Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

А. Н. Бородин

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К ОБЫКНОВЕННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ УРАВНЕНИЯМ

В работе дается вывод вероятностных представлений для обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка. Классический подход основан на выводе вероятностных представлений для уравнения в частных производных (обратное уравнение Колмогорова (см. [1])). Затем с помощью преобразования Лапласа по переменной времени задача сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям второго порядка. В работе предлагается непосредственный вывод вероятностных представлений для таких уравнений минуя уравнения в частных производных. Основополагающими результатами, в которых даны вероятностные представления для решений дифференциальных задач, являются результаты М. Каца [2] и Р. З. Хасьминского [3].

1. Вспомогательные результаты. Рассмотрим результаты, касающиеся решений обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка.

Предложение 1.1. *Пусть $g(x)$, $x \in (l, r)$, – неотрицательная непрерывная функция, не равная нулю тождественно, $l \geqslant -\infty$, $r \leqslant \infty$. Тогда однородное уравнение*

$$\phi''(x) - g(x)\phi(x) = 0, \quad x \in (l, r), \tag{1.1}$$

имеет два неотрицательных выпуклых линейно независимых решения ψ и φ таких, что $\psi(x)$, $x \in (l, r)$, является возрастающим , а $\varphi(x)$, $x \in (l, r)$, – убывающим решением.

Доказательство. Не умаляя общности считаем, что $0 \in (l, r)$ и $g(0) > 0$. Рассмотрим при $x \in [0, r)$ решение ψ_+ уравнения (1.1) с

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, вероятностное представление, интегральный функционал.

Настоящая работа поддержана грантом НШ 1216.2012.1 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

начальными значениями $\psi_+(0) = 1$, $\psi'_+(0) = 1$. Такое решение является выпуклым, поэтому $\psi_+(x) \geqslant 1 + x$. Другое линейно независимое решение, как легко проверить, имеет вид

$$\varphi(x) = \psi_+(x) \int\limits_x^r \frac{dv}{\psi_+^2(v)} \leqslant \psi_+(x) \int\limits_x^r \frac{dv}{(1+v)^2}.$$

Так как функция $\psi'_+(x)$ неубывающая, то при $x \in [0, r)$ справедлива оценка

$$\varphi'(x) = \psi'_+(x) \int\limits_x^r \frac{dv}{\psi_+^2(v)} - \frac{1}{\psi_+(x)} \leqslant \int\limits_x^r \frac{\psi'_+(v)}{\psi_+^2(v)}\, dv - \frac{1}{\psi_+(x)} = -\frac{1}{\psi_+(r)} \leqslant 0.$$

В результате имеем, что функция $\varphi(x)$, $x \in [0, r)$, неотрицательна, выпукла и не возрастает. Кроме того, поскольку

$$\varphi'(x) - \varphi'(0) = \int\limits_0^x g(v)\varphi(v)\, dv > 0,$$

то $\varphi'(0) < 0$. Продолжим решение φ на интервал $(l, 0]$ так, чтобы оно удовлетворяло уравнению (1.1). Поскольку решение является выпуклым, то $\varphi(x) \geqslant \varphi(0) + \varphi'(0)x$ при $x \in (l, 0]$. Другое линейно независимое решение на этом интервале имеет вид

$$\psi(x) = \varphi(x) \int\limits_l^x \frac{dv}{\varphi^2(v)} \leqslant \varphi(x) \int\limits_l^x \frac{dv}{(\varphi(0) + \varphi'(0)v)^2}.$$

Используя рассуждения аналогичные предыдущим, получим, что для этого решения справедливы оценки

$$\psi'(x) = \frac{1}{\varphi(x)} + \varphi'(x) \int\limits_l^x \frac{dv}{\varphi^2(v)} \geqslant \frac{1}{\varphi(x)} + \int\limits_l^x \frac{\varphi'(v)}{\varphi^2(v)}\, dv = \frac{1}{\varphi(l)} \geqslant 0$$

и $\psi'(0) > 0$. Продолжим решение ψ на интервал $[0, r)$ так, чтобы оно удовлетворяло уравнению (1.1). Поскольку решение является выпуклым, то оно строго возрастает на этом интервале. Предложение 1.1 доказано. □

Рассмотрим однородное уравнение

$$\phi''(x) + q(x)\phi'(x) - h(x)\phi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}. \tag{1.2}$$

Положим

$$p(x) := \exp\Big(\int\limits_0^x q(v)\,dv\Big), \quad y(x) := \int\limits_0^x \frac{dv}{p(v)}, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Функция $y(x)$ строго возрастает, $y(0) = 0$, и, поэтому она имеет строго возрастающую обратную функцию $y^{(-1)}(y)$, $y \in (l, r)$, где

$$l := -\int\limits_{-\infty}^0 \frac{dv}{p(v)} \geqslant -\infty, \quad r := \int\limits_0^\infty \frac{dv}{p(v)} \leqslant \infty.$$

Уравнение (1.2) с помощью замены переменной может быть приведено к виду (1.1) при

$$g(y) = p^2(y^{(-1)}(y))h(y^{(-1)}(y)), \qquad y \in (l, r). \tag{1.3}$$

Действительно, сделаем замену переменной x на $y(x)$. Для этого, положим $\overline{\phi}(y) := \phi(y^{(-1)}(y))$ при $y \in (l, r)$, т.е. рассмотрим такую функцию $\overline{\phi}$, что $\phi(x) = \overline{\phi}(y(x))$, $x \in \mathbf{R}$. Поскольку уравнение (1.2) можно записать в виде

$$(p(x)\phi'(x))' - p(x)h(x)\phi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

и $p(x)\phi'(x) = \overline{\phi}'(y(x))$, то уравнение (1.2) преобразуется к виду

$$\frac{\overline{\phi}''(y(x))}{p(x)} - p(x)h(x)\phi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R},$$

или, что эквивалентно, к виду

$$\overline{\phi}''(y(x)) - p^2(y^{(-1)}(y(x)))h(y^{(-1)}(y(x)))\overline{\phi}(y(x)) = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

Это уравнение относительно новой переменной y имеет вид (1.1).

