Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

В. П. Демичев

ФУНКЦИОНАЛЬНАЯ ЦЕНТРАЛЬНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ОБЪЕМОВ ЭКСКУРСИОННЫХ МНОЖЕСТВ КВАЗИ-АССОЦИИРОВАННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

§1. Введение и основной результат

В последние годы активно исследуются различные геометрические характеристики экскурсионных множеств и множеств уровня случайных полей. Интерес к подобным стохастическим объектам обусловлен широким кругом как математических, так и естественнонаучных приложений, в которых они возникают (см., напр., [1, 2]). В монографии [3] получена центральная предельная теорема (ЦПТ) для объемов экскурсионных множеств гауссовских случайных полей с непрерывной ковариационной функцией, заданных на последовательности расширяющихся областей. В [4] ЦПТ такого рода устанавливается для более широкого класса квази-ассоциированных случайных полей. В [5] доказывается функциональная ЦПТ в пространстве Скорохода $D(\mathbb{R})$ для объемов экскурсионных множеств ассоциированных полей, рассматриваемых как функции экскурсионного уровня. Объектом исследования данной работы являются объемы экскурсионных множеств квази-ассоциированных случайных полей на блоках вида $(0, n_1t_1] \times \cdots \times (0, n_dt_d]$, $(n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$, $(t_1, \dots, t_d) \in [0,1]^d$. Мы показываем, что если выполнены условия ЦПТ из [4], то после соответствующей нормировки такие объемы задают семейство случайных элементов из пространства $C([0,1]^d)$, сходящихся по распределению при $n_i \to \infty$, $i = 1, \dots, d$, к многопараметрическому броуновскому движению.

Нам понадобится следующее

Определение 1 ([4]). *Квадратично интегрируемое случайное поле $\xi = \{\xi_t,\ t \in T\}$ называется квази-ассоциированным (пишут $\xi \in QA$),*

Ключевые слова: экскурсионные множества, квази-ассоциированность, функциональная предельная теорема.

если для любых конечных подмножеств $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset T$, $J = \{s_1, \dots, s_m\} \subset T$, $I \cap J = \varnothing$, *и липшицевых функций* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *верна оценка*

$$|\operatorname{cov}(F(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_n}), G(\xi_{s_1}, \dots, \xi_{s_m}))| \leqslant \operatorname{Lip}(F)\operatorname{Lip}(G) \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} |\operatorname{cov}(\xi_{t_i}, \xi_{s_j})|, \quad (1)$$

где $\operatorname{Lip}(F)$ *и* $\operatorname{Lip}(G)$ *– липшицевы константы* F *и* G *относительно* l_1*-норм в пространствах* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^m$ *соответственно.*

Заметим, что совершенно аналогичное определение введено в [6]. В [7] показано, что если случайное поле ξ является положительно или отрицательно ассоциированным и $\mathsf{E}\xi_t^2 < \infty$, $t \in T$, то условие (1) выполнено. Кроме того, любое гауссовское случайное поле (с ковариационной функцией, принимающей, вообще говоря, как положительные, так и отрицательные значения) является квази-ассоциированным (см. [8]).

Пусть $\xi = \{\xi_t, t \in \mathbb{R}^d\} \in QA$, $d \in \mathbb{N}$, – строго стационарное измеримое случайное поле с непрерывной ковариационной функцией $r(t) = \operatorname{cov}(\xi_0, \xi_t)$, $t \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что ξ_0 имеет ограниченную плотность. Зафиксируем некоторое $u \in \mathbb{R}$. Для произвольного измеримого $E \subset \mathbb{R}^d$ определим объем экскурсионного множества поля ξ на E, соответствующего уровню u, соотношением

$$V_u(\xi, E) = \int_E \mathbb{I}(\xi_x > u)\, dx.$$

Для данного ξ и каждого $n = (n_1, \dots, n_d) \in \mathbb{N}^d$ введем случайное поле $S_n(t)$ формулой

$$S_n(t) = \langle n \rangle^{-1/2} \left(V_u(\xi, (0, n * t]) - \mathsf{E}V_u(\xi, (0, n * t])\right), \quad t \in \mathbb{R}_+^d,$$

где $\langle n \rangle = n_1 \cdot \ldots \cdot n_d$, и $a * b = (a_1 b_1, \dots, a_d b_d)$ при $a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, $b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d$.

