Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

А. А. Воротов

МАРКОВСКОЕ СВОЙСТВО ПОЛЯ ВРЕМЕНИ ПРЕБЫВАНИЯ ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ МАРКОВСКИХ ПРОЦЕССОВ

§1. Введение

Как известно (см. [6]), условное локальное время для одномерного броуновского движения (до экспоненциального момента времени) является марковским процессом. Представляется интересным вопрос, можно ли утверждать что-то подобное для однородной марковской цепи $X(t)$ с дискретным пространством состояний $\mathbb{A}$. Аналогом локального времени в данном случае служит время пребывания $\tau(v)$ процесса $X(t)$ в состоянии v до экспоненциального момента θ, а марковское свойство рассматривается относительно условных мер $\mathbf{P}_{ab}$, фиксирующих начало и конец траектории ($X(0) = a, X(\theta) = b$). Первая и основная трудность здесь заключается в том, что $\mathbb{A}$ может не иметь каких-либо дополнительных структур, а потому само понятие марковского свойства, равно как и понятия "прошлого", "настоящего" и "будущего", определить не всегда возможно. Тем не менее, в относительно простых случаях, таких, как блуждание по целым числам или вообще по дереву (с ненулевой вероятностью разрешается переходить только в соседнюю вершину), никаких проблем с определением не возникает.

Вопрос о марковском свойстве времени пребывания был подробно изучен в работах [1–4]. В данных работах, во-первых, были приведены формулы для конечномерных распределений поля времени пребывания (которые мы дадим ниже и будем активно использовать далее). Во-вторых, в них были получены важные результаты непосредственно о марковском свойстве. Несколько неожиданно оказывается, что в случае дискретного времени ($t = 0, 1, 2, \ldots$) даже для простейшего

Ключевые слова: время пребывания, марковское свойство, функция Грина.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

симметричного случайного блуждания по $\mathbb{Z}$ процесс $\tau(v)$ не является марковским. В случае же непрерывного времени ($t \geqslant 0$) удается проверить марковское свойство $\tau(v)$ для блуждания по дереву.

В [5] утверждается, что марковское свойство можно обобщить на случай блуждания по произвольному графу Г. Однако, доказательство этого факта нигде приведено не было и будет впервые изложено ниже.

Для простоты определений накладывается условие *двусторонней проходимости ребер*, заключающееся в том, что если процесс $X(t)$ может с ненулевой вероятностью перескочить из состояния a в состояние b без промежуточных состояний, то он также с ненулевой вероятностью может перескочить и из b непосредственно в a. Это условие позволяет рассматривать граф Г как неориентированный и, таким образом, избежать каких-либо неоднозначностей в определении связности.

Марковское свойство в данном случае рассматривается в так называемых необходимых вершинах. Вершина $v \in \mathbb{A}$ называется *необходимой*, если при удалении v и всех инцидентных ей ребер граф распадается на $N > 1$ компонент связности $A_1, \ldots, A_N$. Соответственно, под *марковским свойством времени пребывания* в необходимой вершине v понимается независимость относительно условных мер $\mathbf{P}_{ab}$ значений τ на множествах $A_1, \ldots, A_N$ при фиксированном значении $\tau(v)$.

Проверка марковского свойства поля времени пребывания в каждой необходимой вершине и будет являться целью данной работы.

В разделе 2 приводятся основные определения для цепей с дискретным временем. Далее даются формулы для конечномерных распределений времени пребывания $\tau(v)$ через функцию Грина некоторого уравнения, связанного с цепью. В разделе 3 приводятся аналогичные утверждения для цепей с непрерывным временем.

В разделе 4 приводятся формулы, показывающие как меняется функция Грина при добавлении ребер к графу. Это позволяет упростить соотношения, выражающие марковость поля $\tau(v)$. Такой подход активно используется в разделе 5 при доказательстве марковского свойства поля времени пребывания в каждой необходимой вершине.

§2. Цепи с дискретным временем

Приведем основные определения и факты, касающиеся поля времени пребывания для марковских цепей с дискретным временем. При

этом в основном будем придерживаться работы [1]. Аналогичные результаты для случая непрерывного времени будут даны в следующем разделе.

Рассмотрим однородную марковскую цепь $X(t)$, $t = 0, 1, 2, \ldots$ с не более чем счетным пространством состояний $\mathbb{A}$ и переходной функцией $P(a, b)$. Процесс $X(t)$ можно рассматривать как случайное блуждание на графе $\Gamma(P)$ (вообще говоря, ориентированном) с множеством вершин $\mathbb{A}$ и множеством ребер $\{(a, b)|P(a, b) \neq 0\}$, где вероятность перехода из вершины a в соседнюю вершину b равна $P(a, b)$.

Через P обозначим переходный оператор марковской цепи, действующий на пространстве функций на $\mathbb{A}$:

$$(Pf)(a) = \sum_{b \in \mathbb{A}} P(a, b) f(b).$$

Пусть $\mathbf{P}_a$ – вероятностная мера для процессов, начинающихся из точки a, θ – целочисленная экспоненциально распределенная с параметром α случайная величина.

Обозначим через $\tau(v)$ время пребывания процесса $X(t)$ в состоянии $v \in \mathbb{A}$ до момента θ:

$$\tau(v) = \sum_{t=0}^{\theta} \mathbf{1}_{\{v\}}(X(t)).$$

Займемся описанием условных конечномерных распределений случайного поля $\tau(v)$ при фиксированных начале и конце (в момент θ) траектории в терминах функций Грина для уравнения теплопроводности.

Введем функцию k на $\mathbb{A}$, $0 \leqslant k < 1$, имеющую смысл вероятности обрыва траектории в точке a. С функцией k свяжем разностный оператор

$$\mathcal{Y} = (1 - k)P - 1$$

(здесь $(1 - k)$ рассматривается как оператор умножения, а под единицей подразумевается тождественный оператор).