Важным является вопрос о том, когда уравнение (1.2) не имеет на всей прямой ограниченных решений отличных от нулевого. Поскольку уравнение (1.1), рассмотренное на всей прямой, не имеет ограниченных решений кроме нулевого, то при $l = -\infty$ и $r = \infty$, это же верно и для уравнения (1.2).

В результате мы доказали следующий результат.

Предложение 1.2. *Пусть $q(x)$ и $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции, причем h неотрицательная функция, не равная нулю тождественно. Тогда уравнение* (1.2) *имеет два неотрицательных линейно*

независимых решения ψ и φ таких, что $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является возрастающим, а $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающим решением.

Если $l = -\infty$ и $r = \infty$, то уравнение (1.2) *не имеет ограниченных решений отличных от нулевого.*

Функции $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, называются *фундаментальными решениями* уравнения (1.2). Их *вронскиан* $w(x) := \psi'(x)\varphi(x) - \psi(x)\varphi'(x)$ имеет представление

$$w(x) = w(0) \exp\left(- \int_0^x q(y)\, dy \right)$$

и является положительной функцией.

Действительно, из уравнения (1.2) следует, что вронскиан удовлетворяет уравнению

$$w'(x) = -q(x)\, w(x), \quad x \in \mathbf{R},$$

из которого следует требуемая формула.

Если же либо $l > -\infty$, либо $r < \infty$, то ответ на наш вопрос будет зависеть от функций $q(x)$ и $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$. Так при $l = -\infty$, $r < \infty$ и $\lim\limits_{y \uparrow r} g(y) < \infty$, где g определяется равенством (1.3), у уравнения (1.2) будет существовать ограниченное решение на всей прямой. Это является следствием того, что в этом случае функцию g можно непрерывно продолжить за границу r. Тогда решение $\overline{\psi}(x)$ уравнения (1.1) будет ограниченным при $x \in (l, r)$, а функция $\psi(x) = \overline{\psi}(y(x))$, $x \in \mathbf{R}$, будет ограниченным решением уравнения (1.2). Если при этом $\lim\limits_{y \uparrow r} g(y) = \infty$, то отличное от нулевого ограниченное решение может как существовать, так и не существовать. Аналогично рассматривается левая граница l.

Приведем примеры. Рассмотрим при $\alpha \in \mathbf{R}$ уравнение

$$\phi''(x) - \phi'(x) - e^{\alpha x}\phi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}.$$

С помощью замены переменной $x = \ln(y+1)$, $y \in (-1, \infty)$, это уравнение преобразуется к следующему уравнению

$$\overline{\phi}''(y) - (y+1)^{\alpha-2}\overline{\phi}(y) = 0, \quad y \in (-1, \infty).$$

При $\alpha = 2$ существует предел $\lim\limits_{y \downarrow -1} g(y) = 1$. Фундаментальные решения преобразованного уравнения имеют вид $\overline{\varphi}(y) = e^{-y}$ и $\overline{\psi}(y) = e^{y}$.

Решения исходного уравнения следующие: $\varphi(x) = \exp\left(1-e^x\right)$ и $\psi(x) = \exp\left(e^x - 1\right)$, $x \in \mathbf{R}$. При этом решение φ является ограниченным.

При $\alpha = 0$ фундаментальные решения следующие:

$$\overline{\varphi}(y) = (y+1)^{\sqrt{5/4}+1/2} \quad \text{и} \quad \overline{\psi}(y) = (y+1)^{-\sqrt{5/4}+1/2},$$

а решения исходного уравнения:

$$\varphi(x) = e^{x(\sqrt{5/4}+1/2)} \quad \text{и} \quad \psi(x) = e^{-x(\sqrt{5/4}-1/2)},$$

$x \in \mathbf{R}$. В результате нет ограниченных нетривиальных решений.

При $\alpha = 1$ фундаментальные решения преобразованного уравнения имеют вид $\overline{\varphi}(y) = \sqrt{y+1}K_1(2\sqrt{y+1})$ и $\overline{\psi}(y) = \sqrt{y+1}I_1(2\sqrt{y+1})$, где I_1, K_1 – модифицированные функции Бесселя. Решения исходного уравнения следующие: $\varphi(x) = e^{x/2}K_1(2e^{x/2})$ и $\psi(x) = e^{x/2}I_1(2e^{x/2})$, $x \in \mathbf{R}$. При этом решение φ является ограниченным, согласно асимптотическому поведению модифицированной функции Бесселя K_1.

Условия $l = -\infty$ и $r = \infty$, гарантирующие отсутствие ограниченных решений отличных от нулевого, не всегда удобно проверять. Кроме того, они не охватывают все случаи, поэтому мы приведем следующий полезный результат.

Предложение 1.3. *Пусть $q(x)$ и $h(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции и функция h неотрицательна. Предположим, что для некоторого $C > 0$*

$$|q(x)| \leqslant C(1+|x|) \quad \textit{при всех} \quad x \in \mathbf{R}, \tag{1.4}$$

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int_0^y h(x)\,dx > 0, \quad \liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int_{-y}^0 h(x)\,dx > 0. \tag{1.5}$$

Тогда однородное уравнение (1.2) *не имеет ограниченных решений отличных от нулевого.*

Доказательство. Согласно предложению 1.2 однородное уравнение (1.2) имеет два неотрицательных линейно независимых решения ψ и φ таких, что $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является возрастающим , а $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающим решением. Предположим, что $\psi_+ := \lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) < \infty$. Из левого условия (1.5) вытекает существование таких $y_0 > 1$ и $h_0 > 0$, что для всех $y > y_0$

$$\frac{1}{y}\int_0^y h(x)\,dx \geqslant h_0.$$

Положим $\varepsilon := \frac{h_0\psi_+}{2h_0+4C}$, где константа C выбирается из условия (1.4). Считаем y_0 столь большим, что при $x \geqslant y_0$

$$\psi(x) \in (\psi_+ - \varepsilon, \psi_+).$$

Положим $y_1 := \frac{h_0+4C}{h_0(h_0+2C)} \int\limits_0^{y_0} h(x)\,dx$. При $y > \max\{y_0, y_1\}$ имеем

$$\int\limits_{y_0}^{y} \psi''(x)\,dx = \int\limits_{y_0}^{y} (h(x)\psi(x) - q(x)\psi'(x))\,dx$$

$$\geqslant \int\limits_{y_0}^{y} (h(x)\psi(x) - 2Cx\psi'(x))\,dx \geqslant \int\limits_{y_0}^{y} h(x)\psi(x)\,dx - 2Cy(\psi(y) - \psi(y_0))$$

$$\geqslant (\psi_+ - \varepsilon)\Big(yh_0 - \int\limits_0^{y_0} h(x)\,dx\Big) - 2Cy\varepsilon$$

$$= y\psi_+\frac{h_0}{2} - \psi_+\Big(\frac{h_0+4C}{2h_0+4C}\Big)\int\limits_0^{y_0} h(x)\,dx = \psi_+\frac{h_0}{2}(y - y_1) > 0.$$

