Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

Ю. С. Елисеева

МНОГОМЕРНЫЕ ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ КОНЦЕНТРАЦИИ ВЗВЕШЕННЫХ СУММ НЕЗАВИСИМЫХ ОДИНАКОВО РАСПРЕДЕЛЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

§1. Введение

Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Под функцией концентрации случайного $\mathbf{R}^d$-значного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ будем понимать

$$Q(F, \lambda) = \sup_{x \in \mathbf{R}^d} \mathbf{P}(Y \in x + \lambda B), \quad \lambda > 0,$$

где $B = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$. Пусть $a = (a_1, \dots, a_n) \neq 0$, где $a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}) \in \mathbf{R}^d$, $k = 1, \dots, n$. В данной статье изучается поведение функции концентрации суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$ в зависимости от арифметической структуры векторов a_k. Этот вопрос, называемый проблемой Литтлвуда–Оффорда, также освещается а работах [1–7]. Классические одномерные результаты были получены Литтлвудом и Оффордом [8], а также Эрдёшем [9] для случая, когда независимые одинаково распределенные случайные величины X_k принимают значения ± 1 с вероятностями $1/2$, а целочисленные коэффициенты a_k не равны нулю. Было показано, что тогда функция концентрации имеет порядок $O(n^{-1/2})$ (аналогичная оценка справедлива и для многомерной проблемы Литтлвуда–Оффорда, см. [10]). Если же дополнительно предположить, что все a_k различны, то оценка функции концентрации может быть значительно улучшена до порядка $O(n^{-3/2})$ (см. [11, 12]). В последнее время поведение функций концентрации взвешенных сумм S_a активно исследуется в связи с изучением распределений собственных чисел случайных матриц.

Ключевые слова: многомерные функции концентрации, суммы независимых случайных величин, проблема Литтлвуда–Оффорда.

Работа поддержана грантом РФФИ 10-01-00242, и грантом НИР СПбГУ 6.38.672.2013.

Введем некоторые обозначения. Пусть F_a – распределение суммы $S_a = \sum\limits_{k=1}^{n} X_k a_k$, а G – распределение симметризованной случайной величины $\widetilde{X} = X_1 - X_2$. Обозначим

$$M(\tau) = \tau^{-2} \int\limits_{|x|\leqslant\tau} x^2\, G\{dx\} + \int\limits_{|x|>\tau} G\{dx\} = \mathbf{E} \min\left\{\widetilde{X}^2/\tau^2, 1\right\}, \quad \tau > 0. \quad (1)$$

Одной и той же буквой c мы будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными даже в пределах одной формулы. Запись $A \ll B$ означает, что $|A| \leqslant cB$ и $B > 0$. Аналогично, $A \ll_d B$, если $|A| \leqslant c^d B$ и $B > 0$. Заметим, что $\ll_d$ допускает экспоненциальную зависимость констант от размерности d. Будем также писать $A \asymp B$, если $A \ll B$ и $B \ll A$, и $A \asymp_d B$, если $A \ll_d B$ и $B \ll_d A$. Для $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathbf{R}^d$ мы будем обозначать $\|x\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_d^2$ и $\|x\|_\infty = \max_j |x_j|$. Скалярное произведение в $\mathbf{R}^d$ обозначим $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$. Произведение вектора $t = (t_1, \ldots, t_d) \in \mathbf{R}^d$ и мультивектора a будем обозначать $t \cdot a = (\langle\, t, a_1\rangle, \ldots, \langle\, t, a_n\rangle) \in \mathbf{R}^n$.

Простейшие свойства одномерных функций концентрации хорошо изучены (см., например, монографии [13–15]). Известно, что

$$Q(F, \mu) \ll_d (1 + \mu/\lambda)^d\, Q(F, \lambda)$$

для любых μ, $\lambda > 0$. Следовательно,

$$Q(F, c\lambda) \asymp_d Q(F, \lambda), \quad (2)$$

и

$$\text{если} \;\; Q(F, \lambda) \ll K, \;\; \text{то} \;\; Q(F, \mu) \ll_d K(1 + (\mu/\lambda))^d. \quad (3)$$

Напомним также, что для любого одномерного распределения F справедливы неравенства Эссеена и Колмогорова–Рогозина [16] (см. также [14] и [15]). Их многомерные аналоги можно найти, например, в работах [17–20].