Рассмотрим уравнение, называемое нами уравнением теплопроводности (хотя классический дискретный аналог уравнения теплопроводности получается при $k \equiv 0$):

$$u(t + 1) - u(t) = (\mathcal{Y}u)(t, a) \quad (t \in \mathbb{Z}_+, a \in \mathbb{A}) \tag{2.1}$$

с начальным условием $u(0, a) = f(a)$.

Легко проверить, что единственное решение уравнения (2.1) задается формулой

$$u(t,a) = \mathbf{E}_a\left[f(X(t))\prod_{s=0}^{t-1}[1-k(X(s))]\right].$$

Здесь $\mathbf{E}_a$ – математическое ожидание при условии $X(0)=a$.

Дискретное преобразование Лапласа:

$$u(t,a) \to \widehat{u}(\alpha,a) = \sum_{t=0}^{\infty} e^{-\alpha t}u(t,a) \quad (\alpha>0),$$

переводит уравнение в

$$(e^{\alpha}-1-\mathcal{Y})\widehat{u} = e^{\alpha}f. \tag{2.2}$$

Это уравнение имеет решение

$$\widehat{u}(\alpha,a) = \mathbf{E}_a\left[\sum_{t=0}^{\infty} e^{-\alpha t}f(X(t))\prod_{s=0}^{t-1}[1-k(X(s))]\right], \tag{2.3}$$

которое является дискретным аналогом формулы Каца (см. [6, с. 77]).

Отметим, что для ограниченных f формула (2.3) дает единственное ограниченное решение уравнения (2.2). Действительно, достаточно проверить, что единственным решением однородного уравнения

$$(e^{\alpha}-1-\mathcal{Y})g = 0 \tag{2.4}$$

является нулевое решение. Но это очевидно следует из того факта, что в пространстве ограниченных функций с нормой $\sup|g|$ норма оператора $e^{-\alpha}(1+\mathcal{Y})$ строго меньше единицы.

Рассмотрим теперь *функцию Грина* G, определяемую как (единственное) ограниченное решение уравнения

$$(e^{\alpha}-1-\mathcal{Y})G(\cdot,b) = (1-k)\mathbf{1}_{\{b\}}$$

(операторы действуют на переменную a, b – параметр).

Заметим, что

$$\mathbf{E}_a\left[\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\,,X(e)=b\right]$$
$$=\mathbf{E}_a\left[\sum_{t=0}^{\infty}(1-e^{-\alpha})e^{-\alpha t}\mathbf{1}_{\{b\}}(X(t))\prod_{s=0}^{t}[1-k(X(s))]\right]$$
$$=(1-e^{-\alpha})e^{\alpha}G(a,b). \quad (2.5)$$

Через $\mathbf{P}_{ab}$ обозначим меру $\mathbf{P}_{ab}(B)=\mathbf{P}_a(B|X(e)=b)$. Через G_0 будем обозначать функцию Грина, соответствующую $k\equiv 0$.

Используя обозначение $H(v,b)=\dfrac{e^{\alpha}G(v,b)}{1-k(v)}$, согласно [1], имеем

$$\mathbf{E}_{ab}\left[\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\right]=\frac{G(a,b)}{G_0(a,b)}, \quad (2.6)$$

$$\mathbf{E}_{ab}\left[\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\Big|\,\tau(v)=0\right]$$
$$=\frac{H_0(v,v)}{H(v,v)}\,\frac{G(a,b)H(v,v)-G(a,v)H(v,b)}{G_0(a,b)H_0(v,v)-G_0(a,v)H_0(v,b)}, \quad (2.7)$$

$$\mathbf{E}_{ab}\left[\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\Big|\,\tau(v)=t\right]$$
$$=\frac{G(a,v)H(v,b)H_0(v,v)^2}{G_0(a,v)H_0(v,b)H(v,v)^2}\left[\frac{1-\frac{1}{H(v,v)}}{1-\frac{1}{H_0(v,v)}}\right]^{t-1} \qquad (t\geqslant 1), \quad (2.8)$$

в случае, если последние условные ожидания определены.

Заметим, что если граф $\Gamma(P)$ связен, то при $t\geqslant 1$ всегда $\mathbf{P}_{ab}(\tau(v)=t)>0$, т.е. условное ожидание из (2.8) определено. Условие же $\mathbf{P}_{ab}(\tau(v)=0)\neq 0$ по сути означает, что существует путь из a в b, не проходящий через v.

Следующее выражение позволяет описывать конечномерные распределения размерности больше 1.

$$\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\sum\limits_{v\in V}\gamma(v)\tau(v)}\prod_{s=0}^{\theta}[1-k(X(s))]\right]$$

$$= \frac{\begin{vmatrix} G(a,b) & H(v_1,b) & H(v_2,b) & \dots & H(v_n,b) \\ G(a,v_1) & \frac{1}{1-e^{\gamma(v_1)}}+H(v_1,v_1) & H(v_2,v_1) & \dots & H(v_n,v_1) \\ G(a,v_2) & H(v_1,v_2) & \frac{1}{1-e^{\gamma(v_2)}}+H(v_2,v_2) & \dots & H(v_n,v_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(a,v_n) & H(v_1,v_n) & H(v_2,v_n) & \dots & \frac{1}{1-e^{\gamma(v_n)}}+H(v_n,v_n) \end{vmatrix}}{G_0(a,b)\begin{vmatrix} \frac{1}{1-e^{\gamma(v_1)}}+H(v_1,v_1) & H(v_2,v_1) & \dots & H(v_n,v_1) \\ H(v_1,v_2) & \frac{1}{1-e^{\gamma(v_2)}}+H(v_2,v_2) & \dots & H(v_n,v_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ H(v_1,v_n) & H(v_2,v_n) & \dots & \frac{1}{1-e^{\gamma(v_n)}}+H(v_n,v_n) \end{vmatrix}}, \quad (2.9)$$

где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ – произвольное конечное множество, прямые скобки здесь и далее обозначают определитель.

Разложение (2.9) по степеням $e^{-\gamma(v_1)}, \dots, e^{-\gamma(v_n)}$ дает формулы для конечномерных распределений. Однако следует отметить, что явные выражения не удается получить даже для двумерных распределений.