Следовательно, при $y > \max\{y_0, y_1\}$

$$\psi'(y) - \psi'(y_0) = \int\limits_{y_0}^{y} \psi''(x)\,dx > 0,$$

а это противоречит тому, что

$$\int\limits_{y_0}^{\infty} \psi'(y)\,dy = \psi_+ - \psi(y_0) < \infty.$$

Поэтому предел ψ_+ не может быть конечным, а решение ψ не может быть ограниченным. Аналогично устанавливается, что решение φ не может быть ограниченным, если выполняется правое из условий (1.5). В результате ограниченным может быть только нулевое решение. $\square$

2. Дифференциальные уравнения, заданные на всей прямой. Пусть $X(t)$, $t \geqslant 0$, – процесс, являющийся решением стохастического дифференциального уравнения

$$dX(t) = \sigma(X(t))\,dW(t) + \mu(X(t))\,dt, \quad X(0) = x. \tag{2.1}$$

Предположим, что для каждого $N > 0$ существует такая постоянная K_N, что для всех $x, y \in [-N, N]$

$$|\sigma(x) - \sigma(y)| + |\mu(x) - \mu(y)| \leqslant K_N |x - y|. \tag{2.2}$$

Пусть выполняется ограничение на рост коэффициентов σ и μ: существует такая константа K, что для всех $x \in \mathbf{R}$

$$|\sigma(x)| + |\mu(x)| \leqslant K(1 + |x|). \tag{2.3}$$

Тогда, согласно теореме о существовании и единственности решений стохастических дифференциальных уравнений (см. теорему 3 § 6 из [4]), уравнение (2.1) имеет единственное непрерывное решение, определенное для всех моментов $t \geqslant 0$.

Обозначим $\mathbf{P}_x$ и $\mathbf{E}_x$ – вероятность и математическое ожидание по процессу X с начальным значением $X(0) = x$.

Пусть $H_{a,b} = \min\{s : X(s) \notin (a, b)\}$ – момент первого выхода процесса $X(s)$ из интервала (a, b), а τ – экспоненциально распределенный с параметром $\lambda > 0$ момент, независящий от процесса X.

Следующий результат дает вероятностное представление для решения неоднородного дифференциального уравнения второго порядка на всей прямой.

Теорема 2.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции. Предположим, что Φ ограничена и f неотрицательна. Пусть $U(x)$ – ограниченное решение уравнения*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + f(x))U(x) = -\lambda\,\Phi(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.4}$$

Тогда

$$U(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau)) \exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds\Big)\Big\}. \tag{2.5}$$

Замечание 2.1. При условиях теоремы 2.1 уравнение (2.4) имеет только одно ограниченное решение в $\mathbf{R}$, поскольку оно должно иметь вероятностное выражение в виде (2.5).

Доказательство теоремы 2.1. Положим

$$\eta(t) := U(X(t)) \exp\Big(-\lambda t - \int_0^t f(X(v))\,dv\Big).$$

Применяя формулу Ито, получаем, что для любого $0 < r$

$$\eta(r) - \eta(0) = \int_0^r \exp\left(-\lambda t - \int_0^t f(X(v))\,dv \right) \Big[U'(X(t))\sigma(X(t))\,dW(t)$$

$$+ \Big(U'(X(t))\mu(X(t)) + \frac{1}{2}U''(X(t))\sigma^2(X(t)) - (\lambda + f(X(t)))U(X(t)) \Big) dt \Big].$$

Принимая во внимание (2.4), можно написать

$$\eta(r \wedge H_{a,b}) - U(x) = \int_0^r \mathbb{1}_{[0,H_{a,b})}(t) e^{-\lambda t} \exp\left(-\int_0^t f(X(v))\,dv \right)$$
$$\times \big[U'(X(t))\sigma(X(t))\,dW(t) - \lambda \Phi(X(t))\,dt \big]. \qquad (2.6)$$

Важно, что $H_{a,b}$ является моментом остановки относительно потока σ-алгебр $\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), 0 \leqslant s \leqslant t)$. Поэтому стохастический интеграл корректно определен. Заметим также, что все подынтегральные функции ограничены, поскольку процесс X не выходит за пределы интервала (a, b) до момента времени $H_{a,b}$. Следовательно, к стохастическому интегралу можно применить математическое ожидание. Теперь, вычисляя от обеих частей равенства (2.6) математическое ожидание и учитывая, что математическое ожидание стохастического интеграла равно нулю, получаем

$$U(x) = \mathbf{E}_x \eta(r \wedge H_{a,b})$$
$$+ \mathbf{E}_x \int_0^{r \wedge H_{a,b}} \lambda e^{-\lambda t} \Phi(X(t)) \exp\Big(-\int_0^t f(X(v))\,dv \Big)\,dt. \qquad (2.7)$$

Поскольку диффузионный процесс X непрерывен и определен для всех моментов времени, то $H_{a,b} \to \infty$ при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла в равенстве (2.7) можно перейти к пределу при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$. Далее устремим r к бесконечности. В силу определения процесса η, очевидно, что $\mathbf{E}_x \eta(r)$ стремится к нулю. В результате из (2.7) получим равенство

$$U(x) = \mathbf{E}_x \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} \Phi(X(t)) \exp\Big(-\int_0^t f(X(v))\,dv \Big)\,dt.$$

Тогда, используя предположение, что τ не зависит от диффузии X и имеет плотность $\lambda e^{-\lambda t}$, $t \geqslant 0$, по теореме Фубини выводим, что это равенство совпадает с (2.5). $\square$

Справедлив следующий вариант теоремы 2.1.