Для случайного вектора Y с распределением $F = \mathcal{L}(Y)$ в $\mathbf{R}^d$ неравенство Эссеена выглядит следующим образом (см. лемму 3.4, [3])

$$Q(F, \sqrt{d}) \ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} |\widehat{F}(t)|\, dt, \quad (4)$$

где $\widehat{F}(t) = \mathbf{E}\exp(i\langle t, Y\rangle)$ – характеристическая функция случайного вектора Y. Пусть $\int\limits_{\mathbf{R}^d} |\widehat{F}(u)|\,du < \infty$ (в противном случае этого можно добиться сглаживанием) и предположим дополнительно, что распределение F симметрично и $\widehat{F}(t) \geqslant 0$ при всех $t \in \mathbf{R}$, тогда из соотношения (4), примененного к мере $\dfrac{\widehat{F}(t)\,dt}{\int\limits_{\mathbf{R}^d} \widehat{F}(u)\,du}$, следует, что

$$Q(F, \sqrt{d}) \gg_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{F}(t)\,dt. \tag{5}$$

Оценки такого вида, но с другой зависимостью от размерности d присутствуют в работе [21]. Тем самым,

$$Q(F, \sqrt{d}) \asymp_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{F}(t)\,dt. \tag{6}$$

Использование соотношения (6) позволит нам существенно упростить рассуждения, использованные при рассмотрении проблемы Литтлвуда–Оффорда в работах [3] и [22].

Приведем здесь также многомерное обобщение неравенства Колмогорова–Рогозина.

Предложение 1. *Пусть $Y_1, \ldots, Y_n$ – независимые случайные векторы с распределениями $F_k = \mathcal{L}(Y_k)$. Пусть $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ – положительные числа, $\lambda_k \leqslant \lambda$ $(k = 1, \ldots, n)$. Тогда*

$$Q\Big(\mathcal{L}\big(\sum_{k=1}^n Y_k\big), \lambda\Big) \ll \lambda \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 \left(1 - Q(\widetilde{F}_k, \lambda_k)\right)\Big)^{-1/2}, \tag{7}$$

где $\widetilde{F}_k$ – функция распределения соответствующего симметризованного случайного вектора.

Зигель [18] уточнил результат предложения 1, показав, что справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. *В условиях предложения* 1 *выполняется*

$$Q\Big(\mathcal{L}\big(\sum_{k=1}^n Y_k\big), \lambda\Big) \ll \lambda \Big(\sum_{k=1}^n \lambda_k^2 M_k(\lambda_k)\Big)^{-1/2}. \tag{8}$$

Одномерные варианты этого результата и его улучшения присутствуют в работах [13–15, 23–28]. Заметим, что константы, фигурирующие в приведенных выше предложениях, не зависят от размерности пространства и являются абсолютными постоянными. Однако существуют полученные ранее оценки типа Колмогорова–Рогозина, в которых константы зависят от размерности (см., например, [23, 29]).

Проблема Литтлвуда–Оффорда рассматривалась в работах [1–6, 22]. В этой статье мы сформулируем и докажем многомерные обобщения результатов [6], которые являются уточнениями результатов [3] и [22].

Сформулируем результаты [3] и [22] в единых обозначениях, чтобы было удобнее их сравнивать.

Фридланд и Содин [22], упростив рассуждения из работы Рудельсона и Вершинина [2], получили следующий результат.

Предложение 3. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины, причем $Q(\mathcal{L}(X), 1) \leqslant 1 - p$, где $p > 0$, и пусть $a_1, \dots, a_n \in \mathbf{R}^d$. Если для некоторых $0 < D < d$ и $\alpha > 0$ выполняется условие*

$$\sum_{k=1}^{n} (\langle t, a_k \rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2 \quad \text{для всех} \quad m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}, \quad t \in \mathbf{R}^d,$$

$$\text{таких что} \quad \max_k |\langle t, a_k \rangle| \geqslant 1/2, \quad \|t\| \leqslant D, \tag{9}$$

то

$$Q(F_a, d/D) \ll_d \exp(-cp\alpha^2) + \Big(\frac{\sqrt{d}}{\sqrt{p}\, D}\Big)^d \big(\det \mathbb{N}\big)^{-1/2}, \tag{10}$$

где

$$\mathbb{N} = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{N}_k, \quad \mathbb{N}_k = \begin{pmatrix} a_{k1}^2 & a_{k1}a_{k2} & \dots & a_{k1}a_{kd} \\ a_{k2}a_{k1} & a_{k2}^2 & \dots & a_{k2}a_{kd} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{kd}a_{k1} & \dots & \dots & a_{kd}^2 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$a_k = (a_{k1}, \dots, a_{kd}), \quad k = 1, \dots, n.$$

Заметим, что в работе [22] был сформулирован и доказан более слабый вариант утверждения предложения 3. А именно, в правой части неравенства (10) фигурировало p^2 вместо p. Возможность заменить p^2 на p была замечена, например, авторами работы [3] (см. предложение 4). Она следует из простейших свойств функции концентрации.