Основным результатом данной работы является

Теорема 1. *Пусть* ξ *– описанное выше случайное поле, и* $r(t) = O(|t|^{-\alpha})$, $|t| \to \infty$, *для некоторого* $\alpha > 3d$. *Тогда поля* S_n *сходятся по распределению в пространстве* $C([0,1]^d)$ *при* $n \to \infty$ *к случайному*

полю σW, *где*

$$\sigma^2 = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \operatorname{cov}(\mathbb{I}(\xi_0 > u), \mathbb{I}(\xi_t > u))dt,$$

W *есть* d*-параметрическое броуновское движение.*

Здесь и далее сходимость при $n \to \infty$ понимается в секвенциальном смысле: для любой последовательности $n^{(k)} = (n_1^{(k)}, \dots, n_d^{(k)})$ с $n_i^{(k)} \to \infty$, $i = 1, \dots, d$, сходимость имеет место, и предел не зависит от выбора последовательности.

Отметим, что в [4, теорема 1] доказывается ЦПТ для последовательности случайных величин $V_u(\xi, E_n)$, где $\{E_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ – растущее по Ван Хову семейство подмножеств $\mathbb{R}^d$. При этом условия, налагаемые на случайное поле ξ, совпадают с условиями теоремы 1. В случае, когда $E_n = (0, n]^d$, ЦПТ из [4] является следствием теоремы 1.

§2. Доказательство

Прежде чем приступить непосредственно к доказательству теоремы 1, мы установим ряд вспомогательных утверждений. Напомним

Определение 2 ([6]). *Случайное поле* $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$, *где* $d \in \mathbb{N}$, *называется* (BL, θ)*-зависимым, если найдется такая неотрицательная функция* $\theta(x)$, $x \geqslant 1$, *монотонно убывающая к нулю при* $x \to \infty$, *что для любых конечных подмножеств* $I = \{t_1, \dots, t_n\} \subset \mathbb{Z}^d$, $J = \{s_1, \dots, s_m\} \subset \mathbb{Z}^d$, $I \cap J = \varnothing$, *и ограниченных липшицевых функций* $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $G : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *верна оценка*

$$|\operatorname{cov}(F(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}), G(X_{s_1}, \dots, X_{s_m}))| \leqslant \operatorname{Lip}(F)\operatorname{Lip}(G)(n \wedge m)\theta(\operatorname{dist}(I, J)), \quad (2)$$

где

$$\operatorname{dist}(I, J) = \inf_{i\in I, j\in J} \|i - j\|_\infty, \quad \|x\|_\infty = |x_1| \vee \dots \vee |x_d|,$$
$$x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d.$$

Здесь и далее мы используем обозначения $a \wedge b = \min\{a, b\}$, $a \vee b = \max\{a, b\}$, $a_+ = a \vee 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Рассмотрим $\mathcal{B}$ – семейство блоков $B \subset \mathbb{R}^d$ вида

$$B = (a, b] = (a_1, b_1] \times \dots \times (a_d, b_d], \quad a = (a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d,$$
$$b = (b_1, \dots, b_d) \in \mathbb{R}^d, \quad a_k < b_k, \quad k = 1, \dots, d.$$

Обозначим $|B| = \prod_{k=1}^{d}(b_k - a_k)$. Введем также $\mathcal{U} \subset \mathcal{B}$ как совокупность всех блоков, вершины которых имеют целочисленные координаты.