Теорема 2.2. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$ и $F(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывные функции, функции Φ, F ограничены, а функция f неотрицательна. Пусть $U(x)$ – ограниченное решение уравнения*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + f(x))U(x) = -\lambda\Phi(x) - F(x), \quad x \in \mathbf{R}. \tag{2.10}$$

Тогда

$$U(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds\Big) + \int_0^\tau F(X(s))\exp\Big(-\int_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\Big\}.$$

Доказательство. Этот результат является следствием теоремы 2.1. Действительно, так как τ не зависит от X, по теореме Фубини

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}_x\Big\{\int_0^\tau F(X(s))\exp\Big(-\int_0^s f(X(v))\,dv\Big)ds\Big\}\\
&= \lambda\int_0^\infty e^{-\lambda t}\int_0^t \mathbf{E}_x\Big\{F(X(s))\exp\Big(-\int_0^s f(X(v))\,dv\Big)\Big\}ds\,dt\\
&= \int_0^\infty e^{-\lambda s}\mathbf{E}_x\Big\{F(X(s))\exp\Big(-\int_0^s f(X(v))\,dv\Big)\Big\}ds\\
&= \frac{1}{\lambda}\mathbf{E}_x\Big\{F(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(v))\,dv\Big)\Big\}.
\end{aligned}$$

Теперь мы можем применить теорему 2.1 с функцией $\Phi(x) + \frac{1}{\lambda}F(x)$ вместо $\Phi(x)$. $\square$

3. Дифференциальные уравнения, заданные на конечном интервале. Рассмотрим вопрос о вероятностном представлении решений дифференциальных уравнений второго порядка, заданных на конечном интервале и удовлетворяющих на концах интервала граничным условиям. В следующем результате изначально можно предположить, что функции μ и σ удовлетворяют условию (2.2) только на интервале (a,b), поскольку можно продолжить функции μ и σ за пределы интервала (a,b) таким способом, чтобы выполнялись условия (2.2), (2.3). При этом процесс $X(t)$ не изменится, когда $t \in [0, H_{a,b}]$.

Теорема 3.1. *Пусть $\Phi(x)$, $f(x)$ и $F(x)$, $x \in [a,b]$, – непрерывные функции, причем f неотрицательна. Пусть $U(x)$, $x \in [a,b]$, – решение задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + f(x))U(x) = -\lambda\Phi(x) - F(x), \quad x \in (a,b), \tag{3.1}$$

$$U(a) = \Phi(a), \quad U(b) = \Phi(b). \tag{3.2}$$

Тогда

$$U(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau \wedge H_{a,b}))\exp\Big(-\int\limits_0^{\tau\wedge H_{a,b}} f(X(s))\,ds\Big) + \int\limits_0^{\tau\wedge H_{a,b}} F(X(s))\exp\Big(-\int\limits_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\Big\}. \tag{3.3}$$

Доказательство. Сначала продолжим решение задачи (3.1), (3.2) на всю вещественную ось. Можно так продолжить функции Φ, f и F на всю вещественную ось, чтобы они были непрерывными, ограниченными и при этом функция f была неотрицательной.

Пусть $\psi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – возрастающее, а $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – убывающее неотрицательные линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (3.1). Тогда

$$\psi(b)\varphi(a) - \psi(a)\varphi(b) > 0.$$

Продолжение решения задачи (3.1), (3.2) на вещественную ось может быть записано в следующей форме:

$$U(x) = U_p(x) + A_{a,b}\psi(x) + B_{a,b}\varphi(x), \tag{3.4}$$

где U_p – некоторое частное решение уравнения (3.1) при $x \in \mathbf{R}$, а постоянные $A_{a,b}$ и $B_{a,b}$ удовлетворяют системе алгебраических уравнений

$$\Phi(a) = U_p(a) + A_{a,b}\psi(a) + B_{a,b}\varphi(a),$$
$$\Phi(b) = U_p(b) + A_{a,b}\psi(b) + B_{a,b}\varphi(b).$$

Эта система имеет единственное решение

$$A_{a,b} = \frac{(\Phi(b) - U_p(b))\varphi(a) - (\Phi(a) - U_p(a))\varphi(b)}{\psi(b)\varphi(a) - \psi(a)\varphi(b)}, \tag{3.5}$$

$$B_{a,b} = \frac{\psi(b)(\Phi(a) - U_p(a)) - \psi(a)(\Phi(b) - U_p(b))}{\psi(b)\varphi(a) - \psi(a)\varphi(b)}. \tag{3.6}$$

Положим

$$\eta(t) := U(X(t)) \exp\Big(- \lambda t - \int_0^t f(X(v))\, dv\Big)$$
$$+ e^{-\lambda t} \int_0^t F(X(s)) \exp\Big(- \int_0^s f(X(v))\, dv\Big)\, ds.$$

Применяя формулу Ито, видим, что для любого $r > 0$

$$\eta(r) - \eta(0) = \int_0^r \exp\left(- \lambda t - \int_0^t f(X(v))\, dv\right) \Big[U'(X(t))\, \sigma(X(t))\, dW(t)$$
$$+ \Big(U'(X(t))\mu(X(t)) + \frac{1}{2}U''(X(t))\, \sigma^2(X(t))$$
$$- (\lambda + f(X(t)))U(X(t)) + F(X(t))\Big)dt\Big]$$
$$- \lambda \int_0^r e^{-\lambda t} \int_0^t F(X(s)) \exp\left(- \int_0^s f(X(v))\, dv\right) ds\, dt.$$

Принимая во внимание (3.1), имеем

$$\eta(H_{a,b}) - U(x) = \int_0^{H_{a,b}} \exp\Big(- \lambda t - \int_0^t f(X(v))\, dv\Big) \big[U'(X(t))\, \sigma(X(t))\, dW(t)$$

$$-\lambda\,\Phi(X(t))\big)\,dt\big] - \lambda \int\limits_0^{H_{a,b}} e^{-\lambda t} \int\limits_0^t F(X(s)) \exp\Big(-\int\limits_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\,dt.$$

Важно, что при $t \leqslant H_{a,b}$ функции $U'(X(t))$ и $\sigma(X(t))$ ограничены некоторой константой, зависящей от a, b. От стохастического интеграла

$$\int\limits_0^\infty \mathbb{1}_{[0,H_{a,b}]}(t) \exp\Big(-\lambda t - \int\limits_0^t f(X(v))\,dv\Big) U'(X(t))\,\sigma(X(t))\,dW(t),$$

ввиду того, что математическое ожидание квадрата подынтегральной функции интегрируемо по $t \in [0,\infty)$, можно вычислить математическое ожидание, и оно равно нулю.