Кроме того, в работе [22] предполагалось, что $0 < D < d$, а в левой части неравенства (10) вместо $Q(F_a, d/D)$ фигурировала величина $Q(F_a, 1)$. Однако при $0 < D < d$ получаем, что $d/D > 1$ и величина $Q(F_a, 1)$ может быть существенно меньше, чем $Q(F_a, d/D)$. Но если бы авторы [22] применили свой результат при $D = d$, они бы вывели из него неравенство для любого $D > 0$ и с $Q(F_a, d/D)$ вместо $Q(F_a, 1)$ так же просто, как мы выведем ниже следствие 1 из теоремы 1.

Заметим еще, что при $\max\limits_k |\langle t, a_k\rangle| \leqslant 1/2$ мы имеем

$$\big(\operatorname{dist}(t\cdot a, \mathbf{Z}^n)\big)^2 = \sum_{k=1}^n \min_{m_k\in\mathbf{Z}} (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2 = \sum_{k=1}^n \langle t, a_k\rangle^2\,, \tag{12}$$

где

$$\operatorname{dist}(t\cdot a, \mathbf{Z}^n) = \min_{m\in\mathbf{Z}^n} \|\, t\cdot a - m\|.$$

Так что предположение о том, что $\max\limits_k |\langle t, a_k\rangle| \geqslant 1/2$ в условии (9), представляется естественным.

Сформулируем многомерную теорему 3.3 из работы Рудельсона и Вершинина [3] в этих же обозначениях.

Предложение 4. *Предположим, что $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с нулевым средним, причем $Q(\mathcal{L}(X), 1) \leqslant 1-p$, где $p > 0$. Рассмотрим набор $a = (a_1, \dots, a_n)$ векторов a_k из $\mathbf{R}^d$, таких что $\sum\limits_{k=1}^n \langle t, a_k\rangle^2 \geqslant \|t\|^2$ для любого $t \in \mathbf{R}^d$. Пусть $\alpha, D > 0$ и $\gamma \in (0,1)$, причем*

$$\Big(\sum_{k=1}^n (\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\}$$
$$\text{при всех } m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z} \text{ и } \|t\| \leqslant D. \tag{13}$$

Тогда

$$Q\Big(F_a, \frac{d}{D}\Big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{\gamma D\sqrt{p}}\Big)^d + \exp(-2\,p\,\alpha^2). \tag{14}$$

Заметим, что в формулировке теоремы 3.3 [3] присутствует излишнее предположение о том, что $\mathbf{E}\,X = 0$.

Ясно, что если

$$0 < D \leqslant D(a) = \inf\big\{\|t\| > 0 : t \in \mathbf{R}^d, \operatorname{dist}(t\cdot a, \mathbf{Z}^n) \leqslant \min\{\gamma\|\,t\cdot a\|, \alpha\}\big\}, \quad (15)$$

то условие (13) выполнено. Рудельсон и Вершинин [3] называют величину $D(a)$ существенным наименьшим общим знаменателем вектора $a \in (\mathbf{R}^d)^n$.

Сформулируем один из основных результатов данной работы.

Теорема 1. *Пусть $X, X_1, \dots, X_n$ – независимые одинаково распределенные случайные величины. Предположим, что $a = (a_1, \dots, a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$ и для некоторого $\alpha > 0$ выполнено условие* (9) *при $D = \sqrt{d}$, то есть*

$$\sum_{k=1}^{n}(\langle t, a_k\rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2 \text{ для всех } m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}, \quad t \in \mathbf{R}^d,$$
$$\text{таких что} \quad \max_k |\,\langle t, a_k\rangle\,| \geqslant 1/2, \quad \|t\| \leqslant \sqrt{d}. \quad (16)$$

Тогда

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ll_d \Big(\frac{1}{\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\big(-c\,\alpha^2 M(1)\big),$$

где $M(1)$ и $\mathbb{N}$ определены в формулах (1) *и* (11) *соответственно.*

Отсюда несложно вывести то, что получается в условиях предложения 3, а именно, имеет место

Следствие 1. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *с заменой условия* (16) *на условие* (9) *с произвольным $D > 0$. Тогда*

$$Q\Big(F_a, \frac{d}{D}\Big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Заметим, что существенную роль в уточнении результатов [3] и [22] играет введенная в рассмотрение величина $M(1)$. Очевидно, что $M(1)$ может быть существенно больше, чем p. Например, p может быть равно 0, а $M(1) > 0$ для любого невырожденного распределения $F = \mathcal{L}(X)$. Поэтому следствие 1 – существенное усиление предложения 3. Ясно также, что следствие 1 так же соотносится с предложением 3,

как многомерный аналог неравенства Эссеена (8) с многомерным вариантом неравенства Колмогорова–Рогозина (7).

Как и в работе [6], благодаря использованию соотношения (6) и методов Эссеена [29] (см. доказательство леммы 4 гл. II в [15]), доказательства теоремы 1 и следствия 1 данной работы в некотором смысле проще, чем доказательства в работах [3] и [22], так как не включают сложного разбиения множеств интегрирования.