Лемма 1. *Пусть $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ есть (BL,θ)-зависимое случайное поле с $\theta(x) \leqslant Cx^{-\lambda}$ для некоторых $C, \lambda > 0$ и всех $x \geqslant 1$. Пусть также $|X_k| \leqslant M < \infty$ п.н., $k \in \mathbb{Z}^d$. Тогда при каждом $p > 2$ и любом $\nu > 0$ найдется такое число $K = K(d,p,M,\nu,\lambda) > 0$, что для всех $U \in \mathcal{U}$ верна оценка*

$$\begin{aligned} &\mathsf{E}\left|\sum_{k\in U}(X_k - \mathsf{E}X_k)\right|^p \\ &\quad \leqslant K\left(|U|^{1+\nu}M_p(X,U) + C|U|^{\gamma\vee(1+\nu)} + Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}\right), \end{aligned} \tag{3}$$

где $\gamma = p - 1 - \lambda/d$,

$$M_p(X,U) = \max_{k\in U}\mathsf{E}|X_k - \mathsf{E}X_k|^p, \quad Q(X) = \sup_{U\in\mathcal{U}}\frac{1}{|U|}\mathsf{E}\left(\sum_{k\in U}X_k - \mathsf{E}X_k\right)^2.$$

Доказательство. Рассуждения следуют подходу, предложенному в [9]. Для упрощения выкладок рассмотрим случай $\mathsf{E}X_1 = 0$. Будем использовать индукцию по $|U|$. Без ограничения общности можно считать $\nu \leqslant p/2 - 1$ и $U = (0,n_1] \times \cdots \times (0,n_d]$, $n_1 \geqslant \cdots \geqslant n_d > 0$. Пусть a – некоторое число из интервала $(0,1/2)$. Выбор $a = a(p,M,\nu)$ мы уточним далее. Рассмотрим $m = [n_1 a] + 1$, $N = [n_1/(2m)] + 1$, где $[\,\cdot\,]$ – целая часть числа. Будем предполагать, что $n_1 a \geqslant 1$. Нетрудно показать, что в противном случае соотношение (3) имеет место при $K = a^{-d(p-1)}$. Обозначим $L_j = [(j-1)m+1, jm\wedge n_1] \subset \mathbb{Z}$, $j = 1,\dots,2N$. Введем случайные величины

$$\xi_i = \sum_{k\in U: k_1\in L_{2i-1}} X_k, \quad \eta_i = \sum_{k\in U: k_1\in L_{2i}} X_k, \quad i = 1,\dots,N,$$

$$S_1(U) = \sum_{i=1}^{N}\xi_i, \quad S_2(U) = \sum_{i=1}^{N}\eta_i, \quad S(U) = S_1(U) + S_2(U),$$

где сумма по пустому множеству индексов полагается равной нулю. Используя неравенство $|a+b|^r \leqslant (2^{r-1}\vee 1)(|a|^r + |b|^r)$, $a,b \in \mathbb{R}$, $r > 0$, получаем

$$\mathsf{E}|S(U)|^p \leqslant 2^{p-1}(\mathsf{E}|S_1(U)|^p + \mathsf{E}|S_2(U)|^p). \tag{4}$$

Имеем

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i||S_1(U)-\xi_i|^{p-1}\right)$$

$$= 2^{p-2}\Big(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + \sum_{i=1}^N \operatorname{cov}(|\xi_i|, |S_1(U)-\xi_i|^{p-1}) + \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^{p-1}\Big).$$

В [9] для оценки $\operatorname{cov}(|\xi_i|, |S_1(U)-\xi_i|^{p-1})$, $i=1,\dots,N$, используется метод урезания, который применяется к случайной величине $|S_1(U)-\xi_i|$. Однако в предположении ограниченности X_k, $k\in\mathbb{Z}^d$, в этом нет необходимости. Действительно, можно получить достаточно точную оценку непосредственно из свойства (BL,θ)-зависимости X. Поскольку $|S_1(U)-\xi_i|^{p-1} = \varphi(|S_1(U)-\xi_i|)$ п.н., где $\varphi(x) = (x_+ \wedge M|U|)^{p-1}$, $x\in\mathbb{R}$, – липшицева функция, соотношение (2) влечет неравенство

$$\operatorname{cov}(|\xi_i|, |S_1(U)-\xi_i|^{p-1}) \leqslant |U|(p-1)(M|U|)^{p-2}Cm^{-\lambda}, \quad i=1,\dots,N.$$

