [16]). Отличия те же самые, что и при доказательстве теоремы 4.5.

Замечание. Ясно, что аналоги теорем 4.5 и 4.7 могут быть получены в терминах сходимости по вероятности (см. теоремы 2.2 и 4.2). Отличия в формулировках теорем те же самые, что и в теоремах 2.1, 4.1 и теоремах 2.2, 4.2 соответственно.

§5. Доказательство теорем 2.1 и 2.2

Мы начнем с доказательства теоремы 2.2. Метод доказательства базируется на доказательстве принципа больших уклонений для эмпирических мер, предложенном в [8] и являющимся некоторым вариантом метода доказательства в [24].

Лемма 5.1. *Имеет место*

(i) $\Gamma_{0r} \subset \Lambda_{0\Theta}$,

(ii) Γ_{0r} *является* τ_Θ*-компактным и секвенциально* τ_Θ*-компактным множеством в* $\Lambda_{0\Theta}$,

(iii) τ *и* τ_Θ*-топологии совпадают в* Γ_{0r}.

Доказательство. Рассуждения проводятся аналогично доказательству леммы 2.1 в [13]. Для любой знакопеременной меры $\mathbf{G} \in \Gamma_{0r}$, произвольного измеримого множества $A \subseteq S$ и любого $\phi \in \Theta$ имеем

$$\int\limits_A |\phi|\, d|\mathbf{G}| \leqslant \alpha\Big(\int\limits_A \phi^2\, d\mathbf{P}\Big) + \alpha^{-1}\Big(\int\limits_A \Big(\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{P}}\Big)^2 d\mathbf{P}\Big)^2 d\mathbf{P} \tag{5.1}$$

для всех $\alpha > 0$. По определению Γ_{0r}, это влечет (i), если $A = S$.

Зафиксируем $\epsilon > 0$. Пусть $\alpha = r/\epsilon$ и пусть $n = n(\epsilon)$, такое что

$$\frac{r}{\epsilon}\Big(\int\limits_{|\phi|>n} \phi^2\, d\mathbf{P}\Big) < \epsilon.$$

Тогда

$$\alpha^{-1} \int\limits_{|\phi|>n} \Big(\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{P}}\Big)^2 d\mathbf{P} \leqslant \epsilon.$$

Поэтому, в силу (5.1), мы имеем

$$\int |\phi|\, d|\mathbf{G}| - \int\limits_{|\phi|<n} |\phi|\, d|\mathbf{G}| < 2\epsilon$$

Следовательно, отображение $\Gamma_{0r} \ni \mathbf{G} \to \int \phi\, d\mathbf{G}$ является τ-непрерывным как непрерывный предел функций

$$\int\limits_{|\phi_1|<n} \phi\, d\mathbf{G}.$$

Тем самым, τ и τ_Θ-топологии совпадают в Γ_r.

Так как множества Γ_{0r} являются τ-компактными и секвенциально τ-компактными (см. [2, 4]) эти множества являются также τ_Θ-компактными и секвенциально τ_Θ-компактными. Это завершает доказательство леммы 5.1. $\square$

Начнем с доказательства верхней границы (2.8). Обозначим $\eta = \rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P})$ и зафиксируем $\delta, 0 < 2\delta < \eta$. Ясно, что $\Gamma_{0,\eta-\delta} \subset \Lambda_{0\Theta} \setminus \Omega_0$.

Для любых $f_1, \dots, f_l \in \Theta$, $\mathbf{G} \in \Lambda_{0\Theta}$ и $\gamma > 0$ обозначим

$$U(f_1, \dots, f_l, \mathbf{G}, \gamma) = \left\{ \mathbf{R} : \left| \int f_i d(\mathbf{R} - \mathbf{G}) \right| < \gamma, \mathbf{R} \in \Lambda_{0\Theta}, 1 \leqslant i \leqslant l \right\}.$$

Определим линейное пространство

$$\widetilde{\Lambda}_{0\Theta} = \left\{ \mathbf{G} : \mathbf{G} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \mathbf{G}_i, \mathbf{G}_i \in \Lambda_{0\Theta}, \lambda_i \in R^1, 1 \leqslant i \leqslant k, k = 1, 2, \dots \right\}.$$

Определим τ_Θ-топологию в $\widetilde{\Lambda}_{0\Theta}$. Ясно, что $\Lambda_{0\Theta} \subset \widetilde{\Lambda}_{0\Theta}$.

Так как $\widetilde{\Lambda}_{0\Theta}$ является линейным топологическим пространством Хаусдорфа, то пространство $\widetilde{\Lambda}_{0\Theta}$ является регулярным (см. теорему B2 в [10]). Таким образом, для каждого $\mathbf{G} \in \Gamma_{0,\eta-\delta}$ найдется открытое множество $U(f_1, \dots, f_l, \mathbf{G}, \gamma) \subset \Lambda_{0\Theta} \setminus \mathrm{cl}\,(\Omega_0)$. Множество $\Gamma_{0,\eta-\delta}$ компактно. Следовательно, существует конечное покрытие $\Gamma_{0,\eta-\delta}$ множествами

$$U_1 = U(f_{11}, \dots, f_{1l_1}, \mathbf{G}_1, c_1), \dots, U_m = U(f_{m1}, \dots, f_{ml_m}, \mathbf{G}_m, c_m),$$

где $f_{ij} \in \Theta$, $\mathbf{G}_i \in \Lambda_{0\Theta}$ для $1 \leqslant j \leqslant l_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Обозначим $U = \cup_{i=1}^m U_i$.

Таким образом, для доказательства (2.8) достаточно оценить левую часть

$$\widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}_n^* \notin \mathbf{P} + a_n U) \geqslant (\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\mathbf{P}_n^* \in \mathbf{P} + a_n \Omega).$$

Задача свелась к конечномерной.

Для всех i, j, $1 \leqslant j \leqslant l_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$, определим знакопеременные меры F_{ij} имеющие плотности $\frac{dF_{ij}}{d\mathbf{P}} = f_{ij} - \mathbf{E}\,[f_{ij}(X)]$. Определим линейные пространства

$$L = \left\{ F : F = \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=1}^{l_i} \lambda_{ij} F_{ij}, \lambda_{ij} \in R^1, 1 \leqslant j \leqslant l_i, 1 \leqslant i \leqslant m \right\}$$

и

$$\widetilde{l} = \left\{ f : f = \frac{dF}{d\mathbf{P}}, F \in L \right\}.$$

Определим множества

$$\widehat{\Gamma}_{0c} = \left\{ f : f = \frac{dF}{d\mathbf{P}}, F \in \Gamma_{0c} \cap L \right\}, \quad c > 0.$$

Найдется конечное число функций $q_1, \ldots, q_l \in \widehat{\Gamma}_{0,\eta-2\delta}$, таких что

$$\mathbf{E}\left[q_i(X)\right] = 0, \quad \mathbf{E}\left[q_i^2(X)\right] = 2(\eta - 2\delta), \quad 1 \leqslant i \leqslant l$$

и

$$\widehat{\Gamma}_{0,\eta-2\delta} \cap L \subset \cap_{i=1}^{l} V(q_i) \cap L \subset \widehat{\Gamma}_{0,\eta-\delta} \cap L,$$

где

$$V_i = V(q_i) = \left\{ \mathbf{G} : \left| \int q_i d\mathbf{G} \right| < 2(\eta - 2\delta), \mathbf{G} \in \Lambda_{0\Theta} \right\}.$$

Обозначим

$$V = \bigcap_{i=1}^{k} V_i.$$

Так как $\widehat{\Gamma}_{0,\eta-\delta} \subset U \cap L$, то $V \subset U$. Следовательно

$$\Omega_0 \subset W = \Lambda_{0\Theta} \setminus V.$$

Поэтому достаточно оценить правую часть

$$\log(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n\Omega_0) \leqslant \log \widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n W).$$

Имеем

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n W) &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}^*_{k_n} \notin \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n U_i) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \widehat{\mathbf{P}}_n \left(\int q_i \, d(\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) - 2a_n(\eta - 2\delta) > 0 \right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Поэтому достаточно показать, что для каждого $f \in \Theta, \mathbf{E}\left[f(X)\right] = 0$, $\mathbf{E}\left[f^2(X)\right] = \eta - 2\delta$ и $n > n_0(\epsilon, f)$,

$$\begin{aligned} &(k_n a_n^2)^{-1} \log \widehat{\mathbf{P}}_n \left(\int f d(\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) > 2a_n(\eta - 2\delta) \right) \\ &\leqslant -2\frac{(\eta - 2\delta)^2}{\mathrm{Var}\left[f(X_1)\right]}(1 - \epsilon) = -2(\eta - 2\delta)(1 - \epsilon) \end{aligned} \tag{5.3}$$

с вероятностью $\kappa_n(\epsilon, U(f, q))$.