Переформулируем теперь следствие 1, применив его к величинам X_k/τ, $\tau > 0$.

Следствие 2. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$. *Тогда в условиях следствия* 1 *справедливо соотношение*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{d}{D}\Big) = Q\Big(F_a, \frac{d\,\tau}{D}\Big) \ll_d \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)) + \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{M(\tau)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}}.$$

Выбирая, например, $\tau = D/d$, *получим, что*

$$Q\big(F_a, 1\big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{M(D/d)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(D/d)).$$

Для доказательства следствия 2 достаточно воспользоваться соотношением (1).

Заметим также, что в следствии 2 величина τ может быть сколь угодно малой. Устремляя τ к нулю, получаем оценку

$$Q(F_a, 0) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\sqrt{\mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp\big(-c\,\alpha^2\,\mathbf{P}(\widetilde{X} \neq 0)\big).$$

Эту оценку, впрочем, можно вывести из результатов [3] и [22].

Теперь сформулируем уточнения предложения 4, аналогичные теореме 1 и следствиям 1 и 2.

Теорема 2. *Предположим, что* $X, X_1, \ldots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть* $a = (a_1, \ldots, a_n)$,

$a_k \in \mathbf{R}^d$. *Предположим, что для некоторых* $\alpha > 0$ *и* $\gamma \in (0,1)$ *выполнено*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\}$$
$$\text{для всех } m_1,\dots,m_n \in \mathbf{Z} \text{ и } t \in \mathbf{R}^d,\ \|t\| \leqslant \sqrt{d}. \quad (17)$$

Тогда

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Заметим, что теорема 2 дает более общий результат по сравнению с результатом предложения 4, так как в формулировке теоремы 2 отсутствует условие $\sum\limits_{k=1}^{n}\langle t, a_k\rangle^2 \geqslant \|t\|^2$, которое предполагается в предложении 4.

Следствие 3. *Предположим, что* $X, X_1, \dots, X_n$ *– независимые одинаково распределенные случайные величины. Пусть* $a = (a_1,\dots,a_n)$, $a_k \in \mathbf{R}^d$ *и для некоторых* $\alpha, D > 0$ *и* $\gamma \in (0,1)$ *выполнено*

$$\Big(\sum_{k=1}^{n}(\langle t, a_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\}$$
$$\text{для всех } m_1,\dots,m_n \in \mathbf{Z} \text{ и } t \in \mathbf{R}^d,\ \|t\| \leqslant D. \quad (18)$$

Тогда

$$Q\Big(F_a, \frac{d}{D}\Big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)).$$

Заметим, что, если $\sum\limits_{k=1}^{n}\langle t, a_k\rangle^2 \geqslant \|t\|^2$, как предполагалось в условии предложения 4, то множитель $\dfrac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} \leqslant 1$ и, значит, следствие 3 дает более сильный результат по сравнению с предложением 4. Теперь переформулируем следствие 3 для величин X_k/τ, $\tau > 0$.

Следствие 4. *Пусть* $V_{a,\tau} = \mathcal{L}\big(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k/\tau\big)$. *Тогда в условиях следствия* 3 *справедливо соотношение*

$$Q\Big(V_{a,\tau}, \frac{d}{D}\Big) = Q\Big(F_a, \frac{d\,\tau}{D}\Big)$$
$$\ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\,\sqrt{M(\tau)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(\tau)).$$

Выбирая, например, $\tau = D/d$, *получим*

$$Q\big(F_a, 1\big) \ll_d \Big(\frac{\sqrt{d}}{D\,\gamma\,\sqrt{M(D/d)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(D/d)).$$

Для доказательства следствия 4 достаточно воспользоваться соотношением (1).

§2. Доказательства

Доказательство теоремы 1. Представим распределение $G = \mathcal{L}(\widetilde{X})$ в виде смеси $G = qE + \sum\limits_{j=0}^{\infty} p_j G_j$, где $q = \mathbf{P}(\widetilde{X} = 0)$, $p_j = \mathbf{P}(\widetilde{X} \in C_j)$, $j = 0, 1, 2, \ldots$, $C_0 = \{x : |x| > 1\}$, $C_j = \{x : 2^{-j} < |x| \leqslant 2^{-j+1}\}$, E – вероятностная мера, сосредоточенная в нуле, G_j – вероятностные меры, определяемые при $p_j > 0$ по формуле $G_j\{X\} = \dfrac{1}{p_j} G\{X \bigcap C_j\}$ для любого борелевского множества X. Если $p_j = 0$, то в качестве G_j можно брать произвольные меры.

