Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 412, 2013 г.

Я. И. Белопольская

ПРЯМЫЕ-ОБРАТНЫЕ СТОХАСТИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ, СВЯЗАННЫЕ С СИСТЕМАМИ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И ТЕОРЕМЫ СРАВНЕНИЯ

§1. Введение

Важность изучения нелинейных параболических уравнений и систем мотивируется задачами, возникающими в теории управления, дифференциальной геометрии, финансовой математики. В последние десятилетия такие системы активно изучались как в рамках теории уравнений в частных производных, так и в рамках теории стохастических уравнений при изучении приложений этих теорий к различным задачам математической физики.

Пусть d и d_1, d_2 – натуральные числа, $X = R^d$ и $Y = R^{d_1}$ – пара евклидовых пространств размерности d и d_1.

Рассмотрим задачу Коши для нелинейной параболической системы второго порядка относительно вектор-функции $u(t,x) \in Y, t \in [0,T]$, $x \in X$

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}F_l(s,x,u,\nabla u,\nabla^2 u) = 0, \quad u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad l = 1,\dots,d_1. \tag{1.1}$$

Отметим, что задачу Коши для системы такого вида не всегда возможно свести к решению соответствующей стохастической задачи даже в линейном случае, т.е. для системы вида

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + [L(s,x)u]_m + B^k_{lm}(s,x)\nabla_k u_m + c_{lm}(s,x)u_m = 0, \tag{1.2}$$
$$u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad i,j = 1,\dots,d, \quad l,m = 1,\dots,d_1,$$

где

$$[Lu]_m = F^{ml}_{ij}(x)\nabla^2_{ij}u_m.$$

Ключевые слова: прямые и обратные стохастические уравнения, теоремы сравнения, системы квазилинейных параболических уравнений, вязкостные решения задачи Коши.

Работа частично поддержана грантом РФФИ 12-01-00457 и проектом Минобрнауки 1.370.2011.

Здесь и ниже, если не оговорено противное, мы будем подразумевать, что выполняется соглашение о суммировании по повторяющимся индексам (вне зависимости от того, являются они верхними или нижними), и будем опускать знак суммирования.

Существует два класса параболических систем, к решению задачи Коши для которых удается применить вероятностный подход. К первому классу относятся системы параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(s,x)\nabla^2 u_l A(s,x) + \langle a(s,x), \nabla u_l\rangle \tag{1.3}$$

$$+B^i_{lm}(s,x)\nabla_i u_m + c_{lm}(s,x)u_m + g_l(x) = 0,\ u_l(T,x) = u_{0l}(x),\ l = 1,\dots,d_1.$$

Решение задачи Коши для системы вида (1.3) представляет собой функцию $u(s,x)$, определенную на пространстве $[0,T]\times X$ и принимающую значения в пространстве Y, которая допускает представление вида

$$\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}_{s,x,h}\left[\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle + \int\limits_s^T \langle \eta(\theta), g(\xi(\theta))\rangle d\theta\right], \tag{1.4}$$

где процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют СДУ

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t), \quad \xi(s) = x,$$
$$d\eta(t) = c(t,\xi(t))\eta(t)dt + C(t,\xi(t))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h,$$

и $w(t)$ – винеровский процесс со значениями в X.

Ко второму классу относятся параболические системы вида

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u^p}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr}[A^p]^*(s,x)\nabla^2 u^p A^p(s,x) + \langle a^p(s,x), \nabla u^p\rangle\\ &+\sum_{q=1}^{d_2}\lambda^{pq}(x)u^q + g^p(x) = 0, \quad u^p(T,x) = u^p_0(x), \quad p = 1,\dots,d_2,\end{aligned} \tag{1.5}$$

при этом в уравнении (1.5) суммирование по p не предполагается. Решение системы вида (1.5) представляет собой скалярную функцию $u^p(s,x) \equiv u(s,x,p)$, определенную на пространстве $[0,T]\times X\times V$, где $V = \{1,2,\dots,d_2\}$ – дискретное множество, и допускающую представление

$$u^p(s,x) = \mathbf{E}_{s,x,p}\left[u_0(\xi(T),\kappa(T)) + \int\limits_t^T g(\xi(\theta),\kappa(\theta))d\theta\right]. \tag{1.6}$$

Здесь $\xi(t)$ – диффузионный процесс, удовлетворяющий СДУ

$$d\xi(t) = a(\xi(t), \kappa(t))dt + A(\xi(t), \kappa(t))dw(t), \quad \xi(s) = x,$$

а $\kappa(t)$ – марковский процесс с дискретным множеством состояний $V = \{1, 2, \ldots, d_2\}$, удовлетворяющий СДУ вида

$$\kappa(t) = p + \int\limits_s^t \int\limits_V z\nu(d\theta, dz) = p + \sum_{z=1}^{d_2} z\nu((s,t], \{z\}), \tag{1.7}$$

где $\nu(dt, dz)$ – пуассоновская случайная мера. Генератор марковского процесса $\kappa(t)$ имеет вид

$$\Lambda f = \sum_{k=1}^{d_2} \lambda_{pk}[f_k - f_p]. \tag{1.8}$$

Напомним, что термин “вероятностный подход к решению задачи Коши для параболического уравнения” означает, что исходная задача сводится к построению некоторых случайных процессов, в терминах которых это решение может быть построено в виде средних от функционалов этих процессов. Вероятностные представления задачи Коши для систем (1.3) и (1.5) задаются формулами (1.4) и (1.6). При этом формулы (1.4), (1.6) могут быть использованы также для получения численных решений задачи Коши для (1.3) и (1.5) на основе численного решения соответствующих стохастических задач и вычисления математического ожидания в (1.4) и (1.6) с помощью метода Монте Карло.

Соответствующие представления для систем вида (1.3) были получены в работах [1, 2], а для системы (1.4) такие представления можно найти в [3].

Аналогичный подход удается реализовать и при переходе к изучению систем нелинейных параболических уравнений [4–6].

Рассмотрим семилинейную систему вида

$$\begin{gathered}\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^*(x,u)\nabla^2 u_l A(x,u) + \langle a(x,u), \nabla u_l\rangle \\ +B^i_{lm}(x,u)\nabla_i u_m + c_{lm}(x,u)u_m + g_l(x,u) = 0, \\ u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad l = 1, \ldots, d_1,\end{gathered} \tag{1.9}$$

и параллельно систему стохастических уравнений

$$d\xi(t) = a(\xi(t), u(t,\xi(t)))dt + A(\xi(t), u(t,\xi(t)))dw(t), \quad \xi(s) = x, \tag{1.10}$$

$$d\eta(t)=c(\xi(t),u(t,\xi(t)))\eta(t)dt+C(\xi(t),u(t,\xi(t)))(\eta(t),dw(t)),\quad \eta(s)=h, \tag{1.11}$$

$$\langle h,u(s,x)\rangle=\mathbf{E}_{s,x,h}\Big[\langle\eta(T),u_0(\xi(T))\rangle+\int\limits_s^T\langle\eta(\theta),g(\xi(\theta),u(\theta,\xi(\theta)))\rangle d\theta\Big]. \tag{1.12}$$

Если предположить, что система (1.9) имеет классическое решение $u(s,x)$, и рассмотреть случайный процесс $\beta(t)=\langle\eta(t),u(t,\xi(t))\rangle$, где $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют (1.10) и (1.11), то нетрудно проверить с помощью формулы Ито, что функция $u(s,x)$ допускает представление вида (1.12).

С другой стороны, как и в линейном случае, можно независимо построить функцию $u(s,x)$ как компоненту решения системы (1.9)–(1.11) и, если $u(s,x)$ окажется достаточно гладкой функцией, то, применяя формулу Ито, можно проверить, что эта функция будет единственным классическим решением задачи Коши (1.9).

Аналогично можно поступить и при построении решения семилинейной задачи Коши вида

$$\frac{\partial u^p}{\partial s}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}[A^p]^*(x,u)\nabla^2u^pA^p(x,u,\nabla u^p)+\langle a^p(x,u),\nabla u^p\rangle \tag{1.13}$$

$$+\sum_{q=1}^{d_2}\lambda^{pq}(x,u)u^q+g^p(x,u)=0,\quad u^p(T,x)=u_0^p(x),\quad p=1,\dots,d_2.$$

А именно, решение задачи (1.13) можно свести к решению следующей системы стохастических уравнений

$$d\xi(t)=a(\xi(t),\kappa(t),u(t,\xi(t),\kappa(t)))dt+A(\xi(t),\kappa(t),u(t,\xi(t),\kappa(t)))dw(t), \tag{1.14}$$

$$\xi(s)=x,$$

$$u^p(s,x)=\mathbf{E}_{s,x,p}\Big[u_0(\xi(T),\kappa(T))\rangle+\int\limits_s^T g(\xi(\theta),\kappa(\theta),u(\theta,\xi(\theta),\kappa(\theta)))d\theta\Big]. \tag{1.15}$$

Заметим, что в том случае, когда соответствующее диффференциальное продолжение такой системы оказывается семилинейной системой одного из описанных выше типов, вероятностный подход к решению задачи Коши (1.9) удается распространить и на класс полностью нелинейных параболических уравнений.

В частности, в работах [4–6] на этом пути были построены вероятностные решения полностью нелинейных параболических уравнений вида

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_l}{\partial s}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}F(x,u,\nabla u)\nabla^2u_l+\langle a(x,u,\nabla u),\nabla u_l\rangle\\&+B^i_{lm}(x,u,\nabla u)\nabla_iu_m+c_{lm}(x,u,\nabla u)u_m+g(x,u,A^*\nabla u,\nabla^2u_l)=0,\\&\qquad u_l(T,x)=u_{0l}(x),\end{aligned}\tag{1.16}$$

где g – ограниченная скалярная функция, $*$ обозначает транспонирование, $F_{ij}=A_{ik}A_{kj}$, $\mathrm{Tr}F\nabla^2u_l=\mathrm{Tr}A^*\nabla^2u_lA=A^k_i\nabla_i\nabla_ju_lA^k_j$ и $\langle h,u\rangle=h_mu_m$ обозначает скалярное произведение в соответствующем пространстве, $l,m=1,\dots,d_1$, $i,k,j=1,\dots,d$.