Кроме того,

$$\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|S_1(U)-\xi_i|^{p-1}$$

$$\leqslant 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|\xi_i|^{p-1} + \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\mathsf{E}|S_1(U)|^{p-1}\right)$$

$$\leqslant 2^{p-2}\left(\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p + \sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\left(\mathsf{E}|S_1(U)|^p\right)^{1-1/p}\right).$$

Таким образом,

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant (2^{2(p-2)} + 2^{p-2})\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|^p$$

$$+2^{p-2}N|U|(p-1)(M|U|)^{p-2}Cm^{-\lambda} + 2^{2(p-2)}\sum_{i=1}^N \mathsf{E}|\xi_i|\left(\mathsf{E}|S_1(U)|^p\right)^{1-1/p}.$$

По лемме 4.4 из [9]

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant (2^{2p-3}+2^{p-1})\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|^p$$
$$+2^{p-1}N|U|(p-1)(M|U|)^{p-2}Cm^{-\lambda}+2^{2p(p-1)}\left(\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|\right)^p.$$

Кроме того,

$$(\mathsf{E}|\xi_i|)^p \leqslant \left(\mathsf{E}\xi_i^2\right)^{p/2} \leqslant Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}, \quad i=1,\dots,N.$$

Поэтому

$$\mathsf{E}|S_1(U)|^p \leqslant (2^{2p-3}+2^{p-1})\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\xi_i|^p$$
$$+2^{p-1}N|U|(p-1)(M|U|)^{p-2}Cm^{-\lambda}+2^{2p(p-1)}N^pQ^{p/2}(X)|U|^{p/2}.$$

Аналогичным образом устанавливается соотношение

$$\mathsf{E}|S_2(U)|^p \leqslant (2^{2p-3}+2^{p-1})\sum_{i=1}^{N}\mathsf{E}|\eta_i|^p$$
$$+2^{p-1}N|U|(p-1)(M|U|)^{p-2}Cm^{-\lambda}+2^{2p(p-1)}N^pQ^{p/2}(X)|U|^{p/2}.$$

Используя (4), неравенства $m^{-\lambda} \leqslant (an_1)^{-\lambda} \leqslant a^{-\lambda}|U|^{-\lambda/d}$, $N \leqslant a^{-1}$ и предположение индукции, получаем

$$\mathsf{E}|S(U)|^p$$
$$\leqslant Da^{-1}K\Big((a|U|)^{1+\nu}M_p(X,U)+C(a|U|)^{\gamma\vee(1+\nu)}+Q^{p/2}(X)(a|U|)^{p/2}\Big)$$
$$+Da^{-\lambda-1}C|U|^{\gamma}+Da^{-p}Q^{p/2}(X)|U|^{p/2}, \quad (5)$$

где множитель $D>1$ зависит только от p и M. Остается заметить, что если выбрать $a \leqslant (2D)^{-1/\nu}$ и $K \geqslant 2D(a^{-\lambda-1}\vee a^{-p})$, то (5) влечет (3). Лемма доказана. □

Введем семейство функций

$$h_{u,\gamma}(x)=\Big(\gamma^{-1}(x-u+\gamma)_+\Big)\wedge 1,\ x\in\mathbb{R},\ u\in\mathbb{R},\ \gamma>0. \quad (6)$$