При $z \in \mathbf{R}$, $\gamma > 0$ введем d-мерное безгранично делимое распределение $H_{z,\gamma}$ с характеристической функцией

$$\widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \exp\Big(-\frac{\gamma}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1 - \cos(2\,z\,\langle t, a_k\rangle)\big)\Big), \quad t \in \mathbf{R}^d. \tag{19}$$

Ясно, что эта характеристическая функция всюду положительна.

Так как для любой характеристической функции $\widehat{W}(t)$ случайного вектора Y справедливо равенство

$$|\widehat{W}(t)|^2 = \mathbf{E}\exp\big(i\langle t, \widetilde{Y}\rangle\big) = \mathbf{E}\cos\big(\langle t, \widetilde{Y}\rangle\big),$$

где $\widetilde{Y}$ – соответствующий симметризованный случайный вектор, то

$$|\widehat{W}(t)| \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}\big(1-|\widehat{W}(t)|^2\big)\Big) = \exp\Big(-\frac{1}{2}\mathbf{E}\,\big(1-\cos\big(\langle\, t, \widetilde{Y}\,\rangle\big)\big)\Big). \quad (20)$$

В силу неравенств (4) и (20), имеем

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} |\widehat{F_a}(t)|\, dt$$

$$\ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\,\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\,\rangle\,\widetilde{X})\big)\Big)\, dt = I.$$

Очевидно, что

$$\sum_{k=1}^{n}\mathbf{E}\big(1-\cos(2\,\langle t, a_k\rangle\,\widetilde{X})\big) = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\,\rangle\, x)\big)\, G\{dx\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\,\rangle\, x)\big)\, p_j\, G_j\{dx\}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\big(1-\cos(2\,\langle\, t, a_k\,\rangle\, x)\big)\, p_j\, G_j\{dx\}.$$

Обозначим $\beta_j = 2^{-2j}p_j$, $\beta = \sum\limits_{j=0}^{\infty}\beta_j$, $\mu_j = \beta_j/\beta$, $j = 0, 1, 2, \ldots$. Очевидно, что тогда $\sum\limits_{j=0}^{\infty}\mu_j = 1$ и $p_j/\mu_j = 2^{2j}\beta$ (при $p_j > 0$).

Оценим теперь величину β

$$\beta = \sum_{j=0}^{\infty}\beta_j = \sum_{j=0}^{\infty}2^{-2j}p_j = \mathbf{P}\big(|\widetilde{X}| > 1\big) + \sum_{j=1}^{\infty}2^{-2j}\,\mathbf{P}\big(2^{-j} < |\widetilde{X}| \leqslant 2^{-j+1}\big)$$

$$\geqslant \int\limits_{|x|>1} G\{dx\} + \sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{2^{-j}<|x|\leqslant 2^{-j+1}}\frac{x^2}{4}G\{dx\}$$

$$\geqslant \frac{1}{4}\int\limits_{|x|>1} G\{dx\} + \frac{1}{4}\int\limits_{|x|\leqslant 1} x^2\, G\{dx\} = \frac{1}{4}M(1).$$

Таким образом,

$$\beta \geqslant \frac{1}{4} M(1). \tag{21}$$

Теперь поступим так же, как при доказательстве леммы 4 гл. II в [15], принадлежащей Эссеену [29]. С помощью неравенства Гёльдера нетрудно показать, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j}, \tag{22}$$

где

$$\begin{aligned} I_j &= \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(- \frac{p_j}{2\,\mu_j} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \big(1 - \cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\, x)\big)\, G_j\{dx\}\Big)\, dt \\ &= \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(- 2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{C_j} \big(1 - \cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\, x)\big)\, G_j\{dx\}\Big)\, dt, \end{aligned}$$

если $p_j > 0$, и $I_j = 1$ при $p_j = 0$.

Применяя к экспоненте под знаком интеграла неравенство Йенсена (см. [15, с. 49]), получаем

$$\begin{aligned} I_j &\leqslant \int\limits_{B(\sqrt{d})} \int\limits_{C_j} \exp\Big(- 2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \cos(2\,\langle\, t, a_k\rangle\, x)\big)\Big)\, G_j\{dx\}\, dt \\ &= \int\limits_{C_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp\Big(- 2^{2j-1}\beta \sum_{k=1}^{n} \big(1 - \cos(2\,\langle t, a_k\rangle\, x)\big)\Big)\, dt\, G_j\{dx\} \\ &\leqslant \sup_{z \in C_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\, dt. \end{aligned}$$

Оценим функцию $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ при $\max\limits_k |\,\langle\, t, a_k\rangle\,| \leqslant 1/2$. Очевидно, что существует такое c, что $1 - \cos x \geqslant cx^2$ при $|x| \leqslant \pi$. Поэтому при