§3. Цепи с непрерывным временем

Приведем теперь аналогичные утверждения для цепей с непрерывным временем, придерживаясь работы [2].

Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$ – однородная марковская цепь с не более чем счетным пространством состояний $\mathbb{A}$ и переходными функциями $P(a,b,t)$. Будем также предполагать, что процесс $X(t)$ сепарабельный и стохастически непрерывный.

Тогда существуют плотности переходных вероятностей $Q(a,b)$. Будем также предполагать, что процесс $X(t)$ локально регулярный, т.е. $Q(a,a) \neq -\infty$ и $\sum\limits_{b \neq a} Q(a,b) = -Q(a,a)$ для всех $a \in \mathbb{A}$.

В этих предположениях переходный оператор P^t (определяемый аналогично случаю дискретного времени по вероятностям перехода за время t) и оператор Q (соответствующий переходным плотностям) связаны обратным уравнением Колмогорова: $\dfrac{\partial P^t}{\partial t} = QP^t$.

Далее мы будем рассматривать только регулярные процессы, то есть считать, что (п.н.) на каждом конечном промежутке процесс совершает конечное число переходов.

Пусть θ – не зависящая от цепи экспоненциальная с параметром α случайная величина.

В этих предположениях время пребывания

$$\tau(v) = \int_0^\theta \mathbf{1}_{\{v\}}(X(t))dt$$

определено корректно.

Аналогично случаю дискретного времени можно рассматривать наш процесс как случайное блуждание (с непрерывным временем) на графе $\Gamma(P)$ с множеством вершин $\mathbb{A}$ и множеством ребер $\{(a,b)|Q(a,b) \neq 0\}$, где плотность вероятностей перехода из вершины a в соседнюю вершину b равна $Q(a,b)$. Ребра вместо "(a,b)" будем для краткости обозначать просто "ab", а соответствующие им переходные плотности называть значениями этих ребер.

Как и раньше, пусть $\mathbf{P}_a$ – вероятностная мера для процессов, начинающихся из точки a, $\mathbf{P}_{ab}$ – соответствующая мера при условии $X(\theta) = b$.

Далее по аналогии со случаем дискретного времени рассмотрим неотрицательную ограниченную функцию k на $\mathbb{A}$. Введем оператор $\mathcal{Y} = Q - k$ и рассмотрим "уравнение теплопроводности"

$$\frac{\partial u(t,a)}{\partial t} = (\mathcal{Y}u)(t,a) \quad (t \geqslant 0, a \in \mathbb{A}) \tag{3.1}$$

с начальным условием $u(0,a) = f(a)$.

Если f ограничена, то единственное ограниченное решение уравнения (3.1) задается формулой

$$u(t,a) = \mathbf{E}_a\left[f(X(t))e^{-\int_0^t k(X(s))\,ds}\right].$$

Преобразование Лапласа: $u(t,a) \to \widehat{u}(\alpha,a) = \int_0^\infty e^{-\alpha t}u(t,a)\,dt$, переводит уравнение (3.1) в

$$(\alpha - \mathcal{Y})\widehat{u} = f. \tag{3.2}$$

У этого уравнения есть решение, задающееся аналогом формулы Каца:

$$\widehat{u}(\alpha,a) = \mathbf{E}_a\left[\int_0^\infty e^{-\alpha t}f(X(t))e^{-\int_0^t k(X(s))\,ds}\,dt\right], \tag{3.3}$$

и это равенство задает единственное ограниченное решение уравнения (3.2), поскольку можно показать, что однородное уравнение

$$(\alpha - \mathcal{Y})g = 0 \tag{3.4}$$

не имеет нетривиальных ограниченных решений.

Функция Грина определяется как единственное ограниченное решение уравнения

$$(\alpha - \mathcal{Y})G(\cdot, b) = \mathbf{1}_{\{b\}}(\cdot). \tag{3.5}$$

Формулы, аналогичные (2.2)–(2.8), имеют вид

$$\mathbf{E}_a\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))ds}, X(\theta) = b\right] = \alpha G(a, b), \tag{3.6}$$

$$\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))\,ds}\right] = \frac{G(a, b)}{G_0(a, b)}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ab}&\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v) = 0\right]\\ &= \frac{G_0(v, v)}{G(v, v)}\,\frac{G(a, b)G(v, v) - G(a, v)G(v, b)}{G_0(a, b)G_0(v, v) - G_0(a, v)G_0(v, b)},\end{aligned} \tag{3.8}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_{ab}&\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v) = t\right]\\ &= \frac{G(a, v)G(v, b)G_0(v, v)^2}{G_0(a, v)G_0(v, b)G(v, v)^2}e^{-t\left[\frac{1}{G(v,v)} - \frac{1}{G_0(v,v)}\right]} \quad (t > 0).\end{aligned} \tag{3.9}$$

Также необходимо привести еще одну формулу, обобщающую (3.8), которую мы будем активно использовать далее

$$\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))\,ds}, \tau(v) = 0\right] = \frac{G(a, b)}{G_0(a, b)} - \frac{G(a, v)G(v, b)}{G_0(a, b)G(v, v)}. \tag{3.10}$$

Формула, позволяющая описывать конечномерные распределения, по существу аналогична (2.9). Мы ее не приводим, поскольку в дальнейшем она не понадобится.

§4. Формулы для изменения функции Грина при добавлении ребер

Как уже отмечалось выше, марковское свойство времени пребывания можно доказать для случая, когда граф $\Gamma(P)$ – дерево (см. [2]–[4]). Поэтому возникает естественная идея представить произвольный граф как дерево с добавленными к нему ребрами, и посмотреть как меняется функция Грина при добавлении этих ребер. Тогда можно надеяться переписать марковское свойство в терминах функции Грина исходного дерева, после чего его уже несложно будет проверить. Реализация данного подхода сталкивается с некоторыми трудностями, однако именно он будет лежать в основе дальнейших рассуждений.