Лемма 2. *Пусть случайное поле ξ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда при каждом $p > 2$ и любом $\nu > 0$ найдется такое число $R > 0$, что для любых $u \in \mathbb{R}$, $\gamma > 0$ и $B \in \mathcal{B}$ верна оценка*

$$\mathsf{E}\left|\int\limits_B (h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E}h_{u,\gamma}(\xi_0))dx\right|^p \leqslant R\left(\gamma^{-2}|B|^{(1+\nu)\vee(p-\alpha/d)} + |B|^{p/2}\right). \quad (7)$$

Доказательство. Если $|B| \leqslant 1$, то неравенство (7) выполнено при $R = 1$. Рассмотрим случай $|B| > 1$. Без ограничения общности полагаем $B = (0, b_1] \times \cdots \times (0, b_d]$, где $b_1 \geqslant \cdots \geqslant b_d > 0$. Пусть

$$q = \max\{i : \prod_{j=i}^{d} b_j > 1\}.$$

Для $i = 1, \ldots, q$ определим

$$N_i = \begin{cases} [b_i] + 1, & i \in \{1, \ldots, q-1\}, \\ \left[\prod\limits_{j=q}^{d} b_j\right] + 1, & i = q. \end{cases}$$

Введем случайное поле $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^q\}$ формулой

$$X_k = \int\limits_{E_k} (h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E}h_{u,\gamma}(\xi_0))\, dx,$$

где

$$E_k = \prod_{i=1}^{q} (k_i b_i/N_i, (k_i+1)b_i/N_i] \times \prod_{i=q+1}^{d} (0, b_i], \quad k = (k_1, \ldots, k_q) \in \mathbb{Z}^q.$$

Отметим, что

$$|X_k| \leqslant \prod_{i=1}^{q} \frac{b_i}{N_i} \prod_{i=q+1}^{d} b_i \leqslant \left(\prod_{i=1}^{q-1} 1\right) \frac{b_q}{b_q \cdot \cdots \cdot b_d} \prod_{i=q+1}^{d} b_i = 1, \quad k \in \mathbb{Z}^q.$$

Нетрудно показать, что в силу непрерывности ковариационной функции r и легко проверяемой оценки $b_i/N_i \geqslant 1/2$, $i = 1, \ldots, q$, поле X является (BL, θ)-зависимым с $\theta(x) = C\gamma^{-2}x^{d-\alpha}$, $x \geqslant 1$, где $C > 0$ зависит только от r (см. [4]). Кроме того, по лемме 1 из [4] и формуле Хефдинга (см., напр., [10], Приложение, §1, теорема 1.2) справедливо неравенство $|\operatorname{cov}(h_{u,\gamma}(\xi_x), h_{u,\gamma}(\xi_y))| \leqslant C_1|r(y-x)|^{1/3}$, $x, y \in \mathbb{R}^d$, где

$C_1 > 0$ зависит только от константы, мажорирующей плотность ξ_0. Следовательно, $Q(X) \leqslant C_1 \|r^{1/3}\|_1$.

Положим $U = (-1, N_1 - 1] \times \cdots \times (-1, N_q - 1] \subset \mathbb{Z}^q$. Заметим, что

$$|U| = \prod_{i=1}^{q} N_i \leqslant \prod_{i=1}^{q-1} 2b_i \cdot 2 \prod_{i=q}^{d} b_i = 2^q |B|.$$

Как и при доказательстве леммы 1, можно предполагать, что $\nu \leqslant p/2 - 1$, и, следовательно, $|U|^{1+\nu} \leqslant |U|^{p/2}$. По лемме 1 имеем

$$\mathsf{E}\left|\int\limits_B (h_{u,\gamma}(\xi_x) - \mathsf{E}h_{u,\gamma}(\xi_0))dx\right|^p = \mathsf{E}\left|\sum_{k\in U} X_k\right|^p$$

$$\leqslant K\left(|U|^{1+\nu} + C\gamma^{-2}|U|^{(1+\nu)\vee(p-1-(\alpha-d)/q)} + (C_1\|r^{1/3}\|_1)^{p/2}|U|^{p/2}\right)$$

$$\leqslant K\left(C\gamma^{-2}(2^q|B|)^{(1+\nu)\vee(p-1-(\alpha-d)/d)} + ((C_1\|r^{1/3}\|_1)^{p/2} + 1)(2^q|B|)^{p/2}\right).$$