$\max\limits_k |\langle t, a_k\rangle| \leqslant 1/2$

$$\widehat{H}_{\pi,1}(t) \leqslant \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\big(1-\cos(2\pi\langle t, a_k\rangle)\big)\Big)$$
$$\leqslant \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n}|\langle t, a_k\rangle|^2\Big) \leqslant \exp\big(-c\langle \mathbb{N}t, t\rangle\big),$$

где матрица $\mathbb{N}$ определена в формуле (11). Заметим, что

$$\int\limits_{\mathbf{R}^d} \exp\big(-c\langle \mathbb{N}t, t\rangle\big)dt \ll_d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}}. \tag{23}$$

При t, таких что $\max\limits_k |\langle t, a_k\rangle| \geqslant 1/2$, $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$, можно действовать так же, как авторы [3] и [22], а именно: учитывая, что

$$1-\cos x \geqslant c\min_{m\in\mathbf{Z}}|x-2\pi m|^2,$$

получаем

$$\widehat{H}_{\pi,1}(t) \leqslant \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n}\min_{m_k\in\mathbf{Z}}\big|2\pi\langle t, a_k\rangle - 2\pi m_k\big|^2\Big)$$
$$= \exp\Big(-c\sum_{k=1}^{n}\min_{m_k\in\mathbf{Z}}|\langle t, a_k\rangle - m_k|^2\Big) \leqslant \exp(-c\,\alpha^2) \tag{24}$$

при $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$ и таких, что $\max\limits_k |\langle t, a_k\rangle| \geqslant 1/2$.

Теперь оценим интегралы I_j с помощью оценок (23) и (24). Рассмотрим сначала случай $j = 1, 2, \ldots$. Заметим, что характеристическая функция $\widehat{H}_{z,\gamma}(t)$ обладает свойствами

$$\widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \widehat{H}_{y,\gamma}\big(zt/y\big) \quad \text{и} \quad \widehat{H}_{z,\gamma}(t) = \widehat{H}^{\gamma}_{z,1}(t). \tag{25}$$

При $z \in C_j$ мы имеем $2^{-j} < |z| \leqslant 2^{-j+1} < \pi$. Следовательно, при $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$ мы имеем $\|zt/\pi\| < \sqrt{d}$. Так что из равенств (25) при $y = \pi$ и полученных выше оценок (23) и (24) вытекает, что при $z \in C_j$

$$\sup_{z\in C_j}\int\limits_{B(\sqrt{d})}\widehat{H}^{2^{2j}\beta}_{z,1}(t)\,dt \leqslant \int\limits_{B(\sqrt{d})}\exp(-c\,\beta\langle \mathbb{N}t, t\rangle)\,dt + \int\limits_{B(\sqrt{d})}\exp(-2^{2j}c\,\alpha^2\beta)\,dt$$
$$\ll_d \Big(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\Big)^d\frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).$$

Теперь рассмотрим случай $j = 0$. Из равенств (25) следует, что при $z > 0$, $\gamma > 0$

$$Q(H_{z,\gamma}, \sqrt{d}) = Q\big(H_{1,\gamma}, \sqrt{d}/z\big). \tag{26}$$

Таким образом, учитывая соотношения (2), (6), (25) и (26), получаем, что

$$\begin{aligned}\sup_{z\in C_0} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}^{\beta}_{z,1}(t)\,dt &= \sup_{z\geqslant 1} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,\beta}(t)\,dt \asymp_d \sup_{z\geqslant 1} Q(H_{z,\beta}, \sqrt{d}) \\ &= \sup_{z\geqslant 1} Q\big(H_{1,\beta}, \sqrt{d}/z\big) \leqslant Q(H_{1,\beta}, \sqrt{d}) \\ &\ll_d Q\big(H_{1,\beta}, \sqrt{d}/\pi\big) = Q(H_{\pi,\beta}, \sqrt{d}) \\ &\asymp_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{\pi,\beta}(t)\,dt = \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}^{\beta}_{\pi,1}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Пользуясь снова оценками (23) и (24) для характеристической функции $\widehat{H}_{\pi,1}(t)$ и учитывая, что $\mathrm{Vol}(B(\sqrt{d})) \ll_d 1$, получим:

$$\begin{aligned}\int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}^{\beta}_{\pi,1}(t)\,dt &\leqslant \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\beta\,\langle \mathbb{N}t, t\rangle\,dt + \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\alpha^2\beta)\,dt \\ &\ll_d \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).\end{aligned}$$

Мы оценили одинаково все интегралы I_j при $p_j \neq 0$. Учитывая, что $\sum\limits_{j=0}^{\infty} \mu_j = 1$, получаем, что

$$I \leqslant \prod_{j=0}^{\infty} I_j^{\mu_j} \ll_d \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta).$$

Значит,

$$\begin{aligned}Q(F_a, \sqrt{d}) &\ll_d \left(\frac{1}{\sqrt{\beta}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2\beta) \\ &\ll_d \left(\frac{1}{\sqrt{M(1)}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)),\end{aligned}$$

что и требовалось доказать. □

Выведем теперь следствие 1 из теоремы 1.