Для начала опишем как меняется функция Грина G при добавлении к $\Gamma(P)$ ребра a_1b_1 со значением t_1, ребра a_2b_2 со значением t_2, ... , ребра a_nb_n со значением t_n. Следует отметить, что разрешается "добавлять" ребра, уже имеющиеся в графе. В этом случае мы просто изменяем значение на ребре.

Полученную после добавления ребер функцию Грина будем обозначать G_n (хотя она, разумеется, зависит от добавляемых значений и от вершин добавленных ребер), если конечно она корректно определена. Соответствующие добавленным ребрам операторы обозначим Q_n и $\mathcal{Y}_n$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Если оператор Q_n (как и оператор Q) удовлетворяет естественным вероятностным условиям: $\sum\limits_b Q_n(\cdot, b) = 0$ и $Q_n(a, b) \geqslant 0$ при $a \neq b$, то функция Грина G_n определена корректно и может быть вычислена по формуле:*

$$G_n(x,y) = \frac{\begin{vmatrix} G(x,y) & G(x,a_1) & G(x,a_2) & \dots & G(x,a_n) \\ G(b_1,y) & -\frac{1}{t_1}+G(b_1,a_1) & G(b_1,a_2) & \dots & G(b_1,a_n) \\ G(b_2,y) & G(b_2,a_1) & -\frac{1}{t_2}+G(b_2,a_2) & \dots & G(b_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(b_n,y) & G(b_n,a_1) & G(b_n,a_2) & \dots & -\frac{1}{t_n}+G(b_n,a_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -\frac{1}{t_1}+G(b_1,a_1) & G(b_1,a_2) & \dots & G(b_1,a_n) \\ G(b_2,a_1) & -\frac{1}{t_2}+G(b_2,a_2) & \dots & G(b_2,a_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ G(b_n,a_1) & G(b_n,a_2) & \dots & -\frac{1}{t_n}+G(b_n,a_n) \end{vmatrix}} \tag{4.1}$$

для всех $x, y \in \mathbb{A}$.

Случай $t_i = 0$ понимается в теореме как $t_i \to 0$ и, как видно из формулы, действительно не вносит никакого вклада в изменение функции Грина.

Доказательство теоремы 1. Заметим, что для корректного определения функции Грина условие нормировки $-Q(a,a) = \sum\limits_{b \neq a} Q(a,b)$ можно заменить более слабым условием: $k(a) \geqslant \sum\limits_{b} Q(a,b)$. Действительно, если $k(a)$ и $Q(a,a)$ одновременно уменьшить на $\sum\limits_{b} Q(a,b)$, то оператор $\mathcal{Y}$ не изменится, функция k останется неотрицательной, а условие нормировки теперь будет выполнено. Будем доказывать теорему при более слабых предположениях, что для Q выполняются условия

1) $k(a) \geqslant \sum\limits_{b} Q(a,b)$,

2) $Q(a,b) \geqslant 0$ при $a \neq b$

и аналогичные условия выполняются для Q_n.

Сначала будем предполагать, что все добавляемые ребра различны. Доказательство в этом случае проводится индукцией по количеству n добавленных ребер. При $n = 0$ матрица, стоящая в знаменателе правой части (4.1), вырождается (становится пустой). Если принять значение определителя в этом случае равным единице, то формула очевидно становится справедливой и при $n = 0$, что и является базой индукции.

Положим теперь, что (4.1) справедлива для некоторого $n \geqslant 0$ и докажем ее для $n+1$. В силу предположения, что все добавленные ребра различны, можно перенумеровать их так, что и при добавлении первых n ребер условия 1 и 2 останутся выполнены. Таким образом, после перенумеровки к G_n можно применять предположение индукции.

Имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_{\{y\}}(\cdot) &= (\alpha - \mathcal{Y}_{n+1}) G_{n+1}(\cdot, y) \\ &= (\alpha - \mathcal{Y}_n) G_{n+1}(\cdot, y) - t_{n+1} \mathbf{1}_{\{a_{n+1}\}}(\cdot) G_{n+1}(b_{n+1}, y). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Следующие рассуждения будут носить не вполне строгий характер. Тем не менее, они позволят получить выражение для функции Грина G_{n+1} через G_n, правильность которого можно проверить непосредственной подстановкой в уравнение (4.2) (а ограниченность очевидна).

Продифференцировав (4.2) по t_{n+1}, получим

$$(\alpha - \mathcal{Y}_{n+1})G'_{n+1}(\cdot, y) = \mathbf{1}_{\{a_{n+1}\}}(\cdot)G_{n+1}(b_{n+1}, y),$$

откуда

$$G'_{n+1}(x, y) = G_{n+1}(b_{n+1}, y)G_{n+1}(x, a_{n+1}) \tag{4.3}$$

Беря $y = a_{n+1}$, получаем

$$G'_{n+1}(x, a_{n+1}) = G_{n+1}(b_{n+1}, a_{n+1})G_{n+1}(x, a_{n+1}). \tag{4.4}$$

Беря $x = b_{n+1}$ и учитывая, что при $t_{n+1} = 0$ выполнено $G_{n+1} = G_n$, находим

$$G_{n+1}(b_{n+1}, a_{n+1}) = \frac{G_n(b_{n+1}, a_{n+1})}{1 - t_{n+1}G_n(b_{n+1}, a_{n+1})}.$$

Подставляя полученное в (4.4), находим

$$G_{n+1}(x, a_{n+1}) = \frac{G_n(x, a_{n+1})}{1 - t_{n+1}G_n(b_{n+1}, a_{n+1})}.$$

И, наконец, подставляя последнее в (4.3), получаем

$$G_{n+1}(x, y) = G_n(x, y) + \frac{t_{n+1}G_n(b_{n+1}, y)G_n(x, a_{n+1})}{1 - t_{n+1}G_n(b_{n+1}, a_{n+1})}. \tag{4.5}$$