Анализируя вероятностное представление (1.12) решения задачи Коши (1.3), можно заметить, что система (1.3) допускает сведение к соответствующему скалярному параболическому уравнению. Другими словами, задача Коши (1.3) эквивалентна задаче Коши для скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s}+\frac{1}{2}\operatorname{Tr}M^*(z,\Phi)\nabla^2\Phi M(z,\Phi)+\langle m(z,\Phi),\nabla\Phi\rangle+G(z,\Phi,\nabla\Phi)=0,\tag{1.17}$$

относительно вещественной функции $\Phi(t,z)$, $z=(x,h)\in X\times Y$ вида $\Phi(t,z)=\langle h,u(t,x)\rangle$, удовлетворяющей условию $\Phi(T,x)=\Phi_0(x)=\langle h,u_0(x)\rangle$. Здесь коэффициенты M и m однозначно определяются коэффициентами a,A,C,c

$$M^*M=\begin{pmatrix}A^*A&AC\\CA&0\end{pmatrix},\quad m=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}.\tag{1.18}$$

Аналогичным образом систему (1.4) можно интерпретировать как скалярное уравнение относительно функции $u_l(s,x)=u(s,x,l)$, т.е. рассматривая u как функцию, определенную на $[0,T]\times R^d\times V$, где

$V = \{1, \dots, d_2\}$ и записывая (1.4) в виде

$$\begin{aligned}\frac{\partial u(s,x,p)}{\partial s} &+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}F(x,p,u(s,x,p),\nabla u(s,x,p))\nabla^2 u(s,x,p)\\ &+ \langle a(x,p,u(s,x,p),\nabla u(s,x,p)),\nabla u(s,x,p)\rangle\\ &+ g(x,p,u(s,x,p),\nabla u(s,x,p)) = 0.\end{aligned}$$

Поскольку нелинейные параболические системы во многих интересных случаях не имеют классических решений, большой интерес представляет возможность построения вероятностного представления других классов решений и, в частности, вязкостных решений.

Вязкостные решения задачи Коши для систем вида

$$\begin{aligned}&\frac{\partial u_l}{\partial s} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,A^*(x)\nabla^2 u_l A(x) + \langle a(x),\nabla u_l\rangle \\ &\quad + g_l(x,u,A^*\nabla u_l) = 0, \quad u_l(T,x) = u_{0l}(x), \quad l = 1,\dots,d_1\end{aligned} \tag{1.19}$$

с помощью обратных стохастических дифференциальных уравнений были впервые построены в работах [7–9], а для систем вида (1.4) в работе [8]. Позднее в работе [11] был развит подход к решению задачи Коши для полностью нелинейного скалярного параболического уравнения с помощью теории ПОСДУ.

В наших предыдущих работах [12, 13] были построены вязкостные решения для систем вида (1.19) в случае, когда g_l зависит от ∇u а не от ∇u_l, а также для полностью нелинейных параболических уравнений вида (1.1) относительно функций $u(t,x) \in Y, t \in [0,T], x \in X$ в предположении, что пространства X и Y совпадают или изоморфны. Отметим, что условие изоморфности X и Y является чисто техническим. Оно было связано с техникой доказательства существования и единственности решения системы ПОСДУ, ассоциированной с дифференциальным продолжением системы (1.1), в основе которой лежал метод гомотопического продолжения.

Целью настоящей работы является развитие вероятностного подхода к построению вязкостного решения задачи Коши для системы квазилинейных параболических уравнений (1.1). Возможность построения вязкостного решения для системы квазилинейных параболических уравнений с помощью ОСДУ существенно основана на теоремах сравнения для решений ОСДУ. В случае, когда рассматривается скалярное ОСДУ т.е. при $d_1 = 1$, теоремы сравнения были доказаны в работах [8, 9] и других. Для многомерного ОСДУ также получен ряд

результатов [14,15], однако в этой работе будет развит новый подход к получению соответствующих результатов.

Далее структура статьи имеет следующий вид. В параграфе 2 рассматриваются различные типы систем квазилинейных параболических уравнений, а также системы прямых и обратных СДУ (ПОСДУ), ассоциированные с ними. В параграфе 3 формулируются условия, при которых удается доказать справедливость теоремы сравнения для рассматриваемых ПОСДУ. Наконец, в п. 4 вводится понятие вязкостного решения задачи Коши для системы нелинейных параболических уравнений и устанавливается связь между решением ПОСДУ и вязкостным решением задачи Коши (1.9) в классе непрерывных функций.

§2. СДУ, ПОСДУ и задача Коши для систем семилинейных параболических уравнений

Пусть задана вещественная функция $g(x,u,p)$, $x \in R^d$, $u \in R^{d_1}$, $p \in R^{d\times d_1}$ и оператор $\mathcal{B}$ вида

$$[\mathcal{B}(x)u]^l(x) = \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^*\nabla^2 u_l A + \langle a, \nabla u_l\rangle + B^k_{lm}\nabla_k u_m + c_{lm}u_m, \qquad (2.1)$$

коэффициенты a, A, B, c которого зависят от аргументов x, u.

Рассмотрим задачу Коши для системы

$$\frac{\partial u_l}{\partial s} + [\mathcal{B}(x)u]_l + g_l(x,u,\nabla u) = 0, \qquad (2.2)$$

$$u_l(T,x) = u_{0l}(x) \in R^{d_1}, x \in R^d, s \in [0,T].$$

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ – вероятностное пространство и $w(t)$ – стандартный винеровский процесс со значениями в X.

Введем обозначения $f^u(x) = f(x,u,\nabla u)$ для функций $f = a, A, c, C$.

В семилинейном случае, т.е когда коэффициенты a, A, c, C имеют вид $f^u(t,x) = f(t,x,u(t,x))$, с системой (2.2) можно связать систему прямых стохастических уравнений вида

$$d\xi(t) = a^u(\xi(t))dt + A^u(\xi(t))\,dw(t), \quad \xi(s) = x \in X, \qquad (2.3)$$

$$d\eta(t) = c^u(\xi(t))\eta(t)dt + C^u(\xi(t))(\eta(t), dw(t)), \quad \eta(s) = h \in Y, \qquad (2.4)$$

$$\langle h, u(s,x))\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle + \int_s^T \langle \eta(\theta), g(\xi(\theta), u(\theta, \xi(\theta)))\rangle\, d\theta]. \qquad (2.5)$$

Для того, чтобы проверить утверждение, состоящее в том, что существуют такие случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$, что классическое решение задачи (2.2) допускает вероятностное представление, рассмотрим функцию $\Phi(s,x,h) = \langle h, u(s,x)\rangle$ и вычислим стохастический дифференциал процесса: $\beta(t) = \langle \eta(t), u(t,\xi(t))\rangle$

$$\begin{aligned} d\beta(t) &= \langle d\eta(t), u(t,\xi(t))\rangle + \langle \eta(t), du(t,\xi(t))\rangle + \langle d\eta(t), du(t,\xi(t))\rangle \\ &+ c^u(\xi(t))\eta(t), u(t,\xi(t))\rangle + \langle \eta(t), \big[\frac{\partial u}{\partial t} + L^u u\big](t,\xi(t))\rangle \\ &+ \langle C^u(\xi(t))\eta(t), [\nabla u A^u](t,\xi(t))\rangle dt + [\langle C^u(\xi(t)\eta(t), u(t,\xi(t))\rangle \\ &+ \langle \eta(t), [\nabla u A^u](t,\xi(t))\rangle, \end{aligned} \tag{2.6}$$

где

$$L^u u = \frac{1}{2}\mathrm{Tr} A^*(x,u)\nabla^2 u_l A(x,u) + \langle a(x,u), \nabla u_l\rangle.$$

Отсюда с учетом (2.2) получаем

$$\begin{aligned} d\beta(t) = -\big\langle \eta(t), g^u(t,\xi(t))\rangle dt + \langle \eta(t), [[C^u(\xi(t))]^* u(t,\xi(t)) \\ +[\nabla u A^u](t,\xi(t))]\big\rangle. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Интегрируя $d\beta(t)$ по t в пределах от s до T и вычисляя математическое ожидание от обеих частей полученного равенства, придем к соотношению (2.5).

Аналогичные, хотя и более громоздкие рассуждения позволяют получить соответствующие соотношения и в том случае, когда коэффициенты a, A, c, C и функция g зависят от x, u и ∇u.

Важную роль при построении вероятностных представлений для неклассических решений задачи Коши, и, в частности для построения вязкостных решений, играет следующее наблюдение, которое уже упоминалось в п.1, и состоит в том, что задача Коши (1.3) эквивалентна задаче Коши для скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial \Phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\, M^*(z,\Phi)\nabla^2\Phi M(z,\Phi) + \langle m(z,\Phi), \nabla\Phi\rangle + G(z,\Phi,\nabla\Phi) = 0, \tag{2.8}$$

относительно вещественной функции $\Phi(t,z)$, $z = (x,h) \in X \times Y$, вида $\Phi(t,z) = \langle h, u(t,x)\rangle$, удовлетворяющей условию $\Phi(T,x) = \Phi_0(x) = \langle h, u_0(x)\rangle$. Здесь коэффициенты M и m однозначно определяются коэффициентами a, A, C, c

$$M^*M = \begin{pmatrix} A^*A & AC \\ CA & 0 \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

При этом система (2.3)–(2.5) эквивалентна следующей системе стохастических уравнений

$$d\zeta(t) = m(\zeta(t))dt + M(\zeta(t))\,dW(t), \quad \zeta(s)=\zeta=(x,h)\in R^d\times R^{d_1}, \quad (2.10)$$

$$\Phi(s,\zeta) = \mathbf{E}\left[\Phi_0(\zeta(T)) + \int\limits_s^T G(\zeta(\theta),\Phi(\theta,\zeta(\theta)))\,d\theta\right], \quad (2.11)$$

где $\Phi_0(\zeta) = \langle h, u_0(x)\rangle$.

Условия существования и единственности решения системы (2.3)–(2.5) хорошо изучены, так же как и условия, при которых функция $u(s,x)$ вида (2.5) дважды дифференцируема по x (см. [4]).

Более того, полученные результаты допускают распространение и на тот случай, когда все коэффициенты a, A, c, C и g имеют вид $f^u(x) = f(x,u,\nabla u)$, и даже на случай системы полностью нелинейных параболических уравнений.

В дальнейшем мы часто будем считать, что функция g зависит от комплекса $C^*u + A^*\nabla u$, а не от ∇u, что не является ограничением, если матрица A невырождена.