Доказательство следствия 1. Обозначим

$$b = (b_1, \dots, b_n) = \frac{D}{\sqrt{d}} a = \frac{D}{\sqrt{d}} (a_1, \dots, a_n) \in (\mathbf{R}^d)^n.$$

Тогда справедливо равенство $Q(F_a, d/D) = Q(F_b, \sqrt{d})$. Для мультивектора b выполнены те же условия, которые предполагались для мультивектора a в теореме 1. Действительно, $\sum\limits_{k=1}^{n} (\langle u, b_k \rangle - m_k)^2 \geqslant \alpha^2$ для всех $m_1, \dots, m_n \in \mathbf{Z}$, $u \in \mathbf{R}^d$, таких что $\|u\| \leqslant \sqrt{d}$ и $\max\limits_k |\langle u, b_k \rangle| \geqslant 1/2$. Это следует из условия (9) следствия 1, если обозначить $u = \dfrac{\sqrt{d}\, t}{D}$. Остается применить теорему 1 к вектору b. $\square$

Доказательство теоремы 2. Мы будем действовать аналогично доказательству теоремы 1. Используя обозначения теоремы 1, напомним, что

$$\begin{aligned} Q(F_a, \sqrt{d}) &\ll_d \prod_{j=0}^{\infty} \sup_{z \in C_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{z,1}^{2^{2j}\beta}(t)\, dt \\ &\leqslant \prod_{j=0}^{\infty} \sup_{z \in C_j} \int\limits_{B(\sqrt{d})} \widehat{H}_{\pi,1}^{2^{2j}\beta}\big(zt/\pi\big)\, dt. \end{aligned}$$

Но из условий теоремы 2 вытекает, что

$$\begin{aligned} \widehat{H}_{\pi,1}(t) &\leqslant \exp\Bigg(-c \sum_{k=1}^{n} \min_{m_k \in \mathbf{Z}} \big|2\pi \langle t, a_k \rangle - 2\pi m_k\big|^2 \Bigg) \\ &\leqslant \exp(-c\,\alpha^2) + \exp\big(-C\,\gamma^2 \langle \mathbb{N}t, t \rangle \big) \end{aligned}$$

при всех $\|t\| \leqslant \sqrt{d}$, где $\mathbb{N}$ задается формулой (11). Следовательно,

$$\begin{aligned} Q(F_a, \sqrt{d}) &\ll_d \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\gamma^2 \beta\ \langle \mathbb{N}t, t \rangle)\, dt + \int\limits_{B(\sqrt{d})} \exp(-c\,\alpha^2 \beta)\, dt \\ &\ll_d \left(\frac{1}{\gamma\sqrt{\beta}}\right)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 \beta). \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь оценкой (21) для величины β из доказательства теоремы 1, согласно которой $\beta \geqslant M(1)/4$. Тогда

$$Q(F_a, \sqrt{d}) \ll_d \Big(\frac{1}{\gamma\sqrt{M(1)}}\Big)^d \frac{1}{\sqrt{\det \mathbb{N}}} + \exp(-c\,\alpha^2 M(1)),$$

что и требовалось доказать. □

Доказательство следствия 3. Доказательство аналогично доказательству следствия 1. Обозначим $b = \dfrac{D}{\sqrt{d}} a \in (\mathbf{R}^d)^n$ и $u = \dfrac{\sqrt{d}\,t}{D}$. Тогда

$$\Big(\sum_{k=1}^{n} (\langle u, b_k\rangle - m_k)^2\Big)^{1/2} \geqslant \min\{\gamma\|t\cdot a\|, \alpha\}$$

при всех $m_1, \ldots, m_n \in \mathbf{Z}$ и $\|u\| \leqslant \sqrt{d}$. То есть для b выполнены те же условия, которые предполагались для a в теореме 2. Остается заметить, что $Q\big(F_a, d/D\big) = Q(F_b, \sqrt{d})$ и применить теорему 2 к вектору b. □