Для краткости матрицу из знаменателя (4.1) обозначим A, вектор $\begin{pmatrix} G(x, a_1) & G(x, a_2) & \dots & G(x, a_n) \end{pmatrix}^\top$ обозначим $r(x)$, а вектор $\begin{pmatrix} G(b_1, y) & G(b_2, y) & \dots & G(b_n, y) \end{pmatrix}^\top$ обозначим $s(y)$. Тогда по индукционному предположению имеем

$$G_n(x, y) = \frac{\begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix}}{|A|}, \tag{4.6}$$

поэтому (4.5) переписывается в виде

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x, y) = {} & \frac{1}{\left[-\dfrac{1}{t_{n+1}}|A| + \begin{vmatrix} G(b_{n+1}, a_{n+1}) & \mathbf{r}(\mathbf{b_{n+1}})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{a_{n+1}}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \right]} \\ & \times \frac{1}{|A|}\Bigg[-\frac{1}{t_{n+1}}|A| \begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \\ & + \begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G(b_{n+1}, a_{n+1}) & \mathbf{r}(\mathbf{b_{n+1}})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{a_{n+1}}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \\ & - \begin{vmatrix} G(b_{n+1}, y) & \mathbf{r}(\mathbf{b_{n+1}})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} G(x, a_{n+1}) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{a_{n+1}}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \Bigg]. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Как легко видеть, знаменатель первого сомножителя равен знаменателю правой части (4.1). Будем предполагать, что этот знаменатель не равен нулю. Таким образом, остается доказать равенство второго сомножителя и числителя. Обозначим для краткости второй сомножитель за M.

Далее нам потребуется следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 1 (тождество Доджсона). *Для квадратной матрицы A размера $N \times N$ через A_n^m $(1 \leqslant n, m \leqslant N)$ обозначим определитель матрицы, которая получается из A вычеркиванием n-й строки и m-го столбца. Аналогично через $A_{n,m}^{p,q}$ $(1 \leqslant n, m, p, q \leqslant N)$ обозначим определитель матрицы, получающейся из A вычеркиванием n-й и m-й строк и p-го и q-го столбцов. Тогда для $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant N$ выполнено равенство*

$$A_i^j A_k^l - A_i^l A_k^j = \sigma(i,j,k,l)\,|A|\,A_{i,k}^{j,l},$$

где $\sigma(i,j,k,l) = \begin{cases} 1, & \text{если } i<k,\ j<l \text{ или } i>k,\ j>l \\ -1, & \text{если } i>k,\ j<l \text{ или } i<k,\ j>l \\ 0 & \text{если } i=k \text{ или } j=l. \end{cases}$

Доказательство леммы. Оригинальное тождество Доджсона сформулировано для $i = j, k = l$. Это широко известное утверждение; его доказательство можно найти, например, в [7]. Мы же путем перестановок столбцов приведем утверждение для произвольных индексов i, j, k, l к уже известному тождеству.

Для начала будем считать, что все индексы i, j, k, l различны. Рассмотрим матрицу B, получающуюся из A перестановкой i-го и j-го столбцов и перестановкой k-го и l-го столбцов. Тогда

$$|A| = |B|, \quad A_i^j = B_i^i(-1)^{i+j+1}, \quad A_k^l = B_k^k(-1)^{k+l+1}, \quad A_i^l = B_i^k(-1)^{i+k+1},$$

$$A_k^j = B_k^i(-1)^{i+k+1}, \quad A_{i,k}^{j,l} = B_{i,k}^{i,k}(-1)^{i+j+k+l}\sigma(i,j,k,l)$$

(это легко видеть, поскольку с точки зрения определителей вычеркивание n-ой строки и m-го столбца эквивалентно замене элемента (n, m) на 1, а всех остальных элементов из n-ой строки или m-го столбца на 0 и домножению матрицы на $(-1)^{n+m}$).

Применяя тождество Доджсона к матрице B, получим требуемое.

В случае $i = k$ или $j = l$ утверждение очевидно, а случаи равенства других индексов рассматриваются аналогично рассуждениям выше. $\square$

Вернемся к доказательству теоремы. Воспользовавшись очевидным равенством

$$\begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} = G(x,t)\,|A| + \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix}$$
$$= G(x,t)\,|A| + \sum_{i,j=1}^{n} (-1)^{i+j+1} G(b_i,y) G(x,a_j) A_i^j,$$

получим

$$\begin{aligned} M = &-\frac{1}{t_{n+1}} \begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} + \big[G(x,y)G(b_{n+1},a_{n+1}) \\ &- G(b_{n+1},y)G(x,a_{n+1})\big]\,|A| + G(x,y) \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{r}(\mathbf{b_{n+1}})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{a_{n+1}}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \\ &+ G(b_{n+1},a_{n+1}) \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} - G(b_{n+1},y) \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{a_{n+1}}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} \\ &- G(x,a_{n+1}) \begin{vmatrix} 0 & \mathbf{r}(\mathbf{b_{n+1}})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} + \frac{1}{|A|} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} (-1)^{i+j+k+l} G(b_i,y) \\ &\times G(x,a_j)G(b_k,a_{n+1})G(b_{n+1},a_l) \left[A_i^j A_k^l - A_i^l A_k^j\right]. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Тогда, как нетрудно проверить, применяя лемму, имеем

$$\begin{aligned} M = &-\frac{1}{t_{n+1}} \begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top & G(x,a_{n+1}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} & \dots \\ G(b_{n+1},y) & \dots & G(b_{n+1},a_{n+1}) \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} G(x,y) & \mathbf{r}(\mathbf{x})^\top & G(x,a_{n+1}) \\ \mathbf{s}(\mathbf{y}) & \mathbf{A} & \dots \\ G(b_{n+1},y) & \dots & -\frac{1}{t_{n+1}} + G(b_{n+1},a_{n+1}) \end{vmatrix}, \end{aligned} \tag{4.9}$$

и формула (4.1) доказана в тех случаях, когда она корректна, то есть ее знаменатель не равен нулю.

Но из доказанного, в частности, следует, что функция Грина непрерывно зависит от значений на добавленных ребрах, поскольку при малых $t_1, \dots, t_n$ формула (4.1) всегда корректна. Значит если знаменатель равен нулю, то имеет место устранимая особенность.