Заметим, что соотношение (2.7) допускает альтернативную интерпретацию. Обозначим $\Gamma(t,s) \equiv \Gamma(t)$ эволюционное семейство случайных отображений, действующих в пространстве R^{d_1} по формуле $\Gamma(t,s)h = \eta(t)$, где $\eta(t)$ – решение уравнения (2.4). Перепишем уравнение (2.7) в виде

$$\begin{aligned} d\langle h, \Gamma^*(t)u(t,\xi(t))\rangle &= -\langle h, \Gamma^*(t)g^u(t,\xi(t))\rangle dt \\ &+ \langle h, \Gamma^*(t)[[C^u(\xi(t))]^*u(t,\xi(t)) + [\nabla u A^u](t,\xi(t))]dw(t)\rangle. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Обозначим

$$\begin{aligned} y(t) &= \Gamma^*(t)u(t,\xi(t)), \\ z(t) &= \begin{pmatrix} \Gamma^*(t)[C^u(\xi(t))]^*u(t,\xi(t)) \\ \Gamma^*(t)\nabla u A^u(t,\xi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда соотношение (2.12) приобретет вид

$$dy(t) = -\Gamma^*(t)g^u(t,\xi(t))\rangle dt + z(t)dW(t), \quad (2.13)$$

где $W(t) = (w(t), w(t))^*$. Поскольку $y(t) = \Gamma^*(t,s)u(t,\xi(t))$, то

$$y(s) = y(T) \tag{2.14}$$
$$+ \int_s^T \Gamma^*(t) g(t, \xi(t), u(t,\xi(t)), [C^* u + A^* \nabla u](t, \xi(t)))dt - \int_s^T z(t) dW(t),$$

где $y(T) = \Gamma^*(T,T)u(T,\xi(T)) = u_0(\xi(T))$. Наконец, воспользовавшись соотношениями

$$u(t,\xi(t)) = [\Gamma^*]^{-1}(t)y(t), \quad \begin{pmatrix} C^* u \\ A^* \nabla u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [\Gamma^*]^{-1}(t) z_1(t) \\ [\Gamma^*]^{-1}(t) z_2(t) \end{pmatrix},$$

получим

$$y(s) = y(T) + \int_s^T F(t, \xi(t), y(t), z(t))dt - \int_s^T z(t) dW(t), \tag{2.15}$$

где

$$\tilde{g}(\omega, t, x, y, z) = g(\xi(t), [\Gamma^*]^{-1}(t)y(t), [\Gamma^*]^{-1}(t)z(t)),$$
$$F(t,x,y,z) = \Gamma^*(t)\tilde{g}(t,x,y,z).$$

Таким образом, мы получили соотношение (2.15), которое, вместе с уравнением для процесса $\xi(t)$, можно рассматривать как ПОСДУ.

Пусть, для простоты, $\xi(t)$ удовлетворяет СДУ

$$d\xi(t) = a(t,\xi(t))dt + A(t,\xi(t))dw(t), \quad \xi(s) = x. \tag{2.16}$$

Условия существования и единственности решений ПОСДУ (2.15), (2.16) также хорошо изучены и имеют следующий вид.

Будем говорить, что выполнено условие **C 2.1**, если функции $a(t,x), A(t,x)$ – липшицевы функции с сублинейным ростом, $c(t,x), C(t,x)h$ – ограниченные линейные операторы в R^{d_1}, а функция $F : \Omega \times [0,T] \times R^d \times R^{d_1} \times R^{d \times d_1} \to R^{d_1}$ обладает следующими свойствами:

1) $F(\cdot, t, y, z)$ прогрессивно измерима $\forall t$ и для всех (y,z) со значениями в $R^{d_1} \times R^{d \times d_1}$;

2) $\mathbf{E}\|\bar{F}(t)\| < \infty$, где $\bar{F}(t) = F(t,0,0,0)$;

3) существует константа μ и положительные константы K, L такие, что $\|F(t,x,y,z)\| \leqslant \bar{F}(t) + K[\|y\| + |z|] \quad \forall t \in [0,T], y \in R^{d_1}, z \in R^{d \times d_1}$, п.н.;

4) $\|F(t,y,z) - F(t,y,z_1)\| \leqslant L|z - z_1|$, $\forall t \in [0,T], y \in R^{d_1}, z, z_1 \in R^{d \times d_1}$, п.н.;

5) $\langle y - y_1, F(t,x,y,z) - F(t,x,y_1,z)\rangle \leqslant \mu\|y - y_1\|^2$, $\forall t \in [0,T], y, y_1 \in R^{d_1}, z \in R^{d\times d_1}$, п.н.;

6) отображение $y \to F(t,x,y,z)$ непрерывно для любых t и z п.н.

Эти условия гарантируют существование и единственность решения ПОСДУ (2.15), (2.16). Обозначим

• $\mathcal{S}_T^2(R^{d_1})$ – множество семимартингалов $y \in R^{d_1}$, удовлетворяющих оценке $\mathbf{E}\left[\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|y(t)\|^2\right] < \infty$;

• $\mathcal{H}_T^2(R^{d\times d_1})$ – множество таких прогрессивно измеримых квадратично-интегрируемых случайных процессов $z(t) \in R^d$, что

$$\mathbf{E}\left[\int_0^T \|z(\tau)\|^2 d\tau\right] < \infty.$$

По определению решение ПОСДУ (2.15), (2.16) – это тройка $\mathcal{F}_t$-прогрессивно измеримых случайных процессов $(\xi(t), y(t), z(t))$ со значениями в $R^d \times R^{d_1} \times R^{d\times d_1}$, таких что

$$\mathbf{E}\int_0^T \|z(t)\|^2 dt < \infty, \qquad \sup_{0\leqslant t\leqslant T} \mathbf{E}\|y(t)\|^2 < \infty, \tag{2.17}$$

и с вероятностью 1 выполняются соотношения

$$\begin{aligned} \xi(t) &= x + \int_s^t a(\theta,\xi(\theta)d\theta + \int_s^t A(\theta,\xi(\theta)dw(\theta), \\ y(t) &= \eta + \int_t^T F(s,\xi(s),y(s),z(s))ds - \int_t^T z(s)dw(s), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{2.18}$$

Обозначим $\mathcal{B}^3 = \mathcal{H}^2([0,T];R^d) \times \mathcal{H}^2([0,T];R^{d_1}) \times \mathcal{H}^2([0,T];R^{d\times d_1}$.

При этом справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть выполняется условие* **C 2.1**. *Тогда существует единственное решение* $(\xi, y, z) \in \mathcal{B}^3$ *системы* (2.15), (2.16).

Аналогичные результаты удается получить и при рассмотрении задачи Коши для системы параболических уравнений вида

$$\begin{aligned} &\frac{\partial u^q}{\partial s} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^{q*}(s,x,u)\nabla^2 u^q A^q(s,x,u) + \langle a^q(s,x,u), \nabla u^q\rangle \\ &+ \lambda^{qm}(s,x)u^m + g^q(s,x,u) = 0, \quad u^q(T,x) = u_0^q(x), \quad q = 1,\dots,d_2. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Заметим, что в (2.19) суммирование по q не подразумевается.

Слагаемое $\sum\limits_{m=1}^{d_2} \lambda_{qm}(s,x)u(s,x,m)$ можно представить в виде

$$\sum_{m=1}^{d_2} \lambda_{qm}(s,x)u(s,x,m) = \sum_{m=1}^{d_2} \lambda_{qm}(s,x)[u(s,x,m) - u(s,x,q)] + \lambda_{qq}u(s,x,q),$$

что позволит представить систему (2.19) в виде

$$\frac{\partial u(s,x,q)}{\partial s} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^*(s,x,q)\nabla^2 u(s,x,q)A(s,x,q) + \langle a(s,x,q), \nabla u(s,x,q)\rangle + \sum_{m=1}^{d_2} \lambda_{lm}(s,x)[u(s,x,m) - u(s,x,q)] + \tilde{g}(s,x,q,u) = 0, \tag{2.20}$$

где $\tilde{g}(s,x,q,u) = \lambda_{qq}u(s,x,q) + g(s,x,q,u)$. Пусть $\kappa(t)$ – марковский процесс, удовлетворяющий (1.7), генератор которого имеет вид (1.8). Мы будем предполагать, что случайные процессы $\kappa(t)$ и $w(t)$ независимы.

Для того, чтобы построить вероятностное представление решения задачи Коши (2.19), рассмотрим стохастическое уравнение

$$d\xi(t) = a(\xi(t),\kappa(t))dt + A(\xi(t),\kappa(t))dw(t), \quad \xi(s) = x, \kappa(s) = q. \tag{2.21}$$

и предположим, что существует функция $u^q(s,x) \equiv u(s,x,q)$, представляющая собой классическое решение задачи (2.19).

Рассмотрим случайный процесс

$$\beta(t) = u(t,\xi(t),\kappa(t))$$

и, воспользовавшись формулой Ито, вычислим его стохастический дифференциал

$$\mathbf{E}[d\beta(t)] = \mathbf{E}\Bigg[\frac{\partial u(t,\xi(t),\kappa(t))}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^*(t,\xi(t),\kappa(t)x)\nabla^2 u(t,\xi(t),\kappa(t)) \times A(t,\xi(t),\kappa(t)) + \langle a(t,\xi(t),\kappa(t)), \nabla u(t,\xi(t),\kappa(t))\rangle + \sum_{\kappa(t)=1}^{d_1} \lambda_{\kappa(t),\kappa'(t)} u(t,\xi(t),\kappa'(t))\Bigg]. \tag{2.22}$$

Принимая во внимание, что функция $u_l(s,x)$ удовлетворяет (2.19), получим

$$\mathbf{E}[d\beta(t)] = \mathbf{E}[\tilde{g}(t,\xi(t),\nu(t))dt], \text{ где } \tilde{g}_\nu = g_\nu + \lambda_{\nu\nu}u_\nu.$$

Интегрируя полученное соотношение по t в пределах от s до T, придем к соотношению

$$\mathbf{E}[\beta(T)-\beta(s)] = \mathbf{E}\left[\int\limits_s^T \tilde{g}(t,\xi(t),\kappa(t))dt\right],$$

откуда вытекает, что

$$u^q(s,x) = u(s,x,q) = \mathbf{E}\left[u_0(\xi(T),\kappa(T)) - \int\limits_s^T \widetilde{g}(t,\xi(t),\kappa(t))dt\right].$$

Важной особенностью систем (2.2) и (2.19), которая становится очевидной при анализе вероятностного представления классического решения задачи Коши, является возможность интерпретации этих систем как скалярных уравнений относительно вспомогательных функций, однозначно определяемых решениями этих систем, но, возможно, заданных на других фазовых пространствах.

При анализе вероятностного представления решения задачи Коши (2.2) вида

$$\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle],$$

было отмечено, что система (1.3) допускает сведение к соответствующему скалярному параболическому уравнению

$$\frac{\partial\Phi}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} Q^*(x,h,\Phi)\nabla^2\Phi Q(x,h,\Phi) + \langle q(x,h,\Phi),\nabla\Phi\rangle + G(x,h,\Phi) = 0, \tag{2.23}$$

относительно вещественной функции $\Phi(s,x,h)$ вида

$$\Phi(s,x,h) = \langle h, u(s,x)\rangle,$$

удовлетворяющей условию $\Phi(T,x) = \Phi_0(x) = \langle h, u_0(x)\rangle$.