Литература

1. H. Nguyen, V. Vu, *Optimal inverse Littlewood–Offord theorems.* — Adv. Math. **226** (2011), 5298–5319.
2. M. Rudelson, R. Vershynin, *The Littlewood–Offord problem and invertibility of random matrices.* — Adv. Math. **218** (2008), 600–633.
3. M. Rudelson, R. Vershynin, *Smallest singular value of a random rectangular matrix.* — Comm. Pure Appl. Math. **62** (2009), 1707–1739.
4. T. Tao, V. Vu, *Inverse Littlewood–Offord theorems and the condition number of random discrete matrices.* — Ann. Math. **169** (2009), 595–632.
5. T. Tao, V. Vu, *From the Littlewood–Offord problem to the circular law: universality of the spectral distribution of random matrices.* — Bull. Amer. Math. Soc. **46** (2009), 377–396.
6. Ю. С. Елисеева, А. Ю. Зайцев, *Оценки функций концентрации взвешенных сумм независимых одинаково распределенных случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **57** (2012), 768–777.
7. G. Halász, *Estimates for the concentration function of combinatorial number theory and probability.* — Periodica Mathematica Hungarica **8** (1977), 197–211.
8. J. E. Littlewood, A. C. Offord, *On the number of real roots of a random algebraic equation.* — Rec. Math. [Mat. Sbornik] N.S. **12** (1943), 277–286.
9. P. Erdös, *On a lemma of Littlewood and Offord.* — Bull. Amer. Math. Soc. **51** (1945), 898–902.

10. P. Frankl, Z. Füredi, *Solution of the Littlewood–Offord problem in high dimensions.* — Ann. Math. **128** (1988), 259–270.
11. P. Erdös, *Extremal problems in number theory.* — In: 1965 Proc. Sympos. Pure Math., Vol. **VIII** Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1965, pp. 181–189.
12. A. Sárközy, E. Szemerédi, *Über ein Problem von Erdös und Moser.* — Acta Arithmetica **11** (1965), 205–208.
13. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Тр. МИАН СССР **174** (1986).
14. В. Хенгартнер, Р. Теодореску, *Функции концентрации.* — Пер. с англ. В. М. Круглова, В. М. Золотарева. Наука, М., 1980.
15. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* — Наука, М., 1972.
16. C.-G. Esséen, *On the Kolmogorov–Rogozin inequality for the concentration function.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **5** (1966), 210–216.
17. T. Tao, V. Vu, *Additive Combinatorics.* — Cambridge University Press, Cambridge **105**, 2006.
18. Г. Зигель, *Верхние оценки для функций концентрации в гильбертовом пространстве.* — Теория вероятн. и ее примен. **26** (1981), 335–349.
19. А. Л. Мирошников, *Оценки многомерной функции концентрации Леви.* — Теория вероятн. и ее примен. **34** (1989), 593–598.
20. С. М. Ананьевский, А. Л. Мирошников, *Локальные оценки функции концентрации Леви в многомерном и гильбертовом пространстве.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **130** (1983), 6–10.
21. А. Ю. Зайцев, *К многомерному обобщению метода треугольных функций.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 81–104.
22. O. Friedland, S. Sodin, *Bounds on the concentration function in terms of Diophantine approximation.* — C. R. Math. Acad. Sci. Paris **345** (2007), 513–518.
23. Б. А. Рогозин, *Об увеличении рассеивания сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **6** (1961), 106–108.
24. Т. В. Арак, *О скорости сходимости в равномерной предельной теореме Колмогорова.* I. — Теория вероятн. и ее примен. **26** (1981), 225–245.
25. J. Bretagnolle, *Sur l'inégalité de concentration de Doeblin–Lévy, Rogozin–Kesten.* — In: Parametric and semiparametric models with applications to reliability, survival analysis, and quality of life, Stat. Ind. Technol., Boston: Birkhäuser 2004, pp. 533–551.
26. H. Kesten, *A sharper form of the Doeblin–Lévy–Kolmogorov–Rogozin inequality for concentration functions.* — Math. Scand. **25** (1969), 133–144.
27. А. Л. Мирошников, Б. А. Рогозин, *Неравенства для функций концентрации.* — Теория вероятн. и ее примен. **25** (1980), 178–183.
28. С. В. Нагаев, С. С. Ходжабагян, *Об оценке функции концентрации сумм независимых случайных величин.* — Теория вероятн. и ее примен. **41** (1996), 655–665.
29. C.-G. Esséen, *On the concentration function of a sum of independent random variables.* — Z. Wahrscheinlichkeitstheor. verw. Geb. **9** (1968), 290–308.

Eliseeva Yu. S. Multivariate estimates for the concentration functions of weighted sums of independent identically distributed random variables.

This article is a multidimensional generalization of the results Eliseeva and Zaitsev (2012). Let $X, X_1, \ldots, X_n$ be independent identically distributed random variables. The paper deals with the question about the behavior of the concentration function of the random variable $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k X_k$ according to the arithmetic structure of vectors a_k. Recently the interest to this question has increased significantly due to the study of distributions of eigenvalues of random matrices. In this paper we formulate and prove some refinements of the results Friedland and Sodin (2007) and Rudelson and Vershynin (2009).

С.-Петербургский
государственный университет
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: pochta106@yandex.ru

Поступило 18 ноября 2012 г.