Обозначим $s^2 \doteq s_f^2 \doteq s_n^2 = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f^2(X_i) - \overline{f}^2$, где $\overline{f} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} f(X_i)$. Положим $\gamma = \frac{\sqrt{2}s\epsilon}{324\sigma}$, где $\sigma^2 = \mathrm{Var}\,[f(X_1)] = \eta - 2\delta$.

Из теоремы 28, в [23, гл. 4] получаем $\mathbf{P}(|s_n^2 - \sigma^2| > \epsilon) < \beta_{2n}(f)$, где $\beta_{2n}(f) = C_1(f,\epsilon)n^{1-t/2}$. Таким образом, чтобы доказать (5.3), мы можем предположить, что

$$|s_n^2 - \sigma^2| < \epsilon. \tag{5.4}$$

Определим множество событий

$$A_{nf} = \{X_1, \dots, X_n : \max_{1\leqslant s\leqslant n} |f(X_s)| < \sigma\gamma a_n^{-1}\}.$$

Имеем

$$\mathbf{P}(A_{nf}) \geqslant 1 - n\mathbf{P}(|f(X_1)| > \sigma\gamma a_n^{-1}) = 1 - nh\Big(\frac{a_n}{\sigma\gamma}\Big) \doteq 1 - \beta_{2n}.$$

Заметим, что в силу (2.6), $nh\big(\frac{a_n}{\sigma\gamma}\big) \to 0$ при $n \to \infty$. Следовательно, достаточно доказать (5.3), если A_{nf} имеет место.

Дальнейшие рассуждения базируются на слегка упрощенной формулировке теоремы 3.2 в [26]. Она дана ниже.

Пусть $Y_{1n}, \dots, Y_{k_n,n}$ – независимые случайные величины, имеющие вероятностную меру $\mathbf{P}_n$, $\mathbf{E}\,[Y_{1n}] = 0$, $\mathrm{Var}\,[Y_{1n}] = \sigma^2$, $|Y_{in}| < \sigma\gamma a_n^{-1}$. Обозначим

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{k_n}\sigma}\sum_{i=1}^{k_n} Y_{in}.$$

Предположим, что

$$a_n^{-2}z^{-2}\log\mathbf{E}[\exp\{za_n\sigma^{-1}Y_{1n}\}] < C \quad \text{при} \quad |z| < \kappa \tag{5.5}$$

и

$$\omega = \frac{\sqrt{2}\kappa}{36\max\{1, C\}} > 1. \tag{5.6}$$

Обозначим

$\Delta = \omega a_n k_n^{1/2}$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия* (5.5) *и* (5.6). *Тогда*

$$\mathbf{P}(S_n > k_n^{1/2}a_n)$$
$$= (1 - \Phi(k_n^{1/2}a_n))\exp\{L(k_n^{1/2}a_n)\}\Big(1 + \theta f_1(k_n^{1/2}a_n)\frac{k_n^{1/2}a_n + 1}{\Delta}\Big), \tag{5.7}$$

где

$$f_1(k_n^{1/2}a_n) = \frac{60(1+10\Delta^2\exp\{-(1-\omega^{-1})\sqrt{\Delta}\})}{1-\omega^{-1}}$$

и

$$-\frac{k_n a_n^2}{3\omega} < L(k_n^{1/2}a_n) < \frac{k_n a_n^2}{2}\frac{1}{1+\omega}. \tag{5.8}$$

Заметим, что если $\omega > 16$ и $a_n k_n^{1/2} > 100$, то

$$|\theta_1 f_1(k_n^{1/2}a_n)|\frac{k_n^{1/2}a_n+1}{\Delta} < 6. \tag{5.9}$$

Если $|z| < \kappa$ и $|f(X_i)| < \sigma\gamma a_n^{-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, то

$$\begin{aligned}
&\log \mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}_n}\{\exp\{za_n(f(X_1^*)-\overline{f})/s\}\}\\
&= \log\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\exp\{za_n(f(X_i)-\overline{f})/s\}\right]\\
&= \log\left(1+\frac{z^2a_n^2}{2}+\frac{\theta^3z^3a_n^3s^{-3}}{6n}\sum_{i=1}^{n}(f(X_i)-\overline{f})^3\exp\{\theta za_n(f(X_i)-\overline{f})/s\}\right)\\
&\doteq \tau_n,
\end{aligned}$$

где $0 < \theta < 1$.

Так как

$$\exp\{\theta za_n(f(X_1)-\overline{f})/s\} < \exp\{2\gamma\kappa\theta\sigma s^{-1}\} \doteq R,$$

используя $\ln(1+x) < x$, $x > 0$, получаем

$$\tau_n < \log\left(1+\frac{z^2a_n^2}{2}(1+\gamma\kappa\sigma Rs^{-1})\right) < \frac{z^2a_n^2}{2}(1+\gamma\kappa\sigma Rs^{-1}) = z^2a_n^2D,$$

где $D = \frac{1+\gamma\kappa R\sigma s^{-1}}{2}$.

Если

$$\kappa = \frac{s}{2\gamma\sigma},$$

то $R < 3$ и $D < 2$. Следовательно,

$$\omega > \frac{9}{2\epsilon}, \quad L(k_n^{1/2}a_n) \leqslant \frac{k_n^{1/2}a_n^2}{2}\frac{\epsilon}{9/2+\epsilon}.$$

Отсюда, в силу (5.7), (5.9), получаем

$$(k_na_n^2)^{-1}\log\widehat{\mathbf{P}}_n\left(\int f d(\mathbf{P}_{k_n}^* - \widehat{\mathbf{P}}_n) > 2a_n(\eta-2\delta)\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant -\frac{1}{2}s^{-2}(\eta-2\delta)^2\left(1-\frac{\epsilon}{9/2+\epsilon}\right)\\
&\quad+(\log 7-\frac{1}{2}\log(2\pi s^{-2}(1+\epsilon)))(k_n a_n^2)^{-1}\\
&\leqslant -\frac{1}{2}s^{-2}(\eta-2\delta)^2\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)+C(k_n a_n^2)^{-1}\\
&=-\frac{1}{2}s^{-2}(\eta-2\delta)^2(1-\frac{\epsilon}{2})+C(k_n a_n^2)^{-1}\\
&\leqslant -\frac{1}{2}s^{-2}(\eta-2\delta)^2\left(1-\frac{\epsilon}{2}\right)+C(k_n a_n^2)^{-1}.
\end{aligned}
$$

Это означает (5.3), если (5.4) и $|f(X_i)|<\sigma\gamma a_n^{-1}$, $1\leqslant i\leqslant n$, имеет место. Доказательство (2.8) завершено.

Если $\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0),\mathbf{P})=\infty$, положим $\eta=L$. После этого достаточно применить те же самые рассуждения, что и при доказательстве (2.8).

Доказательство нижней границы (2.7) основано на стандартных рассуждениях (см. [8, 10, 24] и библиографию в них), а также оценках теоремы 5.1. Для любого $\delta>0$ найдется открытое множество $U=U(f_1,\dots,f_l,\mathbf{G},\gamma)$, такое что $U\subset \operatorname{int}.(\Omega_0)$ и $\rho_0^2(U,\mathbf{P})<\eta+\delta$, $\rho_0^2(\mathbf{G},\mathbf{P})<\eta+\delta$. Следовательно, достаточно найти нижнюю границу для асимптотики

$$(k_n a_n^2)^{-1}\log\widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}_k^*\in\widehat{\mathbf{P}}_n+a_nU).$$

Аналогично доказательству верхней границы мы можем предположить, что знакопеременная мера $\mathbf{G}$ имеет плотность $g=\frac{d\mathbf{G}}{d\mathbf{P}}=\sum\limits_{i=1}^{l}\lambda_i f_i$, $f_i\in\Theta$. Таким образом, задача опять становится конечномерной.