С другой стороны, систему вида (1.4) также можно интерпретировать как скалярное уравнение относительно функции $u^q(s,x) \equiv u(s,x,q)$, которую при этом следует рассматривать как функцию, определенную на $[0,T]\times R^d \times V$, где $V = \{1,\dots,d_2\}$. Соответственно

систему (1.4) можно записать в виде

$$\frac{\partial u(s,x,q)}{\partial s}+\frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^*(s,x,q)\nabla^2 u(s,x,q)A(s,x,q)+\langle a(s,x,q),\nabla u(s,x,q)\rangle$$
$$+\sum_{m=1}^{d_2}\lambda_{qp}(s,x)u(s,x,p)+g(s,x,q,u(s,x,q),\nabla u(s,x,q)))=0,\ q=1,\dots,d_2.$$

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одну возможность обобщения класса рассматриваемых параболических уравнений, так чтобы классическое решение задачи Коши для системы из этого класса допускало вероятностное представление.

Анализ соотношений, полученных выше, приводит к рассмотрению следующей системы параболических уравнений относительно векторной функции

$$u(s,x,q)=(u_1(s,x,q),\dots,u_{d_l}(s,x,q)),$$

заданной на пространстве $[0,T]\times R^d\times V$, компоненты которой для краткости будем обозначать $u_l^q(s,x)$. Рассмотрим систему параболических уравнений вида

$$\frac{\partial u_l^q}{\partial s}+\frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,A^{q*}(s,x)\nabla^2 u_l^q A^q(s,x)+\langle a^q(s,x),\nabla u_l^q\rangle \tag{2.24}$$
$$+\sum_{m=1}^{d_1}\sum_{i,j=1}^{d}C_{lm}^{jq}(s,x)A_{ji}^q(s,x,\nu)\nabla_i u_m^q+\sum_{m=1}^{d_1}c_{lm}^q(s,x)u_m q$$
$$+\sum_{q'=1}^{d_2}\lambda^{qq'}u_l^{q'}+g_l(x,q,u(s,x,q),\nabla u(s,x,q))=0.$$

Для построения вероятностного представления решения задачи Коши для системы (2.24) с данными Коши

$$u_l^q(T,x)=u_{0l}^q(x) \tag{2.25}$$

рассмотрим тройку случайных процессов $(\xi(t),\eta(t),\kappa(t))$, где $\kappa(t)$ – марковская цепь с генератором Λ, а процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ подчиняются стохастическим уравнениям

$$d\xi(t)=a(t,\xi(t),\nu(t))dt+A(t,\xi(t),\nu(t))dw(t),\quad \xi(s)=x\in R^d, \tag{2.26}$$

$$d\eta=c(t,\xi(t))\eta(t)dt+C(t,\xi(t))(\eta(t),dw(t)),\quad \eta(s)=h\in R^{d_1}. \tag{2.27}$$

Как и выше предположим, что существует классическое решение задачи Коши (2.24) и рассмотрим функцию $\alpha(t) = \langle \eta(t), u(t, \xi(t), \nu(t))\rangle$, Используя формулу Ито, получим, что

$$\begin{aligned}
&d\alpha(t) = \langle d\eta(t), u(t, \xi(t), \kappa(t))\rangle + \langle \eta(t), du(t, \xi(t), \kappa(t))\rangle \\
&+ \langle d\eta(t),\ du(t, \xi(t), \kappa(t))\rangle \\
&= \Big[\langle \eta(t), [c^* u](t, \xi(t), \kappa(t))\rangle \\
&+ \langle \eta(t), \Big[\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2}\operatorname{Tr} A^* \nabla^2 u A + \langle a, \nabla u\rangle\Big](t, \xi(t), \kappa(t))\rangle\Big]\, dt \\
&+ \Big[\langle \eta(t), \int\limits_V [u(t, \xi(t), \kappa(t) + z) - u(t, \xi(t), \kappa(t))]\nu(dt, dz)\rangle\Big]\, dt \\
&+ \langle \eta(t), [C^* \nabla u A](t, \xi(t), \kappa(t))\rangle\, dt \\
&+ \langle \eta(t), [(C^* u)t, \xi(t), \kappa(t)) + (\nabla u A)(t, \xi(t), \kappa(t))] dw(t)\rangle.
\end{aligned} \tag{2.28}$$

Интегрируя по переменной t в пределах от s до T и вычисляя математическое ожидание обеих частей полученного соотношения, с учетом того, что $u^q(s, x)$ удовлетворяет (2.24), придем к равенству следующего вида

$$\begin{aligned}
&\langle h, u(s, x, q)\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi s, x(T), \kappa_{s,q}(T))\rangle \\
&+ \int\limits_t^T \langle \eta(\theta), g(\theta, \xi(\theta), \kappa(\theta), u(\theta, \xi(\theta), \kappa(\theta)), \nabla u(\theta, \xi(\theta), \kappa(\theta)))\rangle d\theta].
\end{aligned}$$

С другой стороны, интегрируя (2.28) и принимая во внимание, что рассматриваемая функция u удовлетворяет (2.24), можно показать, что $y(t) = u(t, \xi(t), \kappa(t))$ удовлетворяет уравнению

$$y(t) = u_0(\xi(T), \kappa(T)) + \int\limits_t^T \widetilde{g}(\theta, \xi(\theta), \kappa(\theta), y(\theta), z(\theta)) d\theta - \int\limits_t^T z(\theta) dW(\theta),$$

где

$$\begin{aligned}
y(t) &= \Gamma^*(t) u(t, \xi(t)), \\
z(t) &= \begin{pmatrix} \Gamma^*(t)[C^u(\xi(t))]^* u(t, \xi(t)) \\ \Gamma^*(t) \nabla u A^u(t, \xi(t)) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \end{pmatrix} \\
\widetilde{g}(t, x, y, z) &= \Gamma^*(t) g(t, x, [\Gamma^*]^{-1}(t) y, [\Gamma^*]^{-1}(t) z).
\end{aligned}$$

§3. Теоремы сравнения для векторных ОСДУ

Важную роль в установлении связи между решениями ПОСДУ и вязкостными решениями уравнений в частных производных играют теоремы сравнения для решений ПОСДУ. Для скалярных ОСДУ теоремы сравнения появились уже в работе Пенга [7].

В этом параграфе мы ограничимся рассмотрением системы вида (1.3) и ПОСДУ, ассоциированным с ней. Рассмотрим вначале многомерное ОСДУ

$$y^i(t) = \zeta^i + \int_t^T f^i(\theta, y^i(\theta), z^i(\theta))d\theta - \int_t^T z^i(\theta)dW(\theta), \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \quad (3.1)$$

Для любого ненулевого вектора $h \in R^{d_1}$ и векторов $y^1, y^2 \in R^{d_1}$ будем говорить, что $y^1 \leqslant_h y^2$ относительно h, если $\langle h, y^1\rangle \leqslant \langle h, y^2\rangle$. Без потери общности выберем вектор h единичной нормы, $\|h\| = 1$.

Для двух заданных векторов $y^1, y^2 \in R^{d_1}$ будем говорить, что $y^1 \leqslant y^2$ $y^1_m \leqslant y^2_m$,$m = 1, \ldots, d_1$, где $y_m = \langle y, e_m\rangle$ и $(e_m)_{m=1}^{d_1}$ – ортонормальный базис в R^{d_1}.

Пусть $f \in R^{d_1}$, обозначим $f^+_m = \max[f_m, 0]$, $m = 1, \ldots, d_1$.

Рассмотрим пару ПОСДУ с параметрами ζ^i, f^i, $i = 1, 2$.

Будем говорить. что выполнено условие **C 3.1**, если:

i) $\zeta^1 \leqslant \zeta^2$, п.н.

ii) $f^1_m(t, y^1, z^1) \leqslant f^2_m(t, y^2, z^2)$, где $y^1_m = y^2_m$, $z^1_m = z^2_m, y^1_l \leqslant y^2_l, l \neq m, \quad l, m = 1, \ldots, d_1$,

iii) Для всех $y^1, y^2 \in R^{d_1}, z^1, z^2 \in R^{d\times d_1}$,

$$\|f^i_m(t, y^1, z^1) - f^i_m(t, y^2, z^2)\| \leqslant L[\|y^1 - y^2\| + \|z^1 - z^2\|], \quad i = 1, 2.$$

Обозначим $\bar{\alpha} = \alpha^1 - \alpha^2$, если $\alpha = y, \zeta, f$ или z.

Подчеркнем, что в этом параграфе соглашение о суммировании по повторяющимся индексам применяться не будет.

Теорема 3.1. *Пусть* (ζ^i, f^i),$i = 1, 2$, *– параметры ПОСДУ* (3.1), *удовлетворяющие условиям* **C 2.1** *и* **C 3.1**. *Пусть случайные процессы* $(y^i(t), z^i(t))$, $i = 1, 2, \quad t \in [s, T]$, *удовлетворяют уравнению* (3.1) *с соответствующими параметрами. Тогда* $y^1(t) \leqslant y^2(t)$ *п.н.*

Доказательство. Воспользовавшись формулой Ито, выведем выражение для процесса $|\bar{y}_j(t)^+|^2$ и вычислим его математическое ожидание. В результате получим

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}|\bar{y}_j(t)^+|^2 = \mathbf{E}|\bar{\zeta}_j^+|^2 \qquad (3.2)\\
&- \mathbf{E}\left[\int_t^T 2I_{y_j^1(s)>y_j^2(s)}\bar{y}_j(s)[f_j(s,y^1(s),z^1(s)) - f_j(s,y^2(s),z^2(s))]ds\right]\\
&- \mathbf{E}\left[\int_t^T I_{\{y_j(s)>y_j^2(s)\}}\|\bar{z}_j(s)\|^2 ds\right] - \mathbf{E}\left[\int_t^T \bar{y}_j^+ dL_j(s)\right],
\end{aligned}$$

где $L_j(t)$ – локальное время, проведенное процессом $\bar{y}_j(s)$ в 0. Заметим, что последнее слагаемое равно нулю. Поскольку $\zeta_1 \geqslant \zeta_2$ п.н., то $\mathbf{E}[\|[\zeta_1-\zeta_2]^+\|^2] = 0$ и

$$\mathbf{E}\left[\int_t^T I_{y_j^1(s)>y_j^2(s)}\bar{y}_j(s)\bar{z}_j(s)dw(s)\right] = 0.$$

Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned}
&\mathbf{E}[\bar{y}_j(t)^+]\\
&= \mathbf{E}\left[\int_t^T I_{y_j^1(s)>y_j^2(s)}2\bar{y}_j^+(s)[f_j^1(s,y^1(s),z^1(s)) - f_j^2(s,y^2(s),z^2(s))]ds\right]\\
&- \mathbf{E}\left[\int_t^T I_{\{y_j(s)>y_j^2(s)\}}\|\bar{z}_j(s)\|^2 ds\right].
\end{aligned}$$

Положим

$$
\begin{aligned}
\bar f_j(s) &= f_j^1(s,y^1,z^1) - f_j^2(s,y^2,z^2)\\
&= f_j^1(s,y_1^1,\dots,y_j^1,\dots,y_{d_1}^1,z_1^1,\dots,z_j^1,\dots,z_{d_1}^1)\\
&- f_j^2(s,y_1^2,\dots,y_j^2,\dots,z_1^2,\dots,z_j^2,\dots,z_{d_1}^1)\\
&= [f_j^1(s,y_1^1,\dots,y_j^1,\dots,y_{d_1}^1,z_1^1,\dots,z_j^1,\dots,z_{d_1}^1)\\
&- f_j^2(s,y_1^2+\bar y_1^+,\dots,y_j^1,\dots,y_{d_1}^1+\bar Y_{d_1}^+,z_1^2,\dots,z_j^1,\dots,z_{d_1}^2)]\\
&+ [f_j^2(s,y_1^2+\bar y_1^+,\dots,y_j^1,\dots,y_{d_1}^2+\bar Y_{d_1}^+,z_1^2,\dots,z_j^2,\dots,z_{d_1}^2)\\
&- f_j^2(s,y_1^2,\dots,y_j^2,\dots,z_1^2,\dots,z_j^2,\dots,z_{d_1}^2)] = \Pi_1+\Pi_2
\end{aligned}
$$

Поскольку $y_m^1 \leqslant y_m^2 + \bar y_m^+$ при $m \neq j$, то, с учетом пункта ii) в условии **C 3.1**, получим оценку $\Pi_1 \leqslant 0$.

Из липшицевости функции f^2 следует оценка

$$\Pi_2 \leqslant L[|\bar y_1^+| + |\bar y_2^+| + \dots + |\bar y_j^+| + \dots |\bar y_{d_1}^+| + |\bar z_j|].$$

Применяя формулу Ито и используя свойства генератора f, получим

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}|\bar y_j^+(t)|^2 &\leqslant 2\mathbf{E}\left[\int_t^T I_{y_j^1(s)>y_j^2(s)}\bar y_j^+\bar f_j(s)ds\right]\\
&- \mathbf{E}\left[\int_t^T I_{y_j^1(s)>y_j^2(s)}\sum_{k=1}^d |\bar z_{jk}(s)|^2 ds\right]\\
&\leqslant \mathbf{E}\left[2\int_t^T I_{y_j^1(s)>y_j^2(s)} L\bar y_j^+[\|\bar y_1(s)\| + \|\bar y_2(s)\| + \dots + \|\bar y_{j-1}(s)\|\right.\\
&\left. + \|\bar y_j(s)\| + \|\bar y_{j+1}(s)\| + \dots + \|\bar y_{d+1}(s)\| + \Big(\sum_{k=1}^d |\bar z_{jk}(s)|^2\Big)^{\frac12}]ds\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
-\mathbf{E}\left[\int_t^T I_{\{y_j^1(s)>y_j^2(s)\}}\|\bar z_j(s)\|^2 ds\right] &\leqslant \mathbf{E}\left[\int_t^T [L^2 d_1\|\bar y_j(s)\|^2 + 2L\|\bar y_j(s)|^2]ds\right]\\
+\mathbf{E}\left[\int_t^T I_{\{y_j^1(s)>y_j^2(s)\}}\sum_{k=1}^{d_1}\|\bar y_k(s)\|^2 ds\right] &+ \mathbf{E}\left[\int_t^T I_{\{y_j^1(s)>y_j^2(s)\}}\|\bar z_j(s)\|^2 ds\right]
\end{aligned}
$$

$$-\mathbf{E}\left[\int_t^T I_{\{y_j^1(s)>y_j^2(s)\}}\|\bar{z}_j(s)\|^2 ds\right] = (L^2 d_1 + 2L)\int_t^T \mathbf{E}[I_{\{y_j^1(s)>y_j^2(s)\}}\|\bar{y}_j(s)\|^2]ds$$
$$+\int_t^T \mathbf{E}[I_{\{y_j^1(s)>y_j^2(s)\}}\sum_{k=1}^{d_1}\|\bar{y}_k(s)\|^2]\,ds.$$

Таким образом при фиксированном m, для которого

$$\max_{1\leqslant k\leqslant d_1}\mathbf{E}|\bar{y}_j^+(t)|^2 = \mathbf{E}|\bar{y}_m^+(t)|^2,$$

справедливо неравенство

$$\mathbf{E}|\bar{y}_m^+(t)|^2 \leqslant (L^2 d_1 + 2L + d_1)\int_t^T \mathbf{E}[I_{\{y_m^1(s)>y_m^2(s)\}}\|\bar{y}_m^+(s)\|^2]\,ds.$$

Таким образом, существует константа $K > 0$, для которой выполняется оценка

$$\mathbf{E}|\bar{y}_m(t)^+|^2 \leqslant K\int_t^T \mathbf{E}|\bar{y}_m^+(s)|^2 ds. \tag{3.3}$$

Наконец, из леммы Гронуолла следует, что $\mathbf{E}\|\bar{y}_m(t)^+\|^2 = 0$ для всех $t \in [0,T]$. Следовательно, $|\bar{y}_m^+(t)| = 0$ и $y_j^1(t) \leqslant y_j^2(t)$ п.н. для всех $j = 1,\ldots,d_1$.

В конце этого параграфа вернемся к рассмотрению одномерного ОСДУ (2.18) и докажем соответствующую теорему сравнения. Заметим, что эта теорема мотивирует наш выбор способа сравнения векторных процессов в рассматриваемом случае. □

Рассмотрим стохастическое уравнение

$$\zeta(t) = \kappa + \int_s^t m(\zeta(\theta))d\theta + \int_s^t M(\zeta(\theta))dW(\theta), \quad 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T, \tag{3.4}$$

введенное в предыдущем параграфе и вместо векторного ОСДУ

$$y(t) = u_0(\xi(T)) + \int_t^T f(\theta,\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))d\theta - \int_t^T z(\theta)dW(\theta), \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \tag{3.5}$$

относительно процесса $y(t) \in R^{d_1}$ рассмотрим скалярное ОСДУ

$$\begin{aligned} dY(t) &= -F(t,\zeta(t),Y(t),Z(t))\,dt + \langle Z(t), dW(t)(t)\rangle, \\ Y(T) &= \zeta = \langle h, u_0(\xi(T))\rangle, \end{aligned} \tag{3.6}$$

где $Y(t) = \langle \eta(t), u(t,\xi(t))\rangle$ и $F = \langle h, f\rangle$. Заметим, что

$$|Y| = \sup_{\|h\|=1} |\langle h, u\rangle| = \|u\|,$$

и положим $G(t,Y,Z) = F(t,\zeta,Y,Z)$.

Теорема 3.2. *Пусть* $(Y^i, Z^i), i = 1,2,$ *– решения ОСДУ*

$$dY^i(t) = -G^i(t,Y(t),Z(t))dt + \langle Z^i(t), dW(t)\rangle,\ Y^i(T) = \Upsilon^i = \langle h, u_0^i(\xi(T))\rangle. \tag{3.7}$$

Предположим, что $\Upsilon^1 \leqslant \Upsilon^2$ *и* $G^1(t,\kappa,Y^1,Z^1) \leqslant G^2(t,\kappa,Y^2,Z^2)$ $dt\times dP$*-п.в. Тогда* $Y^1(t) \leqslant Y^2(t)$ *п.н. для всех* $0 \leqslant t \leqslant T$.

Доказательство. Введем в рассмотрение скалярный процесс

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{G^1(t,Y^2(t),Z^1(t)) - G^1(t,Y^1(t),Z^1(t))}{Y^2(t)-Y^1(t)}, & \text{если } Y^1(t) \neq Y^2(t), \\ 0, & \text{если } Y^1(t) = Y^2(t), \end{cases}$$

и векторный процесс $\alpha(t) \in R^{2d}$, заданный соотношениями

$$\alpha_k(t) = \begin{cases} \frac{G^1(t,Y^1(t),Z^{(k)}(t)) - G^1(t,Y^1(t),Z^{(k-1)}(t))}{Z_k^2(t)-Z_k^1(t)}, & \text{если } Z_k^1(t) \neq Z_k^2(t) \\ 0, & \text{если } Z_k^1(t) = Z_k^2(t). \end{cases}$$

Здесь $Z^{(k)}(t)$ обозначает $2d$-мерный векторный процесс, у которого первые k компонент совпадают с соответствующими компонентами процесса Z^2, а оставшиеся $2d-k$ компонент совпадают с соответствующими компонентами процесса Z^1. В силу липшицевости функции g процессы $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ ограничены и, кроме того, они прогрессивно измеримы.

Как и выше, используем обозначения $\bar{f} = f^1 - f^2$ для $f = Y, Z, \Upsilon$ и заметим, что пара процессов $(\bar{Y}(t), \bar{Z}(t))$ удовлетворяет ОСДУ

$$\bar{Y}(t) = \bar{\Upsilon} + \int_t^T [\beta(s)\bar{Y}(s) + \langle \alpha(s), \bar{Z}(s)\rangle + \int_t^T G(s)ds - \int_t^T \langle \bar{Z}, dW(t)\rangle,$$

где $G(t) = G^2(t, Y^2(t), Z^2(t)) - G^1(t, Y^2(t), Z^2(t))$. Пусть $0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T$ и

$$\rho_{s,t} = \exp\left[\int_s^t (\beta(\theta) - \frac{1}{2}\|\alpha(\theta)\|^2)d\theta + \int_s^t \langle \alpha(\theta), dW(\theta)\rangle\right].$$

Применяя формулу Ито, нетрудно проверить, что $(\bar{Y}, \bar{Z})$ удовлетворяют ОСДУ

$$\bar{Y}(t) = \rho_{s,t}\bar{Y}(t) + \int_s^t \rho_{s,\theta}G(\theta)d\theta - \int_s^t \rho_{s,\theta}\langle \bar{Z}(\theta) + \bar{Y}(\theta)\alpha(\theta), dW(\theta)\rangle$$

и

$$\bar{Y}(t) = \mathbf{E}\left[\rho_{s,t}\bar{Y}(t) + \int_s^t \rho_{s,\theta}G(\theta)d\theta \Big| \mathcal{F}_s\right].$$

Нужное утверждение немедленно вытекает из положительности $\bar{\Upsilon}$ и $N(t)$.