Последняя оценка влечет (7) при

$$R = K(C2^{q((1+\nu)\vee(p-1-(\alpha-d)/d))} \vee 2^{qp/2}((C_1\|r^{1/3}\|_1)^{p/2} + 1)).$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $Y = \{Y_t,\ t \in \mathbb{R}^d\}$ – измеримое случайное поле, $|Y_t| \leqslant 1$, $t \in \mathbb{R}^d$. Предположим, что для некоторых $p > 2$, $\alpha, \beta > 1$, $a, b > 0$ и любого блока $B \in \mathcal{B}$ выполнено неравенство*

$$\mathsf{E}\left|\int\limits_B Y_x dx\right|^p \leqslant a|B|^\alpha + b|B|^\beta.$$

Тогда для всех $s \in \mathbb{R}^d_+$ верна оценка

$$\mathsf{E}\sup_{t\in(0,s]}\left|\int\limits_{(0,t]} Y_x dx\right|^p \leqslant A(d,p,\alpha,\beta)(a|(0,s]|^\alpha + b|(0,s]|^\beta),$$

где $A(d,p,\alpha,\beta) > 0$ – некоторый множитель, зависящий только от d, p, α и β.

Доказательство. Заметим, что в силу теоремы Лебега о мажорируемой сходимости при любом $s \in \mathbb{R}_+^d$ верно соотношение

$$\mathsf{E} \sup_{t\in(0,s]} \left| \int\limits_{(0,t]} Y_x dx \right|^p = \lim_{N\to\infty} \mathsf{E} \max_{t=(k*s+s)/N,\ k\in\mathbb{Z}_N^d} \left| \int\limits_{(0,t]} Y_x dx \right|^p .$$

Поэтому достаточно доказать при каждом $N \in \mathbb{N}$ оценку

$$\mathsf{E} \max_{t=(k*s+s)/N,\ k\in\mathbb{Z}_N^d} \left| \int\limits_{(0,t]} Y_x dx \right|^p \leqslant A(d,p,\alpha,\beta)(a|(0,s]|^\alpha + b|(0,s]|^\beta).$$

Зафиксируем $N \in \mathbb{N}$ и введем случайное поле $X = \{X_k,\ k \in \mathbb{Z}^d\}$ формулой

$$X_k = \int\limits_{(k*s/N,(k*s+s)/N]} Y_x dx, \quad k \in \mathbb{Z}^d.$$

Рассмотрим $r = r(\alpha,\beta) = \frac{\alpha+1}{2\alpha} \vee \frac{\beta+1}{2\beta} < 1$. Нетрудно проверить, что функция $f_{s,N}(x) = (a(N^{-d}|(0,s]|x)^\alpha + b(N^{-d}|(0,s]|x)^\beta)^r$, $x \geqslant 0$, является супераддитивной, т.е. $f_{s,N}(x+y) \geqslant f_{s,N}(x) + f_{s,N}(y)$, $x, y \geqslant 0$. Для любого блока $U \subset \mathbb{Z}^d$ имеем

$$\mathsf{E}\left|\sum_{k\in U} X_k\right|^p \leqslant f_{s,N}^{1/r}(|U|).$$

По теореме Морица ([11]; см. также [10], Приложение, §5, следствие 5.2) найдется такое число A, зависящее только от d, p и r, что выполнено неравенство

$$\mathsf{E} \max_{t=(k*s+s)/N,\ k\in\mathbb{Z}_N^d} \left| \int\limits_{(0,t]} Y_x dx \right|^p = \mathsf{E} \max_{k\in\mathbb{Z}_N^d} \left| \sum_{i\in[0,k]} X_i \right|^p$$

$$\leqslant A f_{s,N}^{1/r}(N^d) = A(a|(0,s]|^\alpha + b|(0,s]|^\beta).$$

Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 1. Сходимость одномерных распределений S_n является следствием теоремы 1 из [4]. Доказательство сходимости многомерных распределений полностью аналогично, поэтому здесь не приводится. Остается установить плотность распределений