Зафиксируем $\lambda, 0<\lambda<1$, такую что $\lambda\mathbf{G}\in U$. Заметим, что значение λ может быть выбрано произвольно из некоторой окрестности 1. Определим множество $U_1=U\cap U(g,\mathbf{G},(1-\lambda)^2\|g\|^2)$. Ясно, что мы можем выбрать λ так, что $\rho_0^2(U_1,\mathbf{P})\leqslant\frac{1}{2}\lambda^2\|g\|^2$.

Лемма 5.2. *Найдется симплекс $\widetilde{U}\subset U_1$, ограниченный гиперплоскостью*

$$\Pi=\left\{\mathbf{R}:\int g\,d\mathbf{R}=\lambda^2\|g\|^2,\mathbf{R}\in\Lambda_{0\Theta}\right\}$$

и гиперплоскостями

$$\Pi_i=\left\{\mathbf{R}:\int g_i d\mathbf{R}=c_i,\mathbf{R}\in\Lambda_{0\Theta}\right\},$$

где $g_i \in \Theta$, $1 \leqslant i \leqslant l$, *таковы что* $\rho_0^2(\Pi_i, \mathbf{P}) \geqslant \lambda^2 \|g\|^2 > \rho_0^2(\Pi, \mathbf{P})$.

Дальнейшие рассуждения проведем в предположении, что утверждение леммы 5.2 имеет место. Оно будет доказано позднее. Предположим, что A_{bf} также имеет место для $f = g$ и $f = g_i$, $1 \leqslant i \leqslant l$. Тогда, применяя теорему 5.1 и лемму 5.2, получаем

$$\begin{aligned}
&\widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n U_1) \geqslant \widehat{\mathbf{P}}_n(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n \widetilde{U}) \\
&\geqslant \widehat{\mathbf{P}}_n \left(\int g d(\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) > \lambda^2 \|g\|^2 a_n \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{l} \widehat{\mathbf{P}}_n \left(\int g_i (d\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) > a_n c_i \right) \qquad (5.10) \\
&\geqslant \widehat{\mathbf{P}}_n \left(\int g d(\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) > \lambda^2 \|g\|^2 a_n \right) \\
&\quad - \sum_{i=1}^{l} \exp\{-\rho_0^2(\Pi_i, \mathbf{P}) a_n^2 k_n (1 + \epsilon_n)\},
\end{aligned}$$

где $\epsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$.

Таким образом, остается применить теорему 5.1 к первому слагаемому правой части (5.10).

В силу (5.7) и (5.8), получаем

$$\begin{aligned}
&(a_n^2 k_n)^{-1} \log \widehat{\mathbf{P}}_n \left(\int g \, d\mathbf{P}^*_{k_n} - \widehat{\mathbf{P}}_n) > a_n \lambda^2 \|g\|^2 \right) \\
&\geqslant -\frac{1}{2} \lambda^2 \|g\|^2 \left(1 + \frac{1}{3\omega} \right) + c(k_n a_n^2)^{-1} \\
&= -\frac{1}{2} \lambda^2 \|g\|^2 \left(1 + \frac{s}{9\sigma} \epsilon \right) + c(k_n a_n^2)^{-1}.
\end{aligned}$$

Отсюда следует нижняя граница.

Доказательство леммы 5.2. Поскольку задача конечномерна, она может быть переформулирована следующим образом. Пусть нам дан параллелепипед U_1 в R^{l+1} и $0 \notin U_1$. Пусть точка u лежит на грани Π параллелепипеда U_1 и $\rho(0, u) = \rho(0, U_1) = \inf_{x \in U_1} |x|$. Нужно найти симплекс $V \subset U_1$, такой что $\Pi \cap V$ является гранью симплекса V, $u \in \Pi \cap V$ и для любой гиперплоскости Π_1, проходящей через другую грань V, имеет место $\rho(0, \Pi_1) > \rho(0, u)$. Пусть расстояние u до другой грани отличной от Π превышает r_0. Простые тригонометрические оценки

показывают, что симплекс V может быть определен следующим образом. Возьмем в качестве его вершины $v = (1+\frac{1}{2}r^2)u$, где $r << r_0$, а все другие вершины v_i, $1 \leqslant i \leqslant l$, принадлежат Π и лежат на расстоянии $|v_i - u| = r$.

Для доказательства этого утверждения достаточно рассмотреть случай $l = 1$. Проведем через v прямую линию L, пересекающую линию Π в точке w и такую, что w ортогонально L. Тогда $|u - v| = |w-u|^2|u|^{-1}(1+o(1))$. Следовательно, если линия L_1, $v \in L_1$ пересечет Π в точке $z = c|w-u|^2|u|^{-1}$, $c < 1$, то $\rho(0, L_1) > |u|$. Отсюда и следует утверждение леммы 5.2. $\square$

Доказательство теоремы 2.1. Рассуждения основаны на оценках теоремы 2.2.

Начнем с доказательства верхней границы (2.5) в случае $\tau_{\Theta_{2h}}$-топологии. Предположим, что $\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P}) < \infty$. Если $\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P}) = \infty$, доказательство аналогично. Достаточно доказать, что для любого $\epsilon > 0$ имеет место

$$(k_n a_n^2)^{-1} \log(\widehat{\mathbf{P}}_n)^*(\mathbf{P}^*_{k_n} \in \widehat{\mathbf{P}}_n + a_n\Omega_0) \leqslant -\rho_0^2(\mathfrak{cl}(\Omega_0), \mathbf{P}) + \epsilon \quad a.\,s^*.$$

По усиленному закону больших чисел и (2.2), для любого $f \in \Theta$ имеет место

$$s_n^2(f) \to \sigma^2(f) \quad a.\,s., \tag{5.11}$$

где $\sigma^2(f) < \infty$.

В силу (2.3) и (2.1), для любого $\delta > 0$ имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(\max_{i\geqslant l} a_i|f(X_i)| \leqslant \delta) &= \prod_{i=l}^{\infty}(1 - \mathbf{P}(|f(X_i)| > \delta a_s^{-1})) \\ &\geqslant \prod_{i=l}^{\infty}(1 - h(a_i/\delta)) \geqslant \exp\left\{-\sum_{i=l}^{\infty} h(a_i/\delta)\right\} = 1 + o(1). \end{aligned} \tag{5.12}$$

при $l \to \infty$.

Для любого k

$$\mathbf{P}(\max_{1\leqslant i\leqslant k} a_n|f(X_i)| > \delta) = o(1) \quad \text{при } n \to \infty. \tag{5.13}$$

Заметим, что из $\max\limits_{i\geqslant k} a_i|f(X_i)| < \delta$ следует $\max\limits_{k\leqslant i\leqslant n} |f(X_i)| < \delta a_n^{-1}$. Поэтому, используя (5.12) и (5.13), получаем

$$\max_{1\leqslant s\leqslant n} |f(X_s)| < \delta a_n^{-1} \quad a.\,s. \tag{5.14}$$

Используя (5.11), (5.14), мы можем применить ту же самую технику для доказательства (5.3), какая была применена при доказательстве (2.7) в теореме 2.2. Это завершает доказательство (2.5). □

Для доказательства (2.5) в случае τ_{Θ_t}-топологии достаточно показать, что для любого $\delta > 0$ имеет место

$$I_k \doteq \mathbf{P}(\max_{i>k} a_i|f(X_i)| > \delta) = o(1) \quad \text{при } k \to \infty. \tag{5.15}$$

Имеем

$$I_k \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \mathbf{P}(f(X_i) > \delta a_i^{-1}) = \sum_{i=k+1}^{\infty} (i-k)\mathbf{P}(\delta a_{i-1}^{-1} < |f(X_1)| \leqslant \delta a_i^{-1}) \doteq J_k.$$

Определим функцию $u(x) = \delta a_{i-1}^{-1} + \delta(x - a_{i-1}^{-1})$, если $x \in [a_{i-1}^{-1}, a_i^{-1})$. Зададим обратную функцию $v(y) = \inf\{t : u(t) = y, t \in R^1\}$. Определим функцию распределения $F(x) = \mathbf{P}(|f(X_1)| < x), x \in R_+^1$.

Тогда

$$J_k \leqslant 2 \int\limits_{a_k^{-1}}^{\infty} v(x) d\, F(x) \leqslant 2 \int\limits_{a_k^{-1}}^{\infty} x^t d\, F(x) = o(1) \quad \text{при } k \to \infty.$$

Это влечет (5.15).

Доказательство нижней границы (2.4) основано на аналогичных рассуждениях и опускается.