На самом деле, можно показать, что знаменатель не равен нулю никогда. Как и выше, перенумеруем ребра и будем доказывать по индукции. В силу вышесказанного, если знаменатель обратился в нуль, то и числитель также равен нулю при всех x и y. Легко проверить, что при $x = b_{n+1}, y = a_{n+1}$ это приведет к $|A| = 0$, что противоречит индукционному предположению.

Осталось доказать, что при добавлении нескольких значений на одно ребро формула (4.1) даст такой же результат, что и добавление их суммы. Это нетрудно получить, используя только элементарные свойства определителей. Мы не приводим эти очевидные вычисления, тем более, что этот вариант теоремы нам далее не понадобится. □

Замечание 1. Формула (4.1) дает решение уравнения

$$(\alpha - \mathcal{Y}_n)G_n(\cdot, b) = \mathbf{1}_{\{b\}}(\cdot) \tag{4.10}$$

только при определенных ограничениях на $t_1, \ldots, t_n$, когда для оператора Q_n выполнены налагаемые на него условия. Но поскольку левая часть уравнения (4.10) является рациональной функцией от $t_1, \ldots, t_n$, получаем, что на самом деле формула (4.1) решает уравнение (4.10) для произвольных $t_1, \ldots, t_n$. Разумеется, в данном случае ничего не мешает этому решению вырождаться, когда знаменатель обращается в нуль.

Замечание 2. Поскольку, как видно из определения функции Грина, увеличение функции k равносильно соответствующему уменьшению значений на петлях, из теоремы легко видеть, что при увеличении $k(c)$ на t, функция Грина становится равна

$$G_t(x,t) = G(x,y) - \frac{G(x,c)G(c,y)}{\frac{1}{t} + G(c,c)}. \tag{4.11}$$

Указанный выше подход по добавлению к некоторому исходному дереву ребер имеет один недостаток. Дело в том, что сколько-нибудь нетривиальный граф получается из дерева добавлением бесконечного числа ребер. Прямое обобщение формулы (4.1) на случай бесконечного n с использованием бесконечных определителей не дает нужного результата, ведь бесконечные определители вполне могут расходиться, при том, что их отношение имеет предел. Сама по себе идея предельного перехода при $n \to \infty$, в принципе, может быть реализована, однако для этого пришлось бы потребовать от процесса чуть больше, чем это необходимо.

Для простого осуществления предельного перехода лучше воспользоваться схожим, но несколько иным методом. А именно, вместо добавления ребер будем увеличивать значения k в вершинах. Принцип остается тем же, но переходить к пределу здесь намного проще.

Пусть значение $k(a_1)$ увеличивается на $t_1 \geqslant 0$, значение $k(a_2)$ увеличивается на $t_2 \geqslant 0$, ... , значение $k(a_n)$ увеличивается на $t_n \geqslant 0$.

Соответствующую функцию Грина, как и выше, обозначаем G_n. Через G_∞ обозначим функцию Грина после добавления всех указанных ребер. Тогда непосредственно из (3.6) следует предельное соотношение.

Утверждение 1. $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = G_\infty$ *(поточечно).*

Далее перейдем непосредственно к изучению марковости времени пребывания.

§5. Доказательство марковского свойства поля времени пребывания

Будем предполагать далее, что граф $\Gamma = \Gamma(P)$ рассматриваемого марковского процесса с непрерывным временем имеет свойство *двусторонней проходимости ребер*: если $Q(a,b) > 0$, то $Q(b,a) > 0$ для всех $a, b \in \mathbb{A}$. Таким образом, граф Γ можно считать неориентированным.

Предполагаем также, что Γ связен.

Рассмотрим такую вершину $v \in \mathbb{A}$ (если она существует), что при удалении v и всех инцидентных ей ребер граф распадается на N, $1 < N \leqslant \infty$, компонент связности $A_1, \dots, A_N$. Такие вершины будем называть *необходимыми*. Для функции k через k_i $(1 \leqslant i \leqslant N)$ обозначим ее ограничение на A_i, продолженное нулем на остальные состояния. Соответствующую k_i функцию Грина обозначим G_i.

Марковское свойство поля времени пребывания $\tau(\cdot)$ в необходимой точке v относительно мер $\mathbf{P}_{ab}$ означает, что для любой функции $k \geqslant 0$ с $k(v) = 0$ и любого $t \geqslant 0$ выполнено

$$\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v) = t\right] = \prod_{i=1}^{N} \mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k_i(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v) = t\right]. \tag{5.1}$$

Согласно формулам (3.8) и (3.9), марковское свойство эквивалентно следующим равенствам:

а) $$\frac{1}{G(v,v)} - \frac{1}{G_0(v,v)} = \sum_1^N \left[\frac{1}{G_i(v,v)} - \frac{1}{G_0(v,v)}\right],$$

б) $$\frac{G(a,b) - \dfrac{G(a,v)G(v,b)}{G(v,v)}}{G_0(a,b) - \dfrac{G_0(a,v)G_0(v,b)}{G_0(v,v)}} = \prod_1^N \frac{G_i(a,b) - \dfrac{G_i(a,v)G_i(v,b)}{G_i(v,v)}}{G_0(a,b) - \dfrac{G_0(a,v)G_0(v,b)}{G_0(v,v)}},$$

в) $\dfrac{G(a,v)G(v,b)G_0(v,v)^2}{G_0(a,v)G_0(v,b)G(v,v)^2} = \prod\limits_1^N \dfrac{G_i(a,v)G_i(v,b)G_0(v,v)^2}{G_0(a,v)G_0(v,b)G_i(v,v)^2}.$

В формуле б) предполагаем, что a и b лежат в одной компоненте связности (для корректного определения условных ожиданий при $t = 0$). В остальном a и b произвольны.

Следующая теорема показывает, что в отличие от случая дискретного времени, когда марковского свойства времени пребывания нет уже для простейшего блуждания по целым числам, для непрерывного времени оно выполнено в самом общем случае.