Поскольку $\sup\limits_{x\in[a,b]} |\Phi(x)| < \infty$ и $\sup\limits_{x\in[a,b]} |F(x)| < \infty$, то математические ожидания и от других слагаемых разности $\eta(H_{a,b}) - U(x)$ конечны. Применяя математическое ожидание, выводим следующее равенство:

$$U(x) = \mathbf{E}_x \eta(H_{a,b}) + \lambda \mathbf{E}_x \int\limits_0^{H_{a,b}} \exp\Big(-\lambda t - \int\limits_0^t f(X(v))\,dv\Big) \Phi(X(t))\,dt$$

$$+\lambda \mathbf{E}_x \int\limits_0^{H_{a,b}} e^{-\lambda t} \int\limits_0^t F(X(s)) \exp\Big(-\int\limits_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\,dt.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в правой части этого равенства. Ввиду того, что выполняется равенство $U(X(H_{a,b})) = \Phi(X(H_{a,b}))$, а τ не зависит от X и имеет показательное распределение, по теореме Фубини эти слагаемые можно представить следующим образом:

$$\mathbf{E}_x \eta(H_{a,b}) = \mathbf{E}_x \Big\{ \Phi(X(H_{a,b})) \exp\Big(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(X(s))\,ds\Big) \mathbb{1}_{\{\tau > H_{a,b}\}} \Big\}$$

$$+ \mathbf{E}_x \Big\{ \int\limits_0^{H_{a,b}} F(X(s)) \exp\Big(-\int\limits_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\, \mathbb{1}_{\{\tau > H_{a,b}\}} \Big\},$$

$$\lambda \mathbf{E}_x \int_0^{H_{a,b}} \exp\Big(-\lambda t - \int_0^t f(X(v))\,dv\Big)\Phi(X(t))\,dt$$
$$= \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds\Big)\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant H_{a,b}\}}\Big\}$$

и

$$\lambda \mathbf{E}_x \int_0^{H_{a,b}} e^{-\lambda t}\int_0^t F(X(s))\exp\Big(-\int_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\,dt$$
$$= \mathbf{E}_x\Big\{\int_0^\tau F(X(s))\exp\Big(-\int_0^s f(X(v))\,dv\Big)\,ds\,\mathbb{1}_{\{\tau\leqslant H_{a,b}\}}\Big\}.$$

Складывая эти равенства, получаем, что $U(x)$ имеет выражение (3.3). □

4. Аналоги теоремы 3.1. Отдельный интерес представляют аналоги теоремы 3.1 в случае, когда либо $\tau\to\infty$, либо $H_{a,b}\to\infty$, либо оба предельных соотношения имеют место. Начнем рассмотрение этих результатов со второго случая.

Теорема 4.1. *Пусть $\Phi(x)$ и $f(x)$, $x\in\mathbf{R}$, – непрерывные функции, причем функция $\Phi(x)$ ограничена, а f неотрицательна.*

Предположим, что существует ограниченная на любом конечном интервале производная $\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)'$, $x\in\mathbf{R}$. Тогда

$$U(x) = \mathbf{E}_x\Big\{\Phi(X(\tau))\exp\Big(-\int_0^\tau f(X(s))\,ds\Big)\Big\} \tag{4.1}$$

является единственным ограниченным решением уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - (\lambda + f(x))U(x) = -\lambda\Phi(x), \quad x\in\mathbf{R}. \tag{4.2}$$

Замечание 4.1. В отличии от теоремы 2.1 здесь не предполагается, что уравнение (4.2) имеет ограниченное решение, а утверждается, что (4.1) будет таким решением.

Доказательство теоремы 4.1. Положим при $a < x < b$

$$U_{a,b}(x) = \mathbf{E}_x \left\{ \Phi(X(\tau \wedge H_{a,b})) \exp\left(- \int\limits_0^{\tau \wedge H_{a,b}} f(X(s))\, ds \right) \right\}. \qquad (4.3)$$

Тогда функция $U_{a,b}(x)$, $x \in (a,b)$, является решением задачи (3.1), (3.2) при $F \equiv 0$. Продолжим решение $U_{a,b}(x)$ на всю вещественную ось формулой (3.4).

Поскольку $H_{a,b} \to \infty$ при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$, то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$\lim_{a \to -\infty, b \to \infty} U_{a,b}(x) = U(x), \quad x \in \mathbf{R}. \qquad (4.4)$$

Можно считать, что $a < 0 < b$. Проинтегрируем (3.1). Тогда получим следующее равенство:

$$\frac{1}{2}\left(U'_{a,b}(x) - U'_{a,b}(0)\right) + \frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)} U_{a,b}(x) - \frac{\mu(0)}{\sigma^2(0)} U_{a,b}(0)$$
$$- \int\limits_0^x \left(\frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}\right)' U_{a,b}(y)\, dy - \int\limits_0^x \left(\frac{\lambda + f(y)}{\sigma^2(y)}\right) U_{a,b}(y)\, dy$$
$$= -\lambda \int\limits_0^x \frac{\Phi(y)}{\sigma^2(y)} dy. \qquad (4.5)$$