Завершим этот параграф еще одним полезным замечанием. Пусть

$$Y^1(t) = \Upsilon^1 + \int_t^T G^1(\theta, Y^1(\theta), Z^1(\theta))d\theta - \int_t^T \langle Z^1(\theta), dW(\theta)\rangle$$

и

$$Y^2(t) = \Upsilon^2 + \int_t^T V(\theta)d\theta - \int_t^T \langle Z^2(\theta), dW(\theta)\rangle.$$

Если при этом $\Upsilon^1 \leqslant \Upsilon^2$ и $G^1(t, Y^2(t), Z^2(t)) \leqslant V(t)$, то можно выбрать

$$G^2(t, Y, Z) = G^1(t, Y, Z) + [V(t) - G(t, Y^2, Z^2)]$$

и, с помощью теоремы 3.2, получить неравенство $Y^1(t) \leqslant Y^2(t)$. Если при этом $G^1(t, Y^2, Z^2) < V(t)$ на множестве положительной меры $dt \times dP$, то $Y^1(s) < Y^2(s)$. $\square$

§4. ПОСДУ и системы уравнений в частных производных

В этом параграфе мы установим связь между решениями системы квазилинейных параболических уравнений вида

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_l}{\partial s} &+ \frac{1}{2}\mathrm{Tr}A^*(s,x)\nabla^2 u_l A(s,x) + \langle a(s,x), \nabla u_l\rangle \\ &+ B^i_{lm}(s,x)\nabla_i u_m + c_{lm}(s,x)u_m + g(x,u,A^*\nabla u) = 0, \\ &u_l(T,x) = u_{0l}(x),\ l = 1,\dots,d_1,\end{aligned} \tag{4.1}$$

и решениями соответствующей системы прямых-обратных дифференциальных стохастических уравнений (2.15), (2.16).

Как уже упоминалось во введении, систему (4.1) можно свести к скалярному уравнению вида

$$\frac{\partial \Psi}{\partial s} + \frac{1}{2}\,\mathrm{Tr}\,M^*\nabla^2\Psi M + \langle m, \nabla\Psi\rangle + G(t,\chi,\Psi,\nabla\Psi) = 0 \tag{4.2}$$

относительно функции $\Psi(s,\zeta) = \langle h, u(s,x)\rangle$, $\zeta = (x,h)$. Это позволяет ввести понятие вязкостного решения системы (4.1), опираясь на сформулированное в работе [16] понятие вязкостного решения для скалярного уравнения (4.2).

Напомним как вводится понятие вязкостного решения для скалярного ($d_1 = 1$) нелинейного параболического уравнения.

Пусть $f : [0,T]\times R^d \to R$ и $S : [0,T]\times R^d\times R\times R^d\times M^d \to R$, где M^d – множество положительных симметричных $d\times d$-матриц. При этом предполагается, что

$$\begin{cases} S(s,x,f,p,q) \leqslant S(s,x,f_1,p,q), & \text{если} \quad f \leqslant f_1 \\ S(s,x,f,p,q) \leqslant S(s,x,f,p,q_1), & \text{если} \quad q_1 \leqslant q, \end{cases} \tag{4.3}$$

где неравенство матриц понимается в смысле неравенства квадратичных форм.

Напомним определение вязкостного решения задачи Коши для нелинейного скалярного параболического уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial s} + S(s,x,f,\nabla f,\nabla^2 f) = 0, \quad f(T,x) = f_0(x). \tag{4.4}$$

Пусть $\mathcal{P}^{2,+}f(s,x)$ и $\mathcal{P}^{2,-}f(s,x)$ обозначают, соответственно, параболический суб- и суперджет второго порядка скалярной функции f в точке (t,x). При этом $\mathcal{P}^{2,+}f(s,x)$ можно определить как набор таких

троек $(r,p,q) \in R \times R^d \times M^d$, что

$$f(\theta,\widetilde{x}) \leqslant f(s,x)+r(\theta-s)+\langle p,\widetilde{x}-x\rangle+\frac{1}{2}\langle q(\widetilde{x}-x),\widetilde{x}-x\rangle+o(|\theta-s|+\|\widetilde{x}-x\|)^2$$

при $(\theta,\widetilde{x}) \to (s,x)$, а $\mathcal{P}^{2,-}f(s,x)$ – как набор таких троек $(r,p,q) \in R \times R^d \times M^d$, что

$$f(\theta,\widetilde{x}) \geqslant f(s,x)+r(\theta-s)+\langle p,\widetilde{x}-x\rangle+\frac{1}{2}\langle q(\widetilde{x}-x),\widetilde{x}-x\rangle+o(|\theta-s|+\|\widetilde{x}-x\|)^2$$

при $(\theta,\widetilde{x}) \to (s,x)$.

Непрерывную функцию $f(t,x)$ называют субрешением уравнения (4.4), если для $(s,x) \in [0,T] \times R^d$ и $(r,p,q) \in \mathcal{P}^{2,+}f(s,x)$ выполняется неравенство

$$r + S(s,x,f,p,q) \leqslant 0. \tag{4.5}$$

Соответственно, непрерывную функцию $f(t,x)$ называют суперрешением (4.4), если для $(s,x) \in [0,T] \times R^d$ и $(r,p,q) \in \mathcal{P}^{2,-}f(s,x)$ выполняется неравенство

$$r + S(s,x,f,p,q) \geqslant 0. \tag{4.6}$$

Функцию $f(s,x)$ называют вязкостным решением (4.4), если она является одновременно суб- и суперрешением этого уравнения, т.е. если справедливы неравенства (4.5), (4.6).

Будем говорить, что функция $u(s,x) \in R^{d_1}$, $(s,x) \in [0,T] \times R^d$, является вязкостным решением системы (4.1), если скалярная функция $\Psi(s,z)$, $z = (x,h) \in R^d \times R^{d_1}$ вида $\Psi(s,z) = \langle h, u(s,x)\rangle$ для любого $h \in R^{d_1}$ является вязкостным решением уравнения (4.2).

Весьма полезным для проверки того, что функция $\Psi(s,\zeta) = Y(s)$, построенная с помощью решения ОСДУ, задает вязкостное решение уравнения (4.2), является следующее утверждение.

Лемма 4.1. *Пусть* $\Psi(s,\zeta) \in R^1$, $(s,\zeta) \in [0,T] \times R^d \times R^{d_1}$, *и* $\Phi \in C_0^{1,2}([0,T] \times R^d \times R^{d_1}, R^1)$, *тогда*

$$\mathcal{P}_G^{2,+}\Psi(s,\zeta) = \{(\Psi_s(s,\zeta), \nabla\Psi(s,\zeta), \nabla^2\Psi(s,\zeta))\}$$

и $\Psi - \Phi$ *имеет локальный максимум в точке* $(s,(x,h)) \in G_T\}$, *и*

$$\mathcal{P}_G^{2,-}\Psi(s,\zeta) = \{\Psi_s(s,x), \nabla\ \Psi(s,\zeta), \nabla^2\Psi(s,\zeta)\}$$

и $\Psi - \Phi$ *имеет локальный минимум в точке* $(s,\zeta) \in G_T\}$.

Как уже упоминалось во введении, если система (4.1) семилинейна, т.е. g зависит только от x и u, то классическое решение $u(t,x)$ задачи Коши (4.1) допускает вероятностное представление вида $\langle h, u(s,x)\rangle = \mathbf{E}\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle$, где случайные процессы $\xi(t)$ и $\eta(t)$ удовлетворяют следующей системе стохастических уравнений

$$d\xi(\theta) = a(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta))dt + A(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))\,dw(\theta), \quad \xi(s) = x \in X, \tag{4.7}$$

$$d\eta(\theta) = c(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta))\eta(\theta))d\theta + C(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))(\eta(\theta), dw(\theta)), \quad \eta(s) = h \in Y, \tag{4.8}$$

$$\langle h, u(s,x))\rangle = \mathbf{E}[\langle \eta(T), u_0(\xi(T))\rangle|\mathcal{F}_s] + \mathbf{E}\left[\int_s^T \langle \eta(\theta), g(\xi(\theta), u(\theta,\xi(\theta)))\rangle\, d\theta|\mathcal{F}_s\right], \tag{4.9}$$

При этом коэффициенты B и C в (4.1) и (4.8) связаны соотношением $B^l_{im} = C^l_{km}A^k_i$.

Наряду с этим, с классическим решением задачи Коши (4.1) как в случае $g = g(x,u)$, так и в случае $g = g(x,u,A^*\nabla u)$, можно связать систему, состоящую из прямого и обратного стохастического уравнения вида

$$d\xi(t) = a(\xi(t))\,dt + A(\xi(t)))\,dw(t), \quad \xi(s) = x \in R^d, \tag{4.10}$$

$$dy(t) = -\widetilde{g}(\xi(t), y(t), z(t))\,dt + z(t)dw(t), \quad y(T) = u_0(\xi_{s,x}(T)), \tag{4.11}$$

где $\widetilde{g}(t,(\xi(t),y(t),z(t))) = \Gamma^*(s,t)g(t,(\xi(t),[\Gamma^*]^{-1}u(t,\xi(t)),z(t)))$ и мультипликативный операторный функционал $\Gamma(T,s)$ порождается процессом, удовлетворяющим СДУ (4.8), по формуле $\eta(T) = \Gamma(T,s)h$.

Установим связь случайных процессов $(\xi(t), y(t), z(t))$, удовлетворяющих ПОСДУ (4.10), (4.11) с вязкостным решением задачи Коши для квазилинейной системы (4.1).

Для того, чтобы показать, что $u(s,x)$ – это вязкостное решение задачи Коши (4.1), рассмотрим скалярную функцию $\Psi(s,\zeta) = \langle h, u(s,x)\rangle$, $\zeta = (x,h) \in R^d \times R^{d_1}$, и случайный процесс

$$\Psi(\theta,\zeta(\theta)) = \langle \eta_{\theta,\eta(\theta)}(T), u(\theta,\xi(\theta))\rangle,$$

где $\zeta(\theta) = (\xi(\theta), \eta(\theta))$.