Теорема 2. *В любой необходимой вершине v графа исходного марковского процесса имеет место марковское свойство поля времени пребывания.*

Доказательство. Заметим, что равенство б), означающее, что

$$\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v)=0\right] = \prod_{i=1}^N \mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k_i(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v)=0\right],$$

имеет место всегда. Действительно, если процесс п.н. не попадает в вершину v (а это в силу сепарабельности и означает, что $\tau(v) = 0$), то он все время проводит в одной компоненте связности (содержащей a и b). Поэтому эти условные ожидания никак не зависят от значений k на других компонентах связности. В результате имеем

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k_i(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v)=0\right] = \mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k(X(s)\,ds}\,\Big|\,\tau(v)=0\right];\\
&\mathbf{E}_{ab}\left[e^{-\int\limits_0^\theta k_j(X(s))\,ds}\,\Big|\,\tau(v)=0\right] = 1\ (j\neq i)
\end{aligned}\tag{5.2}$$

при $a, b \in A_i$. Отсюда сразу следует б).

В терминах функции Грина (5.2) означает, что при $a, b \in A_i$

$$\begin{aligned}
&G_i(a,b) - \frac{G_i(a,v)G_i(v,b)}{G_i(v,v)} = G(a,b) - \frac{G(a,v)G(v,b)}{G(v,v)};\\
&G_j(a,b) - \frac{G_j(a,v)G_j(v,b)}{G_j(v,v)} = G_0(a,b) - \frac{G_0(a,v)G_0(v,b)}{G_0(v,v)},\ j\neq i.
\end{aligned}\tag{5.3}$$

Из (3.10) также следует, что в этом случае

$$G_i(a,b) - \frac{G_i(a,v)G_i(v,b)}{G_i(v,v)} < G_0(a,b) - \frac{G_0(a,v)G_0(v,b)}{G_0(v,v)},$$

если $k_i \not\equiv 0$.

Далее заметим, что если теорема верна, то при добавлении к графу Γ ребер марковское свойство времени пребывания сохраняется. При этом ребра можно добавлять только так, что вершина v остается необходимой, то есть только в пределах одной компоненты связности или когда одной из вершин ребра является v. Таким образом, мы получим более общие, нежели а–в), но более удобные для проверки условия справедливости теоремы.

Добавим к графу Γ ребро rs со значением $t > 0$, а значение на петле rr уменьшим на t (чтобы сумма значений на исходящих из вершины ребрах была нулевой, и функция Грина была определена корректно). Пусть $r, s \in A_i \cup \{v\}$. Используя теорему 1, легко видеть, что функцию Грина G_t полученного графа можно выразить через исходную по формуле

$$\begin{aligned} &G_t(x,y) \\ &= G(x,y)\frac{1+t\left[\left(G(r,r)-\frac{G(x,r)G(r,y)}{G(x,y)}\right)-\left(G(s,r)-\frac{G(x,r)G(s,y)}{G(x,y)}\right)\right]}{1+t(G(r,r)-G(s,r))} \\ &\qquad = \frac{1+tA(x,y)}{1+tB}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

Поскольку

$$\frac{1}{G_t(v,v)} = \frac{1}{G(v,v)}\left[1+\sum_{k=1}^{\infty} A(v,v)^{k-1}[A(v,v)-B](-t)^k\right],$$

то с учетом соотношений (5.3) при $k_i \not\equiv 0$ равенство а) для функции G_t сводится к равенству а) для функции G и равенствам

$$\begin{aligned} &\frac{1}{G(v,v)}\left[\frac{G(v,r)G(s,v)}{G(v,v)}-\frac{G(v,r)G(r,v)}{G(v,v)}\right] \\ &\qquad = \frac{1}{G_i(v,v)}\left[\frac{G_i(v,r)G_i(s,v)}{G_i(v,v)}-\frac{G_i(v,r)G_i(r,v)}{G_i(v,v)}\right], \end{aligned} \tag{5.5}$$

$$\begin{aligned} &(N-1)\frac{1}{G_0(v,v)}\left[\frac{G_0(v,r)G_0(s,v)}{G_0(v,v)}-\frac{G_0(v,r)G_0(r,v)}{G_0(v,v)}\right] \\ &\qquad = \sum_{j\neq i}\frac{1}{G_j(v,v)}\left[\frac{G_j(v,r)G_j(s,v)}{G_j(v,v)}-\frac{G_j(v,r)G_j(r,v)}{G_j(v,v)}\right]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Но, в силу непрерывности функции Грина по k, получаем, что эти равенства верны и для произвольного k.

При $r = v$ из (5.5) получаем

$$\frac{G(s,v)}{G(v,v)} = \frac{G_i(s,v)}{G_i(v,v)}. \tag{5.7}$$

Из (5.5) и (5.7) легко получить, что

$$\frac{G(v,r)}{G(v,v)} = \frac{G_i(v,r)}{G_i(v,v)}. \tag{5.8}$$

Из (5.6) при $r = v$ получаем

$$(N-1)\frac{G_0(s,v)}{G_0(v,v)} = \sum_{j\neq i} \frac{G_i(s,v)}{G_i(v,v)}. \tag{5.9}$$

Из (5.9) и равенства в) с $a = s, b = v$ (которое должно быть выполнено для G, иначе марковского свойства не было бы и для дерева) получаем равенство средних арифметического и геометрического, откуда

$$\frac{G_0(s,v)}{G_0(v,v)} = \frac{G_j(s,v)}{G_j(v,v)},\ j \neq i. \tag{5.10}$$

Аналогично рассуждениям, приведенным выше можно получить

$$\frac{G_0(v,r)}{G_0(v,v)} = \frac{G_j(v,r)}{G_j(v,v)},\ j \neq i. \tag{5.11}$$

Как легко видеть, равенства (5.10) и (5.11) обобщают равенство в).