Проинтегрировав это равенство, получим, что при $x \in \mathbf{R}$

$$\frac{1}{2}(U_{a,b}(x) - U_{a,b}(0)) - \frac{1}{2} U'_{a,b}(0)\, x + \int\limits_0^x \frac{\mu(z)}{\sigma^2(z)} U_{a,b}(z)\, dz$$
$$- \frac{\mu(0)}{\sigma^2(0)} U_{a,b}(0) x - \int\limits_0^x \int\limits_0^z \left(\left(\frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}\right)' + \frac{\lambda + f(y)}{\sigma^2(y)} \right) U_{a,b}(y)\, dy\, dz$$
$$= -\lambda \int\limits_0^x \int\limits_0^z \frac{\Phi(y)}{\sigma^2(y)} dy\, dz. \qquad (4.6)$$

Из (4.3) следует, что функции $U_{a,b}$ при $x \in (a,b)$ ограничены той же константой, что и функция Φ. Используя (4.4) и применяя теорему

Лебега о предельном переходе под знаком интеграла, из (4.6) выводим, что существует предел $\widetilde{U}_0 := \lim\limits_{a\to-\infty, b\to\infty} U'_{a,b}(0)$ и

$$\frac{1}{2}(U(x)-U(0)) - \frac{1}{2}\widetilde{U}_0\, x + \int\limits_0^x \frac{\mu(z)}{\sigma^2(z)}\, U(z)\, dz - \frac{\mu(0)}{\sigma^2(0)} U(0)\, x$$
$$- \int\limits_0^x \int\limits_0^z \Big(\Big(\frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}\Big)' + \frac{\lambda + f(y)}{\sigma^2(y)}\Big) U(y)\, dy\, dz = -\lambda \int\limits_0^x \int\limits_0^z \frac{\Phi(y)}{\sigma^2(y)} dy\, dz. \quad (4.7)$$

Отсюда следует, что $U(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная функция. Кроме того, она дифференцируема при всех x включая нуль. При этом $\widetilde{U}_0 = U'(0)$. Дифференцируя (4.7) по x и применяя формулу интегрирования по частям, убеждаемся, что функция U удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}(U'(x) - U'(0)) + \int\limits_0^x \frac{\mu(y)}{\sigma^2(y)}\, U'(y)\, dy$$
$$- \int\limits_0^x \frac{\lambda + f(y)}{\sigma^2(y)} U(y)\, dy = -\lambda \int\limits_0^x \frac{\Phi(y)}{\sigma^2(y)}\, dy.$$

Дифференцируя это уравнение по x убеждаемся, что функция U является решением уравнения (4.2).

Теперь тот факт, что такое ограниченное решение единственно, следует из замечания 2.1. □

Рассмотрим во что перейдет теорема 3.1, когда $\tau \to \infty$ и $H_{a,b} \to \infty$ одновременно.

Теорема 4.2. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная неотрицательная функция. Предположим, что существует ограниченная на любом конечном интервале производная $\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)'$, $x \in \mathbf{R}$.*

Тогда функция

$$L(x) := \mathbf{E}_x \exp\left(- \int\limits_0^\infty f(X(s))\, ds \right) \quad (4.8)$$

является решением однородного уравнения

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)\phi''(x) + \mu(x)\phi'(x) - f(x)\phi(x) = 0, \quad x \in \mathbf{R}, \tag{4.9}$$

Для доказательства этого результата можно дословно повторить доказательство теоремы 4.1 при $\Phi \equiv 1$, дополнив его предельным переходом при $\lambda \to 0$. При этом $\lim\limits_{\lambda\to 0} \tau = \infty$ по вероятности, поскольку $\mathbf{P}(\tau > t) = e^{-\lambda t}$ при $t > 0$.

Из этого результата вытекает важное следствие.

Следствие 4.1. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная неотрицательная функция. Предположим, что существует ограниченная производная $\left(\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right)'$, $x \in \mathbf{R}$, и*

$$\liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int\limits_0^y \frac{f(x)}{\sigma^2(x)}\,dx > 0, \qquad \liminf_{y\to\infty} \frac{1}{y}\int\limits_{-y}^0 \frac{f(x)}{\sigma^2(x)}\,dx > 0. \tag{4.10}$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty f(X(s))\,ds = \infty \quad \text{п.н.} \tag{4.11}$$

Действительно, согласно предложению 1.3, при этих предположениях уравнение (4.9) не имеет ограниченных решений отличных от нулевого. Поэтому $L \equiv 0$ и, тем самым, выполняется (4.11).

Следствие 4.2. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная неотрицательная функция. Предположим, что выполнены условия* (4.10) *и для некоторого $C > 0$*

$$\left|\frac{\mu(x)}{\sigma^2(x)}\right| \leqslant C(1 + |x|) \quad \text{при всех} \quad x \in \mathbf{R}. \tag{4.12}$$

Тогда однородное уравнение (4.9) *имеет два таких неотрицательных линейно независимых решения $\psi(x)$ и $\varphi(x)$, что $\psi(x)$ возрастает и $\lim\limits_{x\to\infty} \psi(x) = \infty$, а $\varphi(x)$ убывает и $\lim\limits_{x\to-\infty} \varphi(x) = \infty$.*

5. Решения уравнений, зависящие от момента выхода из интервала. Интересным вариантом теоремы 3.1 является случай, когда только $\tau \to \infty$. Как мы уже видели, это выполняется при $\lambda \to 0$. Предварим рассмотрение этого случая следующим важным результатом.

Лемма 5.1. *При $x \in [a,b]$ справедлива оценка*

$$\mathbf{E}_x H_{a,b} < \infty. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Из (5.1) следует, что $\mathbf{P}_x(H_{a,b} < \infty) = 1$ при $x \in [a,b]$.

Доказательство леммы 5.1. Рассмотрим семейство $\{U_\lambda(x), x \in [a,b]\}_{\lambda \geqslant 0}$ решений задачи

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)U''(x) + \mu(x)U'(x) - \lambda U(x) = -1, \quad x \in (a,b), \tag{5.2}$$

$$U(a) = 0, \qquad U(b) = 0. \tag{5.3}$$

Для $\lambda > 0$ из теоремы 3.1 при $f \equiv 0$, $\varPhi \equiv 0$, и $F \equiv 1$ следует, что $U_\lambda(x) = \mathbf{E}_x\{\tau \wedge H_{a,b}\}$.