Пусть $\mathcal{E} = R^d \times R^{d_1}$, $G = R^d \times S_1(R^{d_1})$, где $S_1(R^{d_1}) = \{y \in R^{d_1} : \|y\| = 1\}$. Выберем функцию

$$\Phi(\theta, \zeta(\theta)) = \langle \eta(\theta), \phi(\theta, \xi(\theta)) \rangle$$

из класса $C_0^{1,2}$ и точку $(s, \zeta) \in [0, T] \times G$, так чтобы в точке (s, ζ) достигался локальный максимум функции $\Psi(s, \zeta) - \Phi(s, \zeta)$.

Без потери общности мы выберем в качестве h элементы базиса в R^{d_1} и предположим, что в точке (s, ζ) ыполняется соотношение $\Psi(s, \zeta) = \Phi(s, \zeta)$, или, эквивалентно, что $\phi_l(s, x) = u_l(s, x)$. При этом для любого момента остановки τ справедлива оценка

$$\Psi(\tau, \zeta_{s,\zeta}(\tau)) - \Phi(\tau, \zeta_{s,\zeta}(\tau)) \leqslant 0. \tag{4.12}$$

Из формулы Ито и (4.10), (4.11) вытекает, что

$$\Phi(\tau, \zeta(\tau)) = \Phi(s, \zeta) + \int_s^\tau \Big[\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathcal{A}\Phi\Big](\theta, \zeta(\theta)) d\theta$$
$$+ \int_s^\tau \langle \nabla \Phi(\theta, \zeta(\theta)), M(\zeta(\theta), y(\theta), z(\theta))\, dW(\theta) \rangle,$$

где

$$\mathcal{A}\Phi = \frac{1}{2} \operatorname{Tr} M^* \nabla^2 \Phi M + \langle m, \nabla \Phi \rangle,$$

а коэффициенты M и m заданы соотношением (1.13). С другой стороны, процесс y удовлетворяет ОСДУ

$$y(s) = u_0(\xi_{s,x}(T)) + \int_s^T \widetilde{g}(\xi(\theta), y(\theta), z(\theta))\, d\theta - \int_s^T z(\theta)\, dW(\theta). \tag{4.13}$$

Поскольку решение $y(s) = u(s, \xi(s))$ уравнения (4.13) единственно, то

$$\Psi(\tau, \zeta(\tau)) = \langle \eta(\tau), y(\tau) \rangle = \langle h, y(s) \rangle + \int_s^\tau \langle h, \widetilde{g}(\xi(\theta), y(\theta), z(\theta)) \rangle\, d\theta$$
$$- \int_s^\tau \langle h, z(\theta) dW(\theta) \rangle.$$

Подставляя последнее соотношение в (4.12), получим, что справедливо неравенство

$$0 \geqslant \Psi(\tau,\zeta(\tau)) - \Phi(\tau,\zeta(\tau)) = \Psi(s,\zeta) - \Phi(s,\zeta) - \int\limits_s^\tau [\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} + \mathcal{A}\Phi](\theta,\zeta(\theta))\,d\theta$$

$$- \int\limits_s^\tau \langle h, \widetilde{g}(\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\rangle\,d\theta + \int\limits_s^\tau \langle h, z(\theta)dW(\theta)\rangle$$

$$- \int\limits_s^\tau \langle \nabla\Phi(\theta,\zeta\theta)), M(\zeta(\theta),y(\theta),z(\theta))\,dW(\theta)\rangle.$$

Поскольку, по предположению, $\Psi(s,\zeta) - \Phi(s,\zeta) = 0$, то, вычисляя математическое ожидание в последнем неравенстве, получим оценку

$$\mathbf{E}\left(\int\limits_s^\tau \langle h, \Lambda(\theta,\xi(\theta),y(\theta),z(\theta))\rangle\,d\theta\right) \geqslant 0, \tag{4.14}$$

где

$$\Lambda(\theta,\xi,y,z) = [\frac{\partial u}{\partial \theta} + \mathcal{B}u](\theta,\zeta) + \widetilde{g}(\xi,y,z)$$

и $\mathcal{B}$ имеет вид (2.2). Однако, для того, чтобы доказать, что $u(s,x)$ является субрешением (4.2), нужно доказать, что $\Lambda(\theta,\xi,u,K(u,\nabla\phi) \geqslant 0$.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1 *и процессы* $(\xi_{s,x}(t), y^{s,x}(t), z^{s,x}(t))$ *удовлетворяют системе* (4.10), (4.11). *Тогда* $u(s,x) = y^{s,x}(s)$ *– непрерывное вязкостное решение задачи Коши* (4.1).

Доказательство. Если выполнены условия **C 2.1**, **C 2.2**, то непрерывность решения ОСДУ (4.4), а следовательно, и непрерывность функции $u(s,x) = y^{s,x}(s)$ по пространственной переменной x следует из общих результатов теории ОСДУ [7]. Для того, чтобы доказать, что $u(s,x)$ является вязкостным решением задачи Коши (4.1), для произвольной функции $\phi \in C^{1,2}$ пусть $(s,x) \in [0,T] \times R^d$ – точка, в которой достигается локальный максимум функции $u_m - \phi_m, m = 1,\dots d_1$. Без потери общности предположим, что в этой точке $u(s,x) = \phi(s,x)$.

Пусть

$$K(t,u,\nabla u)) = \begin{pmatrix} \Gamma^*(t)[C^*(t,\xi_{s,x}(t))u](t,\xi_{s,x}(t)) \\ \Gamma^*(t)(\nabla\phi A)(t,\xi_{s,x}(t)) \end{pmatrix},$$
$$s \leqslant t \leqslant s+\alpha,$$

Предположим, что справедлива оценка

$$\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial s} + [\mathcal{B}\phi]_m\right)(s,x) + g_m(s,x,u(s,x),K(s,u,\nabla\phi)(s,x)) < 0$$

и покажем, что такое предположение приводит к противоречию.

Пусть точка $\alpha \in (0,T-s]$ такова, что для всех $t \in [s,s+\alpha]$ и $\|x_1 - x\| < \alpha$ справедлива оценка $u_m(t,x_1) \leqslant \phi_m(t,x_1)$ и

$$\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial s} + [\mathcal{B}\phi]_m\right)(s,x_1) + g_m(s,x_1,u(s,x_1),K(s,u,\nabla\phi)(s,x_1)) < 0. \tag{4.15}$$

Рассмотрим решение $(\xi_{s,x}(t), y^{s,x}(t), z^{s,x}(t))$ системы (4.10), (4.11), и определим момент остановки $\tau = \inf\{t \geqslant s : \|\xi_{s,x}(t) - x\| \geqslant \alpha\} \wedge (s+\alpha)$. Обозначим

$$(\hat{y}(t),\hat{z}(t)) = (y^{s,x}(t\wedge\tau), I_{[0,\tau]}(t)z^{s,x}(t)), \quad s \leqslant t \leqslant s+\alpha.$$

Нетрудно проверить, что пара $(\hat{y}(t),\hat{z}(t))$ удовлетворяет ОСДУ

$$\begin{aligned} \hat{y}(t) = [\Gamma^*(\tau)u](\tau,\xi(\tau)) &+ \int_t^{s+\alpha} I_{[0,\tau]}(\theta) f(\theta,\xi(\theta),\hat{y}(\theta),\hat{z}(\theta))d\theta \\ &- \int_t^{s+\alpha} \hat{z}(\theta)dW(\theta)\rangle, \quad 0 \leqslant t \leqslant T. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Наряду с этим, применяя формулу Ито, можно показать, что пара

$$(\widetilde{y}(t),\widetilde{z}(t)) = (\Gamma^*(t\wedge\tau)\phi(t,\xi_{s,x}(t\wedge\tau)), I_{[0,\tau]}(t)K(t))$$

удовлетворяет ОСДУ

$$\begin{aligned} \widetilde{y}(t) = \Gamma^*(\tau)\phi(\tau,\xi_{s,x}(\tau)) &- \int_t^{s+\alpha} I_{[0,\tau]}(\theta)\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + [\mathcal{B}\phi]\right)(\theta,\xi_{s,x}(\theta))d\theta \\ &+ \int_t^{s+\alpha} \widetilde{z}(\theta)dW(\theta). \end{aligned}$$

Положим $\zeta_m^1 = [\Gamma^*(\tau)u]_m(\tau,\xi(\tau))$, $\zeta_m^2 = [\Gamma^*(\tau)\phi]_m(\tau,\xi_{s,x}(\tau))$, $f_m^1(t,x,y,z) = I_{[0,\tau]}f_m(t,x,y,z)$ и

$$f_m^2(t,x,y,z)=f_m^1(t,x,y,z)-I_{[0,\tau]}\left[\left(\frac{\partial\phi_m}{\partial\theta}+[\mathcal{B}\phi]_m\right)(t,x)-f_m^1(t,x,\widetilde{y},\widetilde{z})\right].$$

Из оценки (4.14) вытекает неравенство $f_m^1(t,x,y,z) < f_m^2(t,x,y,z)$. Далее, поскольку $u_m \leqslant \varphi_m$, то, в силу выбора τ и α, справедливо неравенство $\zeta^1 < \zeta^2$. Таким образом, в силу теоремы сравнения, получим оценку $\hat{y}(s) < \widetilde{y}(s)$ и, следовательно, $u_m(s,x) < \phi_m(s,x)$. Заметим, что мы пришли к противоречию, поскольку начальное предположение состояло в том, что $u_m(s,x) = \phi_m(s,x)$.

Рассмотрим далее вспомогательную пару процессов $(y^\diamond(t), z^\diamond(t)), s \leqslant t \leqslant s+\alpha$, удовлетворяющих ОСДУ

$$y^\diamond(t)=\Gamma^*(s+\Delta s)\phi(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s))+\int\limits_t^{s+\Delta s} f(\theta,\xi_{s,x}(\theta),y^\diamond(\theta),z^\diamond(\theta))d\theta$$

$$-\int\limits_t^{s+\Delta s} z^\diamond(\theta)dW(\theta). \tag{4.17}$$

Заметим, что генератор ОСДУ, которому подчиняются процессы $(y^\diamond(t), z^\diamond(t))$, совпадает с генератором ОСДУ, которому подчиняются процессы $(y(t), z(t))$, однако $\zeta_\phi = \Gamma^*(s+\Delta s)\phi(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s)) \geqslant y(s+\Delta s) = \Gamma^*(s+\Delta s)u(s+\Delta s,\xi_{s,x}(s+\Delta s))$. Из теоремы сравнения следует, что в этом случае $y^\diamond(s) \geqslant y^{s,x}(s) = u(s,x) = \phi(s,x)$. Покажем, что, если $\Delta s \to 0$ и $s \leqslant t \leqslant s+\Delta s$, то случайный процесс $y^\diamond(t)$ сходится к $\phi(s,x)$ и случайный процесс $z^\diamond(t)$ сходится к $\Gamma^*(s)([C\phi](s,x)+[\nabla\phi A](s,x))$.