S_n в пространстве $C([0,1]^d)$, т.е. показать, что для каждого $\varepsilon > 0$ и всех $i \in \{1, \dots, d\}$ верно соотношение

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d,\ z \in (0,\delta]} |S_n(t + ze_i) - S_n(t)| > \varepsilon \right) = 0,$$

где $\{e_i\}_{i=1}^d$ – стандартный координатный базис в $\mathbb{R}^d$ (см. [10], соотношение (5.1.2)). Можно ограничиться рассмотрением $i = 1$. Мы покажем, что

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d,\ z \in (0,\delta]} (S_n(t + ze_1) - S_n(t)) > \varepsilon \right) = 0. \qquad (8)$$

Случай, когда под знаком вероятности в (8) вместо $(S_n(t+ze_1)-S_n(t))$ стоит $(S_n(t) - S_n(t + ze_1))$ рассматривается аналогично. Пусть $\gamma_n = \langle n \rangle^{-1/2-\mu}$, где выбор $\mu > 0$ мы уточним далее. Для каждого $n \in \mathbb{N}^d$ введем случайное поле

$$Z_n(t) = \langle n \rangle^{-1/2} \int\limits_{(0,n*t]} (h_{u,\gamma_n}(\xi_x) - \mathsf{E} h_{u,\gamma_n}(\xi_0))\, dx, \quad t = (t_1, \dots, t_d) \in \mathbb{R}_+^d.$$

Напомним, что функция h_{u,γ_n} определена в (6). Так как плотность ξ_0 ограничена, $\mathsf{E} h_{u,\gamma_n}(\xi_0) - \mathsf{P}(\xi_0 > u) = O(\gamma_n)$, $n \to \infty$. С помощью этой оценки нетрудно показать, что условие (8) вытекает из соотношения

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d,\ z \in (0,\delta]} (Z_n(t + ze_1) - Z_n(t)) > \varepsilon \right) = 0.$$

При $\delta < 1$ имеем

$$\mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d,\ z \in (0,\delta]} (Z_n(t + ze_1) - Z_n(t)) > \varepsilon \right)$$

$$\leqslant \mathsf{P}\left(2 \sup_{t \in [0,1]^d : t_1 \in \delta\mathbb{Z},\ z \in (0,2\delta]} |Z_n(t + ze_1) - Z_n(t)| > \varepsilon \right)$$

$$\leqslant 2\delta^{-1} \max_{w \in [0,1] \cap \delta\mathbb{Z}} \mathsf{P}\left(\sup_{t \in [0,1]^d : t_1 = w,\ z \in (0,2\delta]} |Z_n(t + ze_1) - Z_n(t)| > \varepsilon/2 \right).$$

Возьмем некоторое $w \in [0,1] \cap \delta\mathbb{Z}$. Для любого $z \in (0, 2\delta]$ и произвольного $t \in [0,1]^d$ такого, что $t_1 = w$, верно представление

$$Z_n(t + ze_1) - Z_n(t) = \langle n \rangle^{-1/2} \int\limits_G (h_{u,\gamma_n}(\xi_x) - \mathsf{E} h_{u,\gamma_n}(\xi_0))\, dx,$$