Докажем, что при всех $x \in [a,b]$

$$\sup_{\lambda > 0} U_\lambda(x) \leqslant U_0(x), \tag{5.4}$$

где $U_0(x)$ – решение задачи (5.2), (5.3) при $\lambda = 0$. Полезность этой оценки заключается в следующем. Поскольку $\lim\limits_{\lambda \to 0} \tau = \infty$ по вероятности, то $\lim\limits_{\lambda \to 0}\{\tau \wedge H_{a,b}\} = H_{a,b}$. Из оценки (5.4) по лемме Фату будет следовать, что

$$\mathbf{E}_x H_{a,b} \leqslant \sup_{\lambda > 0} \mathbf{E}_x\{\tau \wedge H_{a,b}\} \leqslant U_0(x),$$

а это мы и хотим доказать. □

Для доказательства (5.4) воспользуемся следующим предложением.

Предложение 5.1. *Решение задачи*

$$\frac{1}{2}\sigma^2(x)Q''(x) + \mu(x)Q'(x) = -F(x), \quad x \in (a,b), \tag{5.5}$$

$$Q(a) = \varPhi(a), \quad Q(b) = \varPhi(b), \tag{5.6}$$

имеет вид

$$Q(x) = \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)}\left(\varPhi(a) + \int_a^x (S(y) - S(a))F(y)\,dM(y)\right)$$
$$+ \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}\left(\varPhi(b) + \int_x^b (S(b) - S(y))F(y)\,dM(y)\right), \tag{5.7}$$

где

$$S(x) := \int^{x} \exp\left(-\int^{y} \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}\, dz \right) dy,$$

$$dM(x) = \frac{2}{\sigma^2(x)} \exp\left(\int^{y} \frac{2\mu(z)}{\sigma^2(z)}\, dz \right) dx.$$

В определении функций $S(x)$ и $M(x)$ нижний индекс интегрирования можно брать произвольным, но одинаковым.

Формулу (5.7) можно проверить непосредственным дифференцированием, поскольку функция S удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2(x)S''(x) + \mu(x)S'(x) = 0.$$

Разность $U_0(x) - U_\lambda(x)$ является решением задачи (5.5), (5.6) при $F(x) = \lambda U_\lambda(x)$, $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(b) = 0$. Следовательно, эта разность является неотрицательной. Это доказывает оценку (5.4) и, тем самым, завершает доказательство леммы 5.1.

Можно в задаче (3.1), (3.2) и в выражении (3.3) перейти к пределу при $\lambda \to 0$ и получить следующий результат.

Теорема 5.1. *Пусть $f(x)$ и $F(x)$, $x \in [a,b]$, – непрерывные функции и f неотрицательна. Пусть функция Φ задана только в двух точках, a и b.*

Тогда при $x \in [a,b]$ функция

$$Q(x) := \mathbf{E}_x \Bigg\{ \Phi(X(H_{a,b})) \exp\left(-\int_0^{H_{a,b}} f(X(s))\, ds \right) + \int_0^{H_{a,b}} F(X(s)) \exp\left(-\int_0^{s} f(X(v))\, dv \right) ds \Bigg\}$$

является решением задачи

$$\frac{1}{2}\,\sigma^2(x)Q''(x) + \mu(x)Q'(x) - f(x)Q(x) = -F(x), \quad x \in (a,b), \tag{5.8}$$

$$Q(a) = \Phi(a), \qquad Q(b) = \Phi(b). \tag{5.9}$$

Доказательство этой теоремы полностью повторяет рассуждения доказательства теоремы 3.1 при $\lambda = 0$ с заменой функции $U(x)$ на $Q(x)$ продолженную на всю вещественную ось. Здесь важным моментом является конечность интеграла $\int\limits_0^\infty \mathbf{E}_x \mathbb{1}_{[0,H_{a,b}]}(t)\,dt = \mathbf{E}_x H_{a,b}$. Благодаря этому можно брать математическое ожидание от разности $\eta(H_{a,b}) - Q(x)$, которая выражается стохастическим интегралом. В результате это математическое ожидание равно нулю, и мы получаем требуемое равенство $Q(x) = \mathbf{E}_x \eta(H_{a,b})$.

Из теоремы 5.1 и предложения 5.1 можно извлечь следующие следствия.

Предложение 5.2. *Вероятности выхода процесса X на границы интервала $[a,b]$ имеют вид*

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_x(X(H_{a,b}) = a) &= \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)}, \\ \mathbf{P}_x(X(H_{a,b}) = b) &= \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)}. \end{aligned} \tag{5.10}$$

Это следствие получается при $F \equiv 0$, $f \equiv 0$. При $\Phi(a) = 1$ и $\Phi(b) = 0$ имеем левое равенство в (5.10), а при $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(b) = 1$ – правое.

Предложение 5.3. *Математическое ожидание $\mathbf{E}_x H_{a,b}$ выражается формулой*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_x H_{a,b} = {} & \frac{S(b) - S(x)}{S(b) - S(a)} \int\limits_a^x (S(y) - S(a))\,dM(y) \\ & + \frac{S(x) - S(a)}{S(b) - S(a)} \int\limits_x^b (S(b) - S(y))\,dM(y). \end{aligned} \tag{5.11}$$

Для вывода этого следствия нужно воспользоваться теоремой 5.1 при $F \equiv 1$, $f \equiv 0$, $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(b) = 0$. Тогда $Q(x) = \mathbf{E}_x H_{a,b}$ является решением задачи (5.5), (5.6) при соответствующих параметрах.

Рассмотрим еще один момент остановки, момент первого достижения процессом X уровня z, т.е. момент $H_z = \min\{s : X(s) = z\}$. Момент может быть как конечным, так и бесконечным.