§6. Доказательство теоремы 3.1

Для всех $r > 0$ определим множество

$$\Gamma_r = \left\{\overline{\mathbf{G}} \in \Lambda_0^2 : \rho_{0b}^2(\overline{\mathbf{G}} : \mathbf{P}) \leqslant r\right\}.$$

Лемма 6.1. *Пусть* (3.4) *имеет место. Тогда*

(i) $\Gamma_r \subset \Lambda_{0\Phi}^2$,

(ii) *множество* Γ_r *является* τ_Φ*-компактным и секвенциально* τ_Φ*-компактным множеством в* $\Lambda_{0\Phi}^2$,

(iii) τ *и* τ_Φ*-топологии совпадают в* Γ_r.

Доказательство леммы 6.1 по существу совпадает с доказательством леммы 5.1 и поэтому опускается.

Те же самые рассуждения, что и в доказательстве леммы 6.1, могут быть повторены в случае τ_Ψ-топологии. Таким образом, множества Γ_{0r} являются также τ_Ψ-компактными.

В приводимых ниже леммах 4.2–4.5 предполагается, что выполнены условия теоремы 3.1.

Для всех $u, v \in R^k$ обозначим $u'v$ скалярное произведение векторов u и v. Для всех $f \in \Phi$ и всех $\mathbf{G} \in \Lambda_{0\Phi}$ обозначим $\langle f, \mathbf{G}\rangle = \int f\, d\mathbf{G}$.

Пусть $f_1, \dots, f_{k_1}, g_1, \dots, g_{k_2} \in \Phi$ и $\mathbf{G} \in \Lambda_{0\Phi}$. Пусть $\mathbf{E}\,[f_i(X)] = 0$, $\mathbf{E}\,[g_j(X)] = 0$ для $1 \leqslant i \leqslant k_1$, $1 \leqslant j \leqslant k_2$. Зададим ковариационные матрицы

$$R_f = \{\mathbf{E}\,[f_i(X) f_j(X)]\}_{i,j=1}^{k_1} \quad \text{и} \quad R_g = \{\mathbf{E}\,[g_i(X) g_j(X)]\}_{i,j=1}^{k_2}.$$

Обозначим $\vec{f} = \{f_i\}_{i=1}^{k_1}$, $\vec{g} = \{g_i\}_{i=1}^{k_2}$ и $\overline{g}_i = \frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^{n} g_i(X_l)$, $1 \leqslant i \leqslant k_2$.

По теореме Даусона–Гартнера (см. [10, теорема 4.6.9] и [21]), теорема 3.1 следует из приводимой ниже леммы 6.2. Отметим, что метод, развитый в разделе 5, также позволяет доказать теорему 3.1 на основе леммы 6.2.

Лемма 6.2. *Для случайных векторов*

$$\vec{U}_n(\vec{X}) = \Bigg(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_1(X_i), \dots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f_{k_1}(X_i), \\ \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_1(X_i^*) - \overline{g}_1, \dots, \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} g_{k_2}(X_i^*) - \overline{g}_{k_2}\Bigg)$$

справедлив принцип больших уклонений, то есть для каждого $\Omega \subset R^{k_1+k_2}$ имеет место

$$\liminf_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X}) \in b_n\Omega) \geqslant -\inf_{x \in \operatorname{int}(\Omega)} x' I_{f,g} x \tag{6.1}$$

и

$$\limsup_{n\to\infty} (nb_n^2)^{-1} \log \mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X}) \in b_n\Omega) \leqslant -\inf_{x \in \operatorname{cl}(\Omega)} x' I_{f,g} x, \tag{6.2}$$

где для любых $x = (y, z) \in R^{k_1+k_2}$, $y \in R^{k_1}$ и $z \in R^{k_2}$

$$x' I_{f,g} x = \sup_{t \in R^{k_1}, s \in R^{k_2}} \left(t'y + s'z - \langle t'f, H\rangle - \frac{1}{2} t' R_f t - \frac{1}{2} s' R_g s\right).$$

Заметим, что если существуют R_f^{-1} и R_g^{-1}, то

$$x' I_{fg} x = \frac{1}{2}\big(y - \langle f, H\rangle\big)' R_f^{-1} \big(y - \langle f, H\rangle\big) + \frac{1}{2} z' R_g^{-1} z.$$

Лемма 6.2 следует из приводимых ниже лемм 6.3 и 6.4.

Лемма 6.3. *Имеет место*

$$\lim_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}_n\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant k_1}\max_{1\leqslant l\leqslant n}|f_i(X_l)|>b_n^{-1}\Big)=-\infty \tag{6.3}$$

и

$$\lim_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{P}_n\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant k_2}\max_{1\leqslant l\leqslant n}|g_i(X_l^*)|>b_n^{-1}\Big)=-\infty. \tag{6.4}$$

Доказательство. Мы имеем

$$\mathbf{P}_n\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant k_1}\max_{1\leqslant l\leqslant n}|f_i(X_l)|>b_n^{-1}\Big)\leqslant n\sum_{i=1}^{k_1}\mathbf{P}_n(|f_i(X_1)|>b_n^{-1})$$

$$\leqslant n\sum_{i=1}^{k_1}\mathbf{P}(|f_i(X_1)|>b_n^{-1})+nb_n\sum_{i=1}^{k_1}\int\chi(|f_i(X_1)|>b_n^{-1})\,d|H_n|.$$

В силу (3.1) и B1, отсюда следует (6.3).

Так как $g_1,\dots,g_{k_2}\in\Phi$, то то же самое утверждение имеет место и для этих функций. Таким образом, мы получаем

$$\mathbf{P}_n(\max_{1\leqslant i\leqslant k_2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|g_i(X_j)|>b_n^{-1})=O(\exp\{-Cnb_n^2\})$$

для любого $C>0$. Это означает (6.4).

Для каждого $h\in\Phi$ обозначим $h_n(x)=h(x)\chi(|h(x)|<b_n^{-1})$. Обозначим $\vec{f}_n=\{f_{in}\}_{i=1}^{k_1}$ и $\vec{g}_n=\{g_{in}\}_{i=1}^{k}$. Зададим случайный вектор

$$\widetilde{U}_n(\vec{X})=\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_{1n}(X_i),\dots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f_{k_1n}(X_i),$$
$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_{1n}(X_i^*)-\overline{g}_{1n},\dots,\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g_{k_2n}(X_i^*)-\overline{g}_{k_2n}\Big),$$

где $\overline{g}_{\mathrm{in}}=\frac{1}{n}\sum\limits_{l=1}^n g_{in}(X_l), 1\leqslant i\leqslant k_2$. Определим множества событий

$$W_n=\Big\{X_1,\dots,X_n:\max_{1\leqslant i\leqslant k_1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|f_i(X_j)|<b_n^{-1},$$
$$\max_{1\leqslant i\leqslant k_2}\max_{1\leqslant j\leqslant n}|g_i(X_j)|<b_n^{-1}\Big\}.$$

Обозначим $\overline{W}_n$ дополнение W_n. По лемме 6.2 получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X})\in b_n\Omega)\leqslant\mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X})\in b_n\Omega|\overline{W}_n)\mathbf{P}(\overline{W}_n)+\mathbf{P}(W_n)\\&<\mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X})\in b_n\Omega|\overline{W}_n)\exp\{o(nb_n^2)\}+\exp\{-Cnb_n^2(1+o(1))\}\end{aligned} \tag{6.5}$$

и

$$\mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X}) \in b_n\Omega) \geqslant \mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X}) \in b_n\Omega|\overline{W}_n)\mathbf{P}(\overline{W}_n)$$
$$> \mathbf{P}_n(\vec{U}_n(\vec{X}) \in b_n\Omega|\overline{W}_n)\exp\{o(nb_n^2)\},$$

где постоянная C в (6.5) может быть выбрана произвольным образом.

Таким образом, лемма 6.2 следует из леммы 6.4 приводимой ниже. □

Лемма 6.4. *Для случайных векторов $\widetilde{U}_n(\vec{X})$ справедлив принцип больших уклонений, т.е.* (6.1) *и* (6.2) *справедливы для $\vec{U}_n(\vec{X}) = \widetilde{U}_n(\vec{X})$.*

По теореме Гартнера–Эллиса (см. [10, лемма 6.4]) лемма 6.4 следует из приводимой ниже леммы 6.5.