Таким образом, мы получили, что проверку условий а–в) естественно заменить проверкой более общих условий на функцию G:

а′) $\dfrac{1}{G(v,v)} - \dfrac{1}{G_0(v,v)} = \sum\limits_1^N \left[\dfrac{1}{G_i(v,v)} - \dfrac{1}{G_0(v,v)}\right]$,

б′) Если $a \in A_i$, то

$$\frac{G_i(a,v)}{G_i(v,v)} = \frac{G(a,v)}{G(v,v)},\ \frac{G_i(v,a)}{G_i(v,v)} = \frac{G(v,a)}{G(v,v)},\ \frac{G_j(a,v)}{G_j(v,v)} = \frac{G_0(a,v)}{G_0(v,v)},$$
$$\frac{G_j(v,a)}{G_j(v,v)} = \frac{G_0(v,a)}{G_0(v,v)} \quad (j \neq i).$$

Теперь докажем, что эти соотношения также являются *достаточными*, то есть из их выполнения следует, что при добавлении к Г конечного числа ребер для полученной функции Грина также будут выполнены равенства а′) и б′), а значит и равенства а–в).

Для проверки этих соотношений заметим, что для $k \equiv k_i$ они, очевидно, верны. Значит, согласно утверждению 1, достаточно показать, что они остаются справедливы при изменении k в конечном множестве вершин. Поэтому остается проверить, что если равенства а′) и б′) выполнены для функции Грина G с некоторой функцией k, то увеличении k в произвольной вершине c на $t \geqslant 0$ они также остаются выполнены.

Для этого нам потребуется простое, но полезное обобщение соотношения (5.3).

Лемма 2. *Если $a, b \in A_i$, то*

$$G(a,b) - \frac{G(a,v)G(x,b)}{G(x,v)} = G_i(a,b) - \frac{G_i(a,v)G_i(x,b)}{G_i(x,v)}.$$

Если при этом $x \notin A_i$, то к тому же

$$G(a,b) - \frac{G(a,v)G(x,b)}{G(x,v)} = G(a,b) - \frac{G(a,v)G(v,b)}{G(v,v)}.$$

Доказательство леммы. Имеем

$$0 = \left[G(a,b) - \frac{G(a,v)G(x,b)}{G(x,v)}\right] - \left[G(a,b) - \frac{G(a,v)G(v,b)}{G(v,v)}\right] + \frac{G(a,v)}{G(x,v)}\left[G(x,b) - \frac{G(x,v)G(v,b)}{G(v,v)}\right]. \tag{5.12}$$

Пусть $a, b, x \in A_i$. Как мы знаем из (5.3) и б′), последние два слагаемых в (5.12) совпадают с соответствующими слагаемыми для G_i. Значит, совпадает и первое.

Если $a, b \in A_i, x \notin A_i$, то в силу формулы (3.10) имеем $G(x,b) = \dfrac{G(x,v)G(v,b)}{G(v,v)}$. Значит, третье слагаемое в (5.12) равно 0, следовательно, первое слагаемое совпадает со вторым. Но второе совпадает с соответствующим слагаемым для G_i.

Последний случай в лемме разбирается аналогично. □

Продолжим доказательство теоремы.

По аналогии с рассуждениями выше о добавлении ребер нетрудно показать, что достаточно проверять только условие б$'$). Проверим, например, первое из равенств в б$'$).

Функция Грина G_t, получаемая при увеличении $k(c)$ на t может быть найдена по формуле (4.11), поэтому

$$\frac{G_t(a,v)}{G_t(v,v)} = \frac{G(a,v)}{G(v,v)} \frac{1 + t\left(G(c,c) - \dfrac{G(a,c)G(c,v)}{G(a,v)}\right)}{1 + t\left(G(c,c) - \dfrac{G(v,c)G(c,v)}{G(v,v)}\right)}, \tag{5.13}$$

и остается только применить лемму. □

Замечание 3. Условие двусторонней проходимости ребер, накладываемое на граф Г марковского процесса, требовалось для простого и интуитивно понятного определения компонент связности. Если отказаться от этого условия, то Г уже нельзя рассматривать как неориентированный граф, и связность можно понимать по-разному. Самое распространенное понятие связности, предполагающее, что от вершины a до вершины b и обратно можно дойти "по стрелочкам", нам не подходит, поскольку важно, чтобы компоненты связности не имели соединяющих их ребер (а при таком понимании связности одностороннее ребро из одной компоненты в другую вполне может существовать). Можно, однако, воспользоваться определением связности без учета направлений на ребрах (как в неориентированном графе). Как легко видеть, в этом случае доказательство теоремы 2 остается справедливым.

Литература

1. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* I. *Цепи с дискретным временем.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ **119** (1982), 39–61.
2. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* II. *Цепи с непрерывным временем.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ **130** (1983), 56–64.
3. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* III. *Цепи на дереве с одной точкой ветвления.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **142** (1985), 25–38.
4. С. С. Валландер, *Времена пребывания для счетных цепей Маркова.* IV. *Цепи на произвольном дереве.* – Зап. научн. семин. ЛОМИ **158** (1987), 39–45.
5. С. С. Валландер, *Некоторые свойства времен пребывания и переходов для счетных цепей Маркова.* — Тезисы докладов Четвертой Международной

Вильнюсской конференции по теории вероятностей и математической статистике **1**, Вильнюс (1985), сс. 116–118.
6. К. Ито, Г. Маккин, *Диффузионные процессы и их траектории.* Мир, М., 1968.
7. A. Berliner, R. Brualdi, *A combonatorial proof of the Dodgson/Muir determinant identity.* – Intern. J. Inform. System Sci. **4**, No. 1 (2008), 1–7.

Vorotov A. A. Markov property of the occupation time for countable Markov chains.

The paper deals with the Markov property for the occupation time process for homogeneous Markov chain with continuous time and countable state space. The well-known result that the Markov property is valid for random walk on a tree is generalized on the case of random walk on arbitrary graph.

С.-Петербургский
государственный университет,
Лаборатория им. П.Л. Чебышева,
14 линия В.О., д. 29Б,
199178 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vaa.spb@gmail.com

Поступило 20 ноября 2012 г.