Теорема 5.2. *Пусть $f(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – непрерывная неотрицательная функция. Тогда*

$$L_z(x) := \mathbf{E}_x\Big\{\exp\Big(-\int\limits_0^{H_z} f(X(s))\,ds\Big)\mathbb{1}_{\{H_z<\infty\}}\Big\}$$
$$= \begin{cases} \psi(x) & \text{при } x \leqslant z, \\ \varphi(x) & \text{при } z \leqslant x, \end{cases} \tag{5.12}$$

где φ – положительное убывающее решение, а ψ – положительное возрастающее решение однородного уравнения (4.9)*, удовлетворяющие соотношениям $\varphi(z) = \psi(z) = 1$.*

Доказательство. Очевидно, что с вероятностью единица

$$H_z = \begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty} H_{a,z} & \text{при } x \leqslant z, \\ \lim\limits_{b\to\infty} H_{z,b} & \text{при } z \leqslant x. \end{cases} \tag{5.13}$$

Обозначим

$$Q^{(y)}_{a,b}(x) := \mathbf{E}_x\left\{\mathbb{1}_y(W(H_{a,b}))\exp\left(-\int\limits_0^{H_{a,b}} f(X(s))\,ds\right)\right\}.$$

Наличие в этом определении индикатора одноточечного множества задает сужение математического ожидания на траектории выходящие из интервала через верхнюю границу при $y = b$ и через нижнюю границу при $y = a$.

Поскольку с вероятностью единица

$$\mathbb{1}_{\{H_z<\infty\}} = \begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty} \mathbb{1}_{\{z\}}(W(H_{a,z})) & \text{при } x \leqslant z, \\ \lim\limits_{b\to\infty} \mathbb{1}_{\{z\}}(W(H_{z,b})) & \text{при } z \leqslant x, \end{cases}$$

то по теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла

$$L_z(x) = \begin{cases} \lim\limits_{a\to-\infty} Q^{(z)}_{a,z}(x) & \text{при } x \leqslant z, \\ \lim\limits_{b\to\infty} Q^{(z)}_{z,b}(x) & \text{при } z \leqslant x. \end{cases} \tag{5.14}$$

Применим теорему 5.1 при $F \equiv 0$. Решение задачи (5.8), (5.9) при $\Phi(a) = 1$ и $\Phi(b) = 0$ имеет вид

$$Q^{(a)}_{a,b}(x) = \frac{\psi_0(b)\varphi_0(x) - \psi(x)\varphi_0(b)}{\psi_0(b)\varphi_0(a) - \psi_0(a)\varphi_0(b)}, \tag{5.15}$$

а при $\Phi(a) = 0$ и $\Phi(b) = 1$ оно имеет вид

$$Q_{a,b}^{(b)}(x) = \frac{\psi_0(x)\varphi_0(a) - \psi_0(a)\varphi_0(x)}{\psi_0(b)\varphi_0(a) - \psi_0(a)\varphi_0(b)}, \tag{5.16}$$

где $\varphi_0(x)$ и $\psi_0(x)$, $x \in \mathbf{R}$, – фундаментальные решения однородного уравнения (4.9), которые выберем так, чтобы $\varphi_0(z) = \psi_0(z) = 1$.

Из (5.16) при $b = z$ следует, что $\lim\limits_{a\to-\infty} Q_{a,z}^{(z)}(x) = \frac{\psi_0(x)-\rho_-\varphi_0(x)}{1-\rho_-}$, где $\rho_- = \lim\limits_{a\to-\infty} \frac{\psi_0(a)}{\varphi_0(a)}$. Этот предел существует и меньше единицы поскольку отношение $\frac{\psi_0(a)}{\varphi_0(a)}$ – возрастающая функция. Положим $\psi(x) := \frac{\psi_0(x)-\rho_-\varphi_0(x)}{1-\rho_-}$, $x \in \mathbf{R}$. Ясно, что $\psi(x)$ – возрастающая функция, поскольку ее производная неотрицательна. При $x \leqslant z$ имеем $L_z(x) = \psi(x)$, и эта функция является неотрицательной.

Используем аналогичные аргументы для области $x \geqslant z$. В этом случае из (5.15) при $a = z$ следует, что $\lim\limits_{b\to\infty} Q_{z,b}^{(z)}(x) = \frac{\varphi_0(x)-\rho_+\psi_0(x)}{1-\rho_+}$, $\rho_+ = \lim\limits_{b\to\infty} \frac{\varphi_0(b)}{\psi_0(b)}$, и этот предел существует и он меньше единицы. Положим $\varphi(x) := \frac{\varphi_0(x)-\rho_+\psi_0(x)}{1-\rho_+}$, $x \in \mathbf{R}$. Тогда при $x \geqslant z$ имеем $L_z(x) = \varphi(x)$, и функция $\varphi(x)$, $x \in \mathbf{R}$, является строго убывающей и неотрицательной. □

Следствие 5.1. *Справедливо следующее равенство*

$$\mathbf{P}_x(H_z < \infty) = \begin{cases} \frac{S(x)-S(-\infty)}{S(z)-S(-\infty)} & \text{при } x \leqslant z, \\ \\ \frac{S(\infty)-S(x)}{S(\infty)-S(z)} & \text{при } z \leqslant x, \end{cases}$$

где при $S(-\infty) = -\infty$ или $S(\infty) = \infty$ соответствующее отношение полагается равным единице.

Это утверждение следует из (5.12) при $f \equiv 0$, а также из (5.7) при $F \equiv 0$ и (5.14).

Автор признателен С. Г. Крыжевичу за предоставленный результат (предложение 1.3) о неограниченности решений однородных дифференциальных уравнений второго порядка.

Литература

1. А. Н. Колмогоров, *Об аналитических методах в теории вероятностей.* — Успехи мат. наук **5** (1938), 5–41.
2. M. Kac, *On some connections between probability theory and differential and integral equations.* — In: Proc. Second Berkley Symp. Math. Stat. Probab. (1951), pp. 189–215.
3. Р. З. Хасьминский, *Распределение вероятностей для функционалов от траекторий случайного процесса диффузионного типа.* — Докл. АН СССР **104** (1955), 22–25.
4. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Стохастические дифференциальные уравнения.* — Наукова Думка, Киев, 1968.

Borodin A. N. Probabilistic approach to the ordinary differential equations.

The paper deals with an original approach to derivation of probabilistic expressions for the solutions of ordinary differential equations.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург,
и Санкт-Петербургский
государственный университет,
Математико–механический факультет
Университетский пр., 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: borodin@pdmi.ras.ru

Поступило 28 января 2013 г.