Лемма 6.5. *Пусть $f_i \in \Phi$, $g_j \in \Phi$ для всех $1 \leqslant i \leqslant k_1$, $1 \leqslant j \leqslant k_2$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}(nb_n^2)^{-1}\log\mathbf{E}_n\left[\exp\left\{b_n\sum_{l=1}^n t'\vec{f}_n(X_l) + b_n\sum_{l=1}^n s'(\vec{g}_n(X_l^*) - \overline{g}_n)\right\}\right]$$
$$= \langle t'\vec{f}, H\rangle - \frac{1}{2}t'R_f t - \frac{1}{2}s'R_g s, \quad (6.6)$$

где $\overline{g}_n = (\overline{g}_{1n}, \ldots, \overline{g}_{k_2 n})$.

Доказательство. Мы начнем с доказательства верхней границы в (6.6). Имеем

$$I_n = \mathbf{E}_n\left[\exp\left\{b_n\sum_{l=1}^n t'\vec{f}_n(X_l) + b_n\sum_{l=1}^n s'(\vec{g}_n(X_l^*) - \overline{g}_n)\right\}\right]$$
$$= \mathbf{E}_n\left[\exp\left\{b_n\sum_{l=1}^n t'\vec{f}_n(X_l)\right\}\prod_{l=1}^n \mathbf{E}_{\widehat{\mathbf{P}}_n}[\exp\{s'(\vec{g}_n(X_l^*) - \overline{g}_n)\}]\right]$$
$$= \mathbf{E}_n\left[\exp\left\{b_n\sum_{l=1}^n t'\vec{f}_n(X_l)\right\}\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^n \exp\{b_n s'(\vec{g}_n(X_l) - \overline{g}_n)\}\right)^n\right]$$
$$\leqslant \mathbf{E}_n\left[\exp\left\{b_n\sum_{l=1}^n t'\vec{f}_n(X_l)\right\}\left(1 + \frac{b_n^2}{2n}\sum_{l=1}^n (s'(\vec{g}_n(X_l) - \overline{g}_n))^2\right.\right.$$
$$\left.\left. + C(s,k_2)\frac{b_n^3}{6n}\sum_{l=1}^n |s'(\vec{g}_n(X_l) - \overline{g}_n)|^3\right)^n\right]$$

$$\leqslant \mathbf{E}_n\Bigg[\exp\Bigg\{b_n\sum_{l=1}^n t'\vec{f}_n(X_l)+\frac{b_n^2}{2}\sum_{l=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_l)-\overline{g}_n))^2$$
$$+C(s,k_2)b_n^3\sum_{l=1}^n|s'(\vec{g}_n(X_l)-\overline{g}_n)|^3\Bigg\}\Bigg]\doteq I_{1n}. \tag{6.7}$$

Первое неравенство в (6.7) следует из формулы Тейлора и

$$|s'(\vec{g_n}(x)-\overline{g}_n)|\leqslant|s|\ |\vec{g_n}(x)-\overline{g}_n|<|s|2k_2^{1/2}b_n^{-1}.$$

Обозначим $\phi_n(X_l)=s'(\vec{g}_n(X_l)-\mathbf{E}_n[\vec{g}_n(X_1)])$ для $1\leqslant l\leqslant n$.
Прямыми вычислениями получаем

$$\sum_{l=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_l)-\overline{g}_n))^2=\sum_{l=1}^n\phi_n^2(X_l)-n(s'\overline{g}_n-\mathbf{E}_n[s'\vec{g}_n(X_1)])^2. \tag{6.8}$$

Имеем

$$\sum_{l=1}^n|s'(\vec{g}_n(X_l)-\overline{g}_n)|^3$$
$$\leqslant\sum_{l=1}^n|\phi_n(X_l)|^3+8n|s'(\overline{g}_n-\mathbf{E}_n[\vec{g}_n(X_1)])|^3\doteq 8V_1+8nV_2. \tag{6.9}$$

Так как

$$|s'(\vec{g}_n(X_1)-\mathbf{E}[g_n(X_1)])|^3\leqslant|s|^{3/2}|\vec{g}_n(X_1)-\mathbf{E}_n[g_n(X_1)]|^{3/2}$$
$$=|s|^{3/2}\Bigg(\sum_{j=1}^{k_2}(g_{jn}(X_1)-\mathbf{E}_n[g_{jn}(X_1))^2\Bigg)^{3/2}<8|s|^3k_2^{3/2}b_n^{-3}, \tag{6.10}$$

то

$$b_n^3|V_1|=b_n^3\sum_{l=1}^n|\phi_n(X_l)|^3\chi(|\phi_n(X_l)|\leqslant\epsilon b_n^{-1}|s|)$$
$$+b_n^3\sum_{l=1}^n|\phi_n(X_l)|^3\chi(|\phi_n(X_l)|\geqslant\epsilon b_n^{-1}|s|) \tag{6.11}$$
$$\leqslant\epsilon|s|b_n^2\sum_{l=1}^n\phi_n^2(X_l)+8|s|^3k_2^{3/2}\sum_{l=1}^n\chi(|\phi_n(X_l)|\geqslant\epsilon b_n^{-1}|s|).$$

Применяя неравенство Иенсена, получаем

$$V_2 = n^{-3}\left|\sum_{l=1}^{n}\phi_n(X_l)\right|^3 \leqslant n^{-1}\sum_{l=1}^{n}|\phi_n(X_l)|^3 = n^{-1}V_1. \tag{6.12}$$

Используя (6.8)–(6.12), получаем

$$\begin{aligned} I_{1n} \leqslant \mathbf{E}_n\Bigg[\exp\Bigg\{ & b_n\sum_{l=1}^{n}t'\vec{f}_n(X_l) + \frac{b_n^2}{2}(1-2C(s,k_2)\epsilon_n)\sum_{l=1}^{n}(\phi_n^2(X_l) \\ & - \frac{b_n^2}{2n}\left(\sum_{l=1}^{n}\phi_n(X_l)\right)^2 + C(s,k_2)|s|^3\sum_{i=1}^{n}\chi(|\phi_n(X_l)| \geqslant \epsilon b_n^{-1}|s|)\Bigg\}\Bigg] \\ \doteq \mathbf{E}_n[W_n], \end{aligned} \tag{6.13}$$

где $\epsilon = \epsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$. Для всех $r > 0$ определим события

$$A_n = A_{nr} \doteq \{X_1, \ldots, X_n : s'\overline{g}_n - \mathbf{E}_n[s'g_n(X_1)] < rb_n\}.$$

Обозначим $\overline{A}_n$ дополнение к A_n.

Справедливо равенство

$$\widetilde{I}_n = \mathbf{E}_n[W_n\chi(A_n)] + \mathbf{E}_n[W_n\chi(\overline{A}_n)] \doteq U_{1n} + U_{2n}.$$

Пусть A_n имеет место. Тогда

$$\frac{r^2b_n^4}{2n}\left(\sum_{l=1}^{n}\phi_n(X_l)\right)^2 = \frac{nb_n^2}{2}(s'\overline{g}_n - \mathbf{E}_n[s'\vec{g}_n(X)])^2 < \frac{nr^2b_n^4}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \log[U_{1n}] \leqslant \log\mathbf{E}_n\Bigg[\exp\Bigg\{ & b_n\sum_{l=1}^{n}t'\vec{f}_n(X_l) + \frac{b_n^2}{2}\sum_{l=1}^{n}\phi_n^2(X_l)(1+2C(s,k_2)\epsilon) \\ & +C(s,k_2)|s|^3\sum_{l=1}^{n}\chi(|\phi_n(X_l)| \geqslant \epsilon b_n^{-1}) + O(nr^2b_n^4)\Bigg\}\Bigg] \\ = n\log\mathbf{E}_n\Big[\exp\Big\{ & b_nt'\vec{f}_n(X_1) + \frac{b_n^2}{2}\phi_n^2(X_1)(1+2C(s,k_2)\epsilon) \\ & +C(s,k_2)|s|^3\chi(|\phi_n(X_1)| \geqslant \epsilon b_n^{-1}) + O(r^2b_n^4)\Big\}\Big]. \end{aligned}$$

Разлагая в ряд Тейлора, получаем

$$\log U_{1n} \leqslant n\log\mathbf{E}_n\Bigg[1 + b_nt'\vec{f}_n(X_1) + \frac{b_n^2}{2}(t'\vec{f}_n(X_1))^2$$

$$+\frac{b_n^2}{2}\phi_n^2(X_1)(1+2C(s,k_2)\epsilon)+C(s,t,k_1,k_2)\omega_n+O(r^2b_n^4)\Big],$$