Пусть $\Lambda(\theta,x) = \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta}+\mathcal{B}\phi\right)(\theta,x)+g(\theta,x,\phi(\theta,x),K(\phi(\theta,x),\nabla\phi(\theta,x)))$, для всех $s \leqslant \theta \leqslant s+\Delta s$.

Обозначим

$$\upsilon(\theta) = y^\diamond(\theta) - \Gamma^*(\theta)\phi(\theta,\xi_{s,x}(\theta)) - \int\limits_\theta^{s+\Delta s}\Lambda(\vartheta,x)d\vartheta,$$

$$\varpi(\theta) = z^{\diamond}(\theta) - \Gamma^*(\theta)K(\phi(\theta, \xi_{s,x}(\theta)), \nabla\phi(\theta, \xi_{s,x}(\theta))).$$

Воспользуемся формулой Ито для того, чтобы вывести ОСДУ, которому подчиняются процессы $(\upsilon(t), \varpi(t))$,

$$\begin{aligned}
\upsilon(t) &= \Gamma^*(s+\Delta s)\phi(s+\Delta s, \xi_{s,x}(s+\Delta s)) - \Gamma^*(t)\phi(t, \xi_{s,x}(t)) \qquad (4.18)\\
&+ \int_t^{s+\Delta s} f(\theta, \xi_{s,x}(\theta), y^{\diamond}(\theta), z^{\diamond}(\theta))d\theta - \int_t^{s+\Delta s} \Lambda(\theta, x)d\theta - \int_t^{s+\Delta s} z^{\diamond}(\theta)dW(\theta)\\
&= \int_t^{s+\Delta s} f(\theta, \xi_{s,x}(\theta), \upsilon(\theta) + \Gamma^*(\theta)\phi(\theta, \xi_{s,x}(\theta))\\
&+ \int_t^{s+\Delta s} \Lambda(\theta, x)d\theta,\ \varpi(\theta) + \Gamma^*(\theta)K(\phi, \nabla\phi)(\theta, \xi_{s,x}(\theta)))d\theta\\
&+ \int_t^{s+\Delta s} \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{B}\phi\right)(\theta, \xi_{s,x}(\theta)) - \Lambda(\theta, x)\right]d\theta - \int_t^{s+\Delta s} \varpi(s)dW(s).
\end{aligned}$$

Наконец, покажем, что пара (υ, ϖ) сходится к $(0, 0)$ при $\Delta s \to 0$. Принимая во внимание оценки, которым подчиняется генератор f, и используя стандартные рассуждения, основанные на формуле Ито и неравенстве Буркхольдера, докажем, что

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\left[\sup_{t\in[s,s+\Delta s]} |\upsilon(t)|^2\right] + \mathbf{E}\left[\int_s^{s+\Delta s} \|\varpi(\theta)\|^2 d\theta\right]\\
\leqslant L\mathbf{E}\left[\int_s^{s+\Delta s} \|n(\theta, \Delta s)\|^2 d\theta\right],
\end{aligned}$$

где

$$n(\theta,\Delta s) = -\Lambda(\theta,x) + \left(\frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \mathcal{B}\phi\right)(\theta,\xi_{s,x}(\theta))$$
$$+ f\Bigg(\theta,\xi_{s,x}(\theta),\Gamma^*(\theta)\phi(\theta,\xi_{s,x}(\theta))$$
$$+ \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} \Lambda(\theta,x)d\theta,\ \Gamma^*(\theta)K(\phi,\nabla\phi)(\theta,\xi_{s,x}(\theta))\Bigg).$$

При этом, из сходимости $\sup\limits_{t\in[s,s+\Delta s]} \mathbf{E}[\|\xi_{s,x}(t)-x\|^2] \to 0$ при $\Delta s \to 0$, равномерной непрерывности коэффициентов стохастических уравнений и гладкости функции ϕ по переменной x получим

$$\lim_{\Delta s\to 0} \sup_{s\leqslant\theta\leqslant s+\Delta s} \mathbf{E}[\|n(\theta,\Delta s)\|^2] = 0.$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}\left[\sup_{s\leqslant\theta\leqslant s+\Delta s} |\upsilon(\theta)|^2\right] + \mathbf{E}\left[\int\limits_{s}^{s+\Delta s} \|\varpi(\theta)\|^2 d\theta\right] \tag{4.19}$$
$$\leqslant L\mathbf{E}\left[\int\limits_{s}^{s+\Delta s} \|n(\theta,\Delta t)\|^2 d\theta\right] \leqslant \varepsilon(\Delta s)\Delta s,$$

где $\varepsilon(\Delta s) \to 0$ при $\Delta s \to 0$. Применяя неравенство Коши, получим

$$\mathbf{E}\left[\int\limits_{s}^{s+\Delta s} (|\widetilde{y}(\theta)| + |\widetilde{z}(\theta)|)d\theta\right] \leqslant \Delta s.$$

Однако полученная оценка еще недостаточна для наших целей. Для того, чтобы получить требуемую оценку, применим оператор математического ожидания к обеим частям соотношения (4.18) и получим

$$\upsilon(s) = \mathbf{E}[\widetilde{y}(s)] = \mathbf{E}\left[\int\limits_{s}^{s+\Delta s} \kappa(\theta,\Delta s)d\theta\right],$$

где

$$\kappa(\theta, \Delta s) = -\Lambda(\theta, x) + \left[\frac{\partial \phi}{\partial \theta} + \mathcal{B}\phi\right](\theta, \xi_{s,x}(\theta))$$
$$+ f(\theta, \xi_{s,x}(\theta), y^{\diamond}(\theta) - \int\limits_{\theta}^{s+\Delta s} \Lambda(t,x)dt, z^{\diamond}(\theta)).$$

Поскольку функция f удовлетворяет условию Липшица, то $|\kappa(t,h) - n(t,h)| \leqslant L(|y^{\diamond}(t)| + \|z^{\diamond}(t)\|)$ и в силу (4.18) получим оценку $y^{\diamond}(s) = \Delta s \varepsilon(\Delta s)$, где $\varepsilon(\Delta t) \to 0$ при $\Delta t \to 0$. Из оценки $y(s) \geqslant \phi(s,x)$ следует, что $\int\limits_{s}^{s+\Delta s} \Lambda(t,x)dt \geqslant \Delta s \varepsilon(\Delta s)$, откуда вытекает неравенство

$$\frac{1}{\Delta s} \int\limits_{s}^{s+\Delta s} \Lambda(t,x)dt \geqslant \varepsilon(\Delta t).$$

Пусть Δs стремится к 0, тогда

$$\Lambda(t,x) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(t,x) + \mathcal{B}\phi(t,x) + g(t,x,\phi(t,x), K(\phi, \nabla\phi)(t,x)) \geqslant 0,$$

что и означает, что $u(s,x)$ –это вязкостное решение задачи Коши (4.1). □

Литература

1. Ю. Л. Далецкий, *Функциональные интегралы, связанные с операторными эволюционными уравнениями.* — Успехи мат. наук **17**, No. 5 (1967), 3–115.
2. D. Stroock, *On certain systems of parabolic equations.* — Comm. Pure Appl. Math. **23** (1970), 447–457.
3. M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations.* Princeton Univ. Press (1985).
4. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Исследование задачи Коши для систем квазилинейных уравнений с помощью марковских процессов.* — Изв. ВУЗ Математика **12** (1978), 6–17.
5. Я. И. Белопольская, Ю. Л. Далецкий, *Марковские процессы ассоциированные с нелинейными параболическими системами .* — ДАН СССР **250**, No. 1 (1980), 521–524.
6. Ya. I. Belopolskaya, Yu. L. Dalecky, *Stochastic Equations and Differential Geometry.* Kluwer (1990).
7. S. Peng, *Probabilistic interpretation for systems of quasilinear parabolic partial differential equations.* — Stoch. Stoch. Rep. **37** (1991), 61–74.

8. E. Pardoux, *Backward stochastic differential equations and viscosity solutions of systems of semilinear parabolic and elliptic pdes of second order.* — Stochastic Analysis and Relates Topics: The Geilo Workshop, Birkhäuser (1996), 79–127.
9. E. Pardoux, S. Peng, *Backward stochastic differential equations and quasilinear parabolic partial differential equations.* — Lecture Notes CIS, **176**, Springer, 200–217 (1992).
10. E. Pardoux, F. Pradeilles, Z. Rao, *Probabilistic interpretation of a system of semilinear parabolic partial differential equations.* — Annales de l'I.H.P, sec. B, **33**, No. 4 (1997), 467–490.
11. P. Cheredito, H. Soner, N. Touzi, N. Victoir, *Second order backward stochastic differential equations and fully non-linear parabolic PDEs.* — Comm. Pure Appl. Math. **60**, No. 7 (2007), 1081–1110.
12. Ya. Belopolskaya, *Probabilistic approaches to nonlinear parabolic equations in jet-bundles.* — Global and stochastic analysis **1**, No. 1 (2010), 3–40.
13. Я. И. Белопольская, В. А. Войчинский, *Вероятностный подход к построению вязкостных решений задачи Коши для систем полностью нелинейных параболических уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 31–66.
14. Y. Hu, S. Peng, *On the comparison theorem for a multidimensional BSDEs.* — C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, **343** (2006), 135–140.
15. W. Zhen, X. Hua, *Multidimensional reflected backward stochastic differential equations and the comparison theorem.* — Acta Math. Sci. **30** B(5) (2010), 1819–1836.
16. M. Crandall, H. Ishii, P. Lions, *User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations.* — Bull. AMS **27**, No. 1 (1992), 1–67.

Belopolskaya Ya. I. Forward-backward stochastic differential equations associated with systems of quasilinear parabolic equations and comparison theorems.

We develop a probabilistic approach to construction of a viscosity solution of the Cauchy problem for a system of quasilinear parabolic equations with respect to a vector function $u(t,x) \in R^{d_1}, x \in R^d$. Our approach is based on a possibility to reduce the original quasilinear parabolic system to a quasilinear parabolic equation in an alternative phase space and derive forward-backward stochastic differential equations associated with it. This reduction shows the way to prove some comparison theorems for BSDEs and as a result to construct a probabilistic representation of a viscosity solution of the original Cauchy problem.

С.-Петербургский Государственный
Архитектурно-Строительный Университет,
ул. 2-я Красноармейская 4,
Санкт-Петербург 190005, Россия
E-mail: yana@yb1569.spb.edu

Поступило 26 февраля 2013 г.