где $G = (n_1 w, n_1 w + n_1 z] \times (0, n_2 t_2] \times \cdots \times (0, n_d t_d]$. Поэтому в силу лемм 2 и 3 для любых $p > 2, \nu > 0$ имеем

$$\mathsf{E} \sup_{t \in [0,1]^d : t_1 = w,\ z \in (0, 2\delta]} |Z_n(t + ze_1) - Z_n(t)|^p$$
$$\leqslant \langle n \rangle^{-p/2} R_1 (\gamma_n^{-2} (2\delta \langle n \rangle)^{(1+\nu) \vee (p - \alpha/d)} + (2\delta \langle n \rangle)^{p/2}).$$

Здесь R_1 не зависит от n, δ, и w. Таким образом,

$$\lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} \mathsf{P} \left(\sup_{t \in [0,1]^d,\ z \in (0,\delta]} (Z_n(t + ze_1) - Z_n(t)) > \varepsilon \right)$$
$$\leqslant \lim_{\delta \to 0+} \limsup_{n \to \infty} 2\delta^{-1} (\varepsilon/2)^{-p} \langle n \rangle^{-p/2} R_1$$
$$\times \Big(\langle n \rangle^{1+2\mu} (2\delta \langle n \rangle)^{(1+\nu) \vee (p - \alpha/d)} + (2\delta \langle n \rangle)^{p/2} \Big).$$

Остается заметить, что правая часть последнего неравенства обращается в нуль, если взять

$$p \in (1 + \alpha/d, 2\alpha/d - 2), \quad \mu \in (0, (\alpha/d - p/2 - 1)/2) \ \text{ и } \ \nu \in (0, p - \alpha/d - 1).$$

Это завершает доказательство теоремы. □

Автор признателен профессору А. В. Булинскому за постановку задачи и внимание к работе.

Литература

1. R. J. Adler, J. E. Taylor, *Random Fields and Geometry.* Springer, New York, 2007.
2. J.-M. Azais, M. Wschebor, *Level Sets and Extrema of Random Processes and Fields.* — Wiley, New Jersey, 2009.
3. Н. Н. Леоненко, А. В. Иванов, *Статистический анализ случайных полей.* Вища школа. Изд-во при Киев. ун-те, Киев, 1986.
4. A. V. Bulinski, E. Spodarev, F. Timmermann, *Central limit theorems for the excursion set volumes of weakly dependent random fields.* — Bernoulli, **18** No. 1 (2012), 100–118.
5. D. Meschenmoser, A. Shashkin, *Functional central limit theorem for the volume of excursion sets generated by associated random fields.* — Statist. Probab. Lett. **81**, No. 6 (2011), 642–646.

6. A. V. Bulinski, C. Suquet, *Normal approximation for quasi-associated random fields.* — Statist. Probab. Lett. **54** (2001), 215–226.
7. А. В. Булинский, Э. Шабанович, *Асимптотическое поведение некоторых функционалов от положительно и отрицательно зависимых случайных полей.* — Фундамент. и прикл. матем. **4**, No. 2 (1998), 479–492.
8. А. П. Шашкин, *Квазиассоциированность гауссовской системы случайных векторов.* — УМН, **57**, No. 6 (2002), 199–200.
9. Q-M. Shao, H. Yu, *Weak convergence for weighted empirical processes of dependent sequences.* — Ann. Probab. **24**, No. 4 (1996), 2098–2127.
10. А. В. Булинский, А. П. Шашкин, *Предельные теоремы для ассоциированных случайных полей и родственных систем.* ФИЗМАТЛИТ, М., 2008.
11. F. Moricz, *A general moment inequality for the maximum of the rectangular partial sums of multiple series.* — Acta Math. Hung. **41**, No. 3–4 (1983), 337–346.

Demichev V. P. Functional central limit theorem for excursion set volumes of quasi-associated random fields.

Stationary quasi-associated random fields with continuous covariance function are considered. Recently Bulinski, Spodarev, and Timmermann proved a central limit theorem for the excursion set volumes of such random fields. We establish a functional version of this theorem.

Московский
государственный университет
им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
119991 Москва, Россия
E-mail: vadim.demichev@gmail.com

Поступило 26 февраля 2013 г.