где

$$\omega_n=\omega_{1n}+\omega_{2n}+\omega_{3n}+\omega_{4n}+\omega_{5n},$$
$$\omega_{1n}=\frac{b_n^3}{6}|t'\vec{f}_n(X_1)|^3,\quad \omega_{2n}=3\frac{b_n^3}{2}|t'\vec{f}_n(X_1)|\phi_n^2(X_1),\quad \omega_{3n}=\frac{b_n^4}{8}\phi_n^4(X_1),$$
$$\omega_{4n}=\frac{b_n^4}{12}(t'\vec{f}_n(X_1))^2\phi_n^2(X_1),\quad \omega_{5n}=\chi(|\phi_n(X_1)|\geqslant \epsilon b_n^{-1}).$$

Имеем

$$\omega_{1n}\leqslant b_n^3|t'\vec{f}_n(X_1)|^3\chi(|t'\vec{f}_n(X_1)|<\epsilon b_n^{-1})+\chi(\epsilon b_n^{-1}<|t'\vec{f}_n(X_1)|<b_n^{-1})$$
$$\doteq \omega_{1n1}+\omega_{1n2},$$

$$\omega_{2n}\leqslant b_n^3|t'\vec{f}_n(X_1)|\phi_n^2(X_1)\chi(|t'\vec{f}_n(X_1)|<\epsilon b_n^{-1})$$
$$+C(s,t,k_1,k_2)\chi(\epsilon b_n^{-1}<|t'\vec{f}_n(X_1)|<b_n^{-1})\doteq \omega_{2n1}+\omega_{2n2},$$

$$\omega_{3n}\leqslant b_n^4\phi_n^4(X_1)\chi(\phi_n(X_1)<\epsilon b_n^{-1})+C\chi(\epsilon b_n^{-1}<\phi_n(X_1)<cb_n^{-1})$$
$$\doteq \omega_{3n1}+\omega_{3n2},$$

$$\omega_{4n}\leqslant b_n^4(t'\vec{f}_n(X_1))^2\phi_n^2(X_1)\chi(|t'\vec{f}_n(X_1)|<\epsilon b_n^{-1})$$
$$+c\chi(\epsilon b_n^{-1}<|t'\vec{f}_n(X_1)|<b_n^{-1})\doteq \omega_{4n1}+\omega_{4n2}.$$

Используя (3.1), получаем

$$\mathbf{E}_n[\omega_{1n1}]\leqslant c\epsilon|t|b_n^2\mathbf{E}_n[(t'\vec{f}_n(X_1))^2],\quad \mathbf{E}_n[\omega_{2n1}]\leqslant c\epsilon|t|b_n^2\mathbf{E}_n[\phi_n^2(X_1)],$$
$$\mathbf{E}_n[\omega_{3n1}]\leqslant c\epsilon^2|s|^2b_n^2\mathbf{E}_n[\phi_n^2(X_1)],\qquad \mathbf{E}_n[\omega_{4n1}]\leqslant c\epsilon^2|t|^2b_n^2\mathbf{E}_n[\phi_n^2(X_1)]$$

и

$$\mathbf{E}_n[\omega_{5n}]\leqslant \epsilon^{-2}b_n^2\mathbf{E}_n[\phi_n^2(X_1)\chi(|\phi_n(X_i)|\geqslant \epsilon b_n^{-1})]=o(\epsilon^{-2}b_n^2),\tag{6.14}$$

$$\begin{aligned}&\mathbf{E}_n[\chi(\epsilon b_n^{-1}<|t'\vec{f}_n(X_1)|<b_n^{-1})]\\&\leqslant \epsilon^{-2}b_n^2\mathbf{E}_n[|t'\vec{f}_n(X_1)|^2\chi(\epsilon b_n^{-1}<|t'\vec{f}_n(X_1)|)]=o(\epsilon^{-2}b_n^2),\end{aligned}\tag{6.15}$$

где последние неравенства в (6.14) и (6.15) следуют из условия A и (3.5), (3.6).

Отсюда получаем $\mathbf{E}_n[\omega_n] = o(b_n^2)$. Следовательно,

$$\log(U_{1n}) \leqslant -\frac{nb_n^2}{2}\left(2\langle t'\vec{f}, H\rangle - t'R_f t - s'R_g s\right)(1+O(1)) \doteq v_n.$$

Применяя неравенство Гёльдера, имеем

$$U_{2n} \leqslant \left(\mathbf{E}_n[W_n^{1+\delta}]\right)^{\frac{1}{1+\delta}} (\mathbf{P}(\overline{A}_n))^{\frac{\delta}{1+\delta}}. \tag{6.16}$$

Используя (6.13), получаем

$$\mathbf{E}_n[W_n^{1+\delta}] \leqslant \mathbf{E}_n\Bigg[\exp\Bigg\{(1+\delta)\Bigg(b_n\sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)$$
$$+ b_n^2\sum_{i=1}^n \phi_n^2(X_i)(1+2C(s,k_2)\epsilon) + 2C(s,k_2)\sum_{i=1}^n \chi(\phi_n(X_i) > \epsilon b_n^{-1})\Bigg)\Bigg\}\Bigg].$$

Отсюда, повторяя оценки для U_{1n}, получаем

$$\mathbf{E}_n[W_n^{1+\delta}]$$
$$\leqslant \exp\left\{-\frac{(1+\delta)nb_n^2}{2}(2 < t'\vec{f}, H > -t'R_f t - s'R_g s)(1+O(1))\right\}. \tag{6.17}$$

Заметим, что из (3.1) и B1 следует (3.4) и из (3.4) следует

$$\lim_{n\to\infty}(nr^2b_n^2)^{-1}\log(n\mathbf{P}(|f(X)| > rnb_n)) = -\infty$$

для всех $r > 1$.

Отсюда, по теореме 2.4 в [2], получаем

$$\log \mathbf{P}_n(\overline{A}_n) \leqslant -cr^2nb_n^2. \tag{6.18}$$

Из (6.16)–(6.18) следует

$$U_{2n} = o(U_{1n}),$$

если r достаточно велико. Доказательство верхней границы для I_n закончено. □

Доказательство нижней границы основано на аналогичных оценках. Обозначим

$$B_n = \big\{x_1,\dots,x_n : |f_{ni}(x_s)| < \epsilon b_n^{-1},\ |g_{nj}(x_s)| < \epsilon b_n^{-1},$$
$$1 \leqslant s \leqslant n,\ 1 \leqslant i \leqslant k_1,\ 1 \leqslant j \leqslant k_2\big\}.$$

Из (3.1), (6.14), (6.15) следует

$$\mathbf{P}_n\big(|f_{ni}(X_1)| > \epsilon b_n^{-1}\big) \\ < \epsilon^{-2} b_n^2 \mathbf{E}_n[f_{ni}^2(X_1)\chi(|f_{ni}(X_1)| > \epsilon b_n^{-1})] = o(\epsilon^{-2} b_n^2).$$

Аналогично оценивая $\mathbf{P}_n(|g_{ni}(X_1)| > \epsilon b_n^{-1})$, получаем

$$\mathbf{P}(B_n) = \prod_{i=1}^{k_1}(1 - \mathbf{P}(|f_{ni}(X_1)| > \epsilon b_n^{-1}))^n \prod_{i=1}^{k_2}(1 - \mathbf{P}(|g_{ni}(X_1)| > \epsilon b_n^{-1}))^n \\ = \exp\{-o(nb_n^2)\}.$$

Отсюда

$$I_n \geqslant \mathbf{E}_n\Big[\exp\big\{b_n \sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)\big\}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \exp\{b_n s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n)\}\Big)^n \chi(B_n)\Big]$$

$$= \mathbf{E}_n\Big[\exp\big\{b_n \sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)\big\}\Big(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \exp\{b_n s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n)\}\Big)^n \Big| B_n\Big]$$

$$\times \exp\{-o(nb_n^2)\} \doteq I_{2n} \exp\{-o(nb_n^2)\}.$$

Разлагая в ряд Тейлора, получаем

$$I_{2n} \geqslant \mathbf{E}_n\Big[\exp\big\{b_n \sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)\big\}\Big(1 + \frac{b_n^2}{2n}\sum_{i=1}^n (s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n))^2 \\ - C(s,k_2)\frac{b_n^3}{n}\sum_{i=1}^n |s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n)|^3\Big)^n \Big| B_n\Big] \geqslant \\ \geqslant \mathbf{E}_n\Big[\exp\big\{b_n \sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)\big\} \\ \times \Big(1 + \frac{b_n^2}{2n}(1 - 2\epsilon)\sum_{i=1}^n (s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n))^2\Big)^n \Big| B_n\Big] \doteq I_{3n},$$

где последнее неравенство следует из

$$\sum_{i=1}^n |s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n)|^3 \leqslant 2\epsilon b_n^{-1} \sum_{i=1}^n (s'(\vec{g}_n(X_i) - \overline{g}_n))^2.$$

Так как $\ln(1 + x) \geqslant 1 + x - x^2$ для $x > 0$, то

$$
\begin{aligned}
I_{3n} &= \mathbf{E}_n\Bigg[\exp\left\{b_n\sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)\right\}\\
&\quad\times\exp\left\{n\ln\left(1+\frac{b_n^2}{2}(1-2\epsilon)\sum_{i=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_i)-\overline{g}_n))^2\right)\right\}\Bigg|B_n\Bigg]\\
&\geqslant \mathbf{E}_n\Bigg[\exp\left\{b_n\sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)+\frac{b_n^2}{2}(1-2\epsilon)\sum_{i=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_i)-\overline{g}_n))^2\right.\\
&\quad\left.-\frac{b_n^4}{4n}\left(\sum_{i=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_i)-\overline{g}_n))^2\right)^2\right\}\Bigg|B_n\Bigg]\\
&\geqslant \mathbf{E}_n\Bigg[\exp\left\{b_n\sum_{i=1}^n t'\vec{f}_n(X_i)\right.\\
&\quad\left.+\frac{b_n^2}{2}(1-2\epsilon-4\epsilon^2)\sum_{i=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_i)-\overline{g}_n))^2\right\}\Bigg|B_n\Bigg]\doteq I_{4n},
\end{aligned}
$$

где последнее неравенство следует из

$$
\frac{b_n^4}{4n}\left(\sum_{i=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_i)-\overline{g}_n))^2\right)^2\leqslant\epsilon^2 b_n^2\sum_{i=1}^n(s'(\vec{g}_n(X_i)-\overline{g}_n))^2.
$$

Рассуждая аналогично доказательству верхней границы, получаем

$$
\begin{aligned}
&(nb_n^2)^{-1}\ln I_{4n}\\
&\quad=-\frac{nb_n^2}{2}\left(-2<t'\vec{f},H>-t'R_ft-(1-2\epsilon-2\epsilon^2)s'R_gs\right)(1+O(1)).
\end{aligned}
$$

Так как выбор $\epsilon>0$ произволен, доказательство нижней границы и доказательство леммы 6.5 завершено. □

§7. Доказательство теоремы 3.2

Достаточно показать, что

$$
-\log\mathbf{P}\left(\sum_{i=1}^n Y_i^*>ne_n\right)=o(ne_n^2). \tag{7.1}
$$

Определим события $A_{ni}=U_{ni}\cup V_{ni}, 1\leqslant i\leqslant n$, где

$$
U_{ni}=\{Y_i:|Y_i|<b_n^{-1}\}\ \text{ и }\ V_{ni}=\{Y_i:r_n<Y_i\}.
$$

Обозначим $A_n = \bigcap\limits_{i=1}^{n} A_{ni}$. Используя (3.1), получаем

$$\mathbf{P}(A_n) > 1 - \mathbf{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant n} |Y_i| > b_n^{-1}\Big) > 1 - n\mathbf{P}(|Y_1| > b_n^{-1}) = 1 + o(1). \quad (7.2)$$

Обозначим $\mathbf{P}_{cn}$ условную вероятностную меру Y_1 при условии $Y_1 \in A_{n1}$.

Используя (7.2), получаем

$$\mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i^* > ne_n\Big) \geqslant \mathbf{P}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i^* > ne_n | A_n\Big)\mathbf{P}(A_n)$$
$$= \mathbf{P}_{cn}\Big(\sum_{i=1}^{n} Y_i^* > ne_n\Big)(1 + o(1)).$$

Таким образом, достаточно доказать (7.1) для вероятностных мер $\mathbf{P}_{cn}$ вместо $\mathbf{P}$. Обозначим $p_n = \mathbf{P}_{cn}(Y_1 > r_n)$. В силу (3.1), получаем $np_n \to 0$ при $n \to \infty$. Определим события

$W_n(k_n) = \{\, Y_1, \ldots, Y_n : n - k_n$ случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ принадлежит $(0, b_n^{-1})$ и k_n случайных величин $Y_1, \ldots, Y_n$ принадлежит $(r_n, \infty)\,\}$.

Предположим, что $k = k_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и

$$\lim_{n\to\infty} k_n np_n = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} (r_n e_n)^{-1} \log \frac{ne_n}{r_n k_n} = 0. \quad (7.3)$$

Применяя формулу Стирлинга, получаем

$$\begin{aligned}
v_n &\doteq \mathbf{P}_{cn}(W_n(k)) = \frac{n!}{(n-k)!k!} p_n^k (1 - p_n)^{n-k} \\
&= (2\pi)^{-1/2} \exp\{(n + 1/2)\log n - (n - k + 1/2)\log(n - k) \\
&\quad - (k + 1/2)\log k + k \log p_n + (n - k)\log(1 - p_n)\}(1 + o(1)) \\
&= \exp\Big\{ - (n - k + 1/2)\log \frac{n - k}{n(1 - p_n)} - k \log \frac{k}{np_n}(1 + o(1))\Big\} \\
&= \exp\{-n(1 - k/n)(-k/n + p_n)(1 + o(1)) - k \log[k/(np_n)](1 + o(1))\} \\
&= \exp\{(k - np_n - k \log(k/(np_n))(1 + o(1))\} \\
&= \exp\Big\{ - k \log \frac{k}{np_n}(1 + o(1))\Big\}.
\end{aligned} \quad (7.4)$$

Из (3.2), (7.4) следует, что мы можем выбрать $k = k_n$ так, что

$$|\log v_n| = O(k_n|\log(np_n)|) = o(ne_n^2). \tag{7.5}$$

Определим случайную величину l_n равную числу Y_i^*, $1 \leqslant i \leqslant n$, таких что $Y_i^* \in (r_n, \infty)$. Обозначим $u_n = c\frac{ne_n}{r_n} = c\frac{ne_n^2}{r_n e_n}$ с $c > 1$ и положим $m_n = [u_n]$. Предположим, что $\frac{u_n}{k_n} \to \infty$ при $n \to \infty$. Тогда, оценивая аналогично (7.4), получаем

$$\mathbf{P}_c(l_n > u_n|W_n(k_n)) = \exp\Big\{-u_n \log\frac{u_n}{k_n}(1 + o(1))\Big\}. \tag{7.6}$$

Обозначим $c_1 = c - 1$. Обозначим $Y^{1*} \leqslant \ldots \leqslant Y^{n*}$ порядковые статистики $Y_1^*, \ldots, Y_n^*$.

Событие $\{Y_1^*, \ldots, Y_n^* : \sum\limits_{i=1}^{n} Y_i^* > ne_n\}$ содержит событие

$$U_n = \Big\{Y_1^*, \ldots, Y_n^* : \sum_{j=1}^{n-m_n} Y^{j*} > -c_1 ne_n, |Y^{j*}| < b_n^{-1},$$

$$1 \leqslant j \leqslant n - m_n, Y^{t*} > r_n, n - m_n < t \leqslant n\Big\},$$

так как если U_n имеет место, то

$$\sum_{t=n-m_n-1}^{n} Y^{t*} > r_n m_n = cr_n\frac{ne_n}{r_n} = cne_n.$$

Следовательно, достаточно показать, что

$$\log \mathbf{P}_c(U_n) = o(ne_n^2). \tag{7.7}$$

Имеем

$$\mathbf{P}_c(U_n) \geqslant \mathbf{P}_c(l_n = m_n)\mathbf{P}_c\Big(\sum_{i=1}^{n-m_n} Y_i^* > -c_1 ne_n, |Y_i^*| < b_n^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n - m_n\Big)$$

$$\geqslant \mathbf{P}_c(l_n = m_n|W_n(k_n))$$

$$\times \mathbf{P}_c(W_n(k_n))\mathbf{P}_c\Big(\sum_{i=1}^{n-m_n} Y_i^* > -c_1 ne_n, |Y_i^*| < b_n^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n - m_n\Big).$$

Обозначим $q_n = \mathbf{P}_c(|Y_1| < b_n^{-1})$. Определим условное распределение вероятностей $\mathbf{P}_{b_n}$ случайной величины Y_1 при условии $|Y_1| < b_n^{-1}$.

Имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_c(|Y_1^*| < b_n^{-1}) &= \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!i!} q_n^i (1-q_n)^{n-i} \frac{i}{n} \\ &= q_n \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(n-i)!(i-1)!} q_n^{i-1} (1-q_n)^{n-i} = q_n.\end{aligned} \tag{7.8}$$

Кроме того,

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_c\Big(\sum_{i=1}^{n-m_n} Y_i^* > -c_1 n e_n \,|\, |Y_i^*| < b_n^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n-m_n\Big) \\ &\quad = 1 - \mathbf{P}_c\Big(\sum_{i=1}^{n-m_n} Y_i^* < -c_1 n e_n \,|\, |Y_i^*| < b_n^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n-m_n\Big).\end{aligned} \tag{7.9}$$

Применяя неравенство Чебышева и (7.8), получаем

$$\begin{aligned}&\mathbf{P}_c\Big(\sum_{i=1}^{n-m_n} Y_i^* < -c_1 n e_n \,|\, |Y_i^*| < b_n^{-1}, 1 \leqslant i \leqslant n-m_n\Big) \\ &\leqslant \frac{n-m_n}{c_1^2 (n-m_n)^2 e_n^2} \mathbf{E}_c[\mathrm{Var}_{\widehat{\mathbf{P}}_n}(Y_1^* \,|\, |Y_1^*| < b_n^{-1})] \\ &= \frac{q_n^2}{c_1^2 (n-m_n) e_n^2} \sum_{t=0}^{n} C_n^t q_n^t (1-q_n)^{n-t} \mathbf{E}_{b_n} \\ &\quad \times \left[(n-t)^{-1} \sum_{i=1}^{n-t} \left(Y_i - (n-t)^{-1} \sum_{j=1}^{n-t} Y_j\right)^2\right] \\ &= \frac{q_n^2}{c_1^2 (n-m_n) e_n^2} \sum_{t=0}^{n} C_n^t q_n^t (1-q_n)^{n-t} \frac{t-1}{t} \mathrm{Var}_{b_n}[Y] \\ &\leqslant \frac{q_n^2}{c_1^2 (n-m_n) e_n^2} \mathrm{Var}_{b_n}[Y].\end{aligned} \tag{7.10}$$

и

$$\lim_{n\to\infty} q_n^2 \mathrm{Var}_{b_n}[Y] = \mathrm{Var}\,[Y]. \tag{7.11}$$

Используя (7.4), (7.6), получаем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{P}_c(l_n = m_n | W_n(k_n))\mathbf{P}_c(W_n(k_n)) \\
&\quad = \exp\left\{-\frac{cne_n^2}{r_n e_n}\log\frac{ne_n}{r_n k_n} - ck_n \log\frac{k_n}{np_n}(1+o(1))\right\} \\
&\quad = \exp\{-o(ne_n^2)\},
\end{aligned} \tag{7.12}$$

где последнее неравенство следует из (7.3), (7.5). Наконец (7.7) следует из (7.9)–(7.12). Доказательство теоремы 3.2 завершено. □

Литература

1. A. K. Aleskevičiene, *Large and moderate deviations for L-statistics.* — Lithuanian Math. J. **31** (1991), 145–156.
2. M. A. Arcones, *Moderate deviations of empirical processes.* — In: Stochastic Inequalities and Applications, E. Giné, C. Houdré, and D. Nualart (eds.) Birkhäuser Boston (2003), pp. 189–212.
3. M. A. Arcones, *Large deviations for M-estimators.* — Ann. Inst. Math. Statist. **58** (2006), 21–52.
4. А. А. Боровков, А. А. Могульский, *О вероятностях больших уклонений в топологических пространствах.* II. — Сиб. матем. журнал, **21**, 5 (1980), 12–26.
5. E. Bolthausen, *On the probability of large deviations in Banach spaces.* — Ann. Probab **12** (1984), 427-435.
6. N. R. Chaganty, R. L. Karandikar, *Some properties of the Kullback–Leibler number.* — Sankhyā, A, **58** (1996), 69-80.
7. N. R. Chaganty, *Large deviations for joint distributions and statistical applications.* — Sankhyā, A, (1997), 147–166.
8. A. de Acosta, *On large deviations of empirical measures in the τ-topology.* — J. Appl. Probab. **31A** (1994), 41–47.
9. R. Dasgupta, *Bootstrap of deviation probabilities with applications.* — J. Multivariate Anal. **101**, 9 (2010), 2137–2148.
10. A. Dembo, O. Zeitouni. *Large Deviations Techniques and Applications.* Jones and Bartlett, Boston, 1993.
11. M. D. Donsker, S. R. S. Varadhan, *Asymptotic evaluation of certain Markov process expectations for large time III*, Comm. Pure Appl. Math. **29** (1976), 389-461.
12. B. Efron, *Bootstrap methods: another look at the jackknife.* — Ann. Stat. **7** (1979), 1–26.

13. P. Eichelsbacher, U. Schmock, *Large deviations of U-empirical measures in strong topologies and applications.* — Ann. Inst. Henri Poincaré. Probab. Statist. **38** (2002), 779–797.
14. P. Eichelsbacher, M. Löwe. *Moderate deviations for i.i.d. random variables.* — ESAIM: Probab. Statist. **7** (2003), 207–216.
15. M. S. Ermakov, *Importance sampling for simulation of moderate deviation probabilities of statistics.* — Statist. Decision, **25** (2007), 265–284.
16. F. Gao, X. Zhao, *Delta method in large deviations and moderate deviations for estimators.* — Ann. Statist. **39** (2011), 1211–1240
17. P. Groeneboom, J. Oosterhoff, F. H. Ruymgaart, *Large deviation theorems for empirical probability measures.* — Ann. Probab. **7** (1979), 553–586.
18. P. Hall, *On the relative performance of bootstrap and Edgeworth approximations of a distribution function.* — J. Multivariate Anal. **35**, (1990), 108–129.
19. T. Inglot, W. C. M. Kallenberg, T. Ledwina. *Strong moderate deviation theorems.* – Ann. Probab. **20** (1992), 987–1003.
20. J. Jureckova, W. C. M. Kallenberg, N. Veraverbeke, *Moderate and Cramer type large deviation theorems for M-estimators.* — Statist. Probab. Lett. **6** (1988), 191–199.
21. C. Leonard, J. Najim, *An extension of Sanov's theorem. Application to the Gibbs conditioning principle.* — Bernoulli **8**, (2002), 721–743.
22. D. Li, A. Rosalski, D. K. Al-Mutairi, *A large deviation principle for bootstrapped sample means.* — Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2001), 2133–2138.
23. V. V. Petrov, *Sums of Independent Random Variables.* Springer, New York, 1975.
24. I. Sanov. *О вероятностях больших уклонений случайных величин.* — Матем. сб. **42** (1957), 70–95.
25. R. J. Serfling, *Approximation Theorems of Mathematical Statistics.* Wiley, New York, 1980.
26. Л. Саулис, В.Статулявичус, *Предельные теоремы для больших уклонений.* Мокслас, Вильнюс, 1989.
27. A. W. van der Vaart, J. A. Wellner, *Weak Convergence and Empirical Processes with Applications to Statistics.* Springer, New York, 1996.
28. A. Wood, *Bootstrap relative errors and subexponential destributions.* – Bernoulli **6** (2000), 809–834.

Ermakov M. S. Large Deviation Principle for moderate deviation probabilities of empirical bootstrap measure.

We prove two LDPs (LDP) in the zone of moderate deviation probabilities. First we establish LDP for the conditional distributions of moderate deviations of empirical bootstrap measure given empirical probability measure. Second we establish LDP for the joint distribution of empirical measure and empirical bootstrap measure. Using these LDPs, on the base of contraction principle, we deduce similar LDPs for statistical functionals having the Hadamard derivatives. The LDPs for moderate deviations of

empirical quantile processes and empirical bootstrap copula function are given as illustration of these results.

Институт проблем машиноведения РАН
Большой пр.,В. О., 61
199178 С.-Петербург, Россия
С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: erm2512@mail.ru

Поступило 12 ноября 2012 г.