Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 411, 2013 г.

А. Л. Чистов

ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЙ АЛГОРИТМ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ СЛОЖНОСТИ ДЛЯ ПЕРВОЙ ТЕОРЕМЫ БЕРТИНИ. I

Введение

Первая теорема Бертини и её различные варианты были проанализированы в первой половине и середине предыдущего столетия, см. обзор в [1]. В настоящей статье мы предлагаем детерминированный алгоритм полиномиальной сложности для общей версии этой теоремы в случае основного поля нулевой характеристики. Алгоритмическая точка зрения требует уделять больше внимания деталям, чем это было раньше. В результате мы получили простое явное описание открытого в топологии Зариского подмножества из формулировки первой теоремы Бертини. Так что эта теорема перестала быть чистой теоремой существования (по крайней мере в нулевой характеристике). Более точно, рассмотрим неприводимую гиперповерхность, которая является множеством всех общих нулей однородного многочлена Φ от $X_0, \dots, X_n$ в n-мерном проективном пространстве над полем нулевой характеристики, $n \geqslant 2$. Пусть $\deg_{X_0} \Phi \geqslant 1$. Рассмотрим линейную систему на этой гиперповерхности, заданную координатными функциями $X_1, \dots, X_n$ (общий случай, как мы увидим, может быть сведён к этому). Пусть $R = \operatorname{Res}_{X_0}(\Phi, \partial\Phi/\partial X_0)$ – дискриминант многочлена Φ относительно X_0. Обозначим через R_0 бесквадратную часть многочлена R относительно X_0 (т.е. сепарабельный многочлен максимальной степени, делящий дискриминант, который здесь и ниже в данной статье по определению является результантом многочлена и его частной производной по рассматриваемой переменной). Тогда линейная форма L от $X_1, \dots, X_n$ удовлетворяет утверждению первой теоремы Бертини в рассматриваемом случае всякий раз, когда многочлен от $n-1$ переменных $R_0 \bmod L$ является сепарабельным.

В настоящей статье используются детерминированные алгоритмы полиномиальной сложности из [9] (исправление утверждения леммы 2 из [9] см. в [10]), [10–13]. Все цитированные статьи, в свою очередь,

Ключевые слова: первая теорема Бертини, полиномиальный алгоритм.

могут рассматриваться как продолжение наших предыдущих работ. Они основываются на вещественной алгебраической геометрии, или, более точно, используют вещественные структуры (см. [15]) для получения алгоритмов полиномиальной сложности для алгебраических многообразий над алгебраически замкнутыми полями нулевой характеристики. Особо мы хотели бы подчеркнуть здесь важность фундаментального алгоритма из [7] для [9–13] и настоящей статьи. Результаты из [9] позволяют выяснить, верно ли, что две точки принадлежат одной и той же неприводимой компоненте алгебраического многообразия. Кроме того, в [9] мы предлагаем алгоритм для первой теоремы Бертини в случае конечных морфизмов и показываем, как построить линейные сечения в общем положении (из линейной системы всех линейных форм) алгебраического многообразия. В [10] мы исследуем рациональные морфизмы с алгоритмической точки зрения в случае, когда размерность многообразия совпадает с размерностью его образа. В [11–13] мы строим объекты в общем положении, относящиеся к рациональному морфизму в общем случае. Чтобы получить алгоритмы из [11–13], мы предлагаем новый метод для решения систем полиномиальных уравнений и неравенств с квадратами абсолютных величин (см. [15]) в случае, когда эти системы содержат общие линейные формы. В настоящей статье нам надо усилить этот метод для случая общих однородных многочленов заданной степени (вместо общих линейных форм). Это требует применения результата из [16], см. раздел 2.

В [9] и настоящей статье мы привлекаем трансцендентные методы теории аналитических функций, а именно группу монодромии алгебраической функции, для того чтобы обосновать алгоритмы. Теорема[1] 3 из раздела 4 использует эти методы и обобщает теорему 3 работы [9] на случай не обязательно конечных морфизмов. Основываясь на этом результате, мы получаем критерий неприводимости для многочленов от многих переменных (см. ниже), который обобщает критерий из [9].

[1]Иногда в данной первой части статьи, главным образом для обзора результатов, мы используем ссылки на теоремы, леммы, разделы и т.д. из следующих частей этой статьи. Более точно, здесь это ссылки на теорему 3 раздела 4 и её следствие 1, теорему 4 и лемму 24 из приложения (они появятся в последней части). Во всех частях статьи нумерация теорем (соответственно лемм, разделов и т.д.) продолжается из настоящей первой и последующих частей.

Теперь мы переходим к более подробным формулировкам. Пусть k – поле нулевой характеристики с алгебраическим замыканием $\overline{k}$. Пусть $X_0, X_1, \ldots$ – независимые переменные над полем k. Обозначим через $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ проективное пространство над полем $\overline{k}$ с координатами $X_0, \ldots, X_n$. Мы будем предполагать, что $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ определено над k. Для произвольных однородных многочленов $g_1, \ldots, g_m \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_n]$ будем обозначать через $\mathcal{Z}(g_1, \ldots, g_m)$ множество всех общих нулей многочленов $g_1, \ldots, g_m$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Аналогичные обозначения будут использоваться для множеств нулей идеалов и многочленов с другими полями коэффициентов в аффинных и проективных пространствах (это будет видно из контекста). Для поля k и семейства элементов $a' = \{a'_i\}_{i \in I}$ из некоторого расширения поля k мы будем обозначать через $k(a')$ (соответственно $k[a']$) поле (соответственно кольцо), порождённое над k всеми элементами a'_i, $i \in I$. Для двух (или более) семейств a', a'' обозначения $k(a', a'')$, $k[a', a'']$ имеют аналогичный смысл. Теперь предположим, что a' является семейством независимых переменных над k и $f \in k[a']$. Пусть $b' = \{b'_i\}_{i \in I}$ – семейство элементов из k с теми же самыми индексами, что и a'. Тогда мы будем обозначать через $f(b')$ значение f при $a'_i = b'_i$, $i \in I$, и также использовать другие аналогичные обозначения.

В алгоритмической части статьи мы будем предполагать, что поле k является конечно порождённым над полем рациональных чисел $\mathbb{Q}$. Пусть $V \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – проективное алгебраическое многообразие, которое является множеством всех общих нулей семейства однородных многочленов от $X_0, \ldots, X_n$ степеней меньше d с коэффициентами из поля k. Пусть W – определённая над k и неприводимая над k компонента многообразия V, и пусть W задана её точкой, которая принадлежит только одной неприводимой над k компоненте многообразия V, см. теорему 1 работы [9], а также подробности ниже. Пусть $e_0, \ldots, e_r \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородные многочлены, такие, что $\deg e_i = d' \geqslant 1$ для всякого ненулевого e_i, $0 \leqslant i \leqslant r$. Мы будем предполагать в дальнейшем, что $\dim(W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)) < \dim W$. Пусть

$$p : W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r) \to \mathbb{P}^r, \quad (X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e_0 : \ldots : e_r), \qquad (1)$$

– регулярный морфизм. Положим $W' = \overline{p(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r))}$ (здесь и ниже в аналогичных ситуациях черта обозначает замыкание относительно топологии Зариского). Следовательно, W' является неприводимым над k замкнутым подмногообразием в $\mathbb{P}^r(\overline{k})$. Мы будем предполагать в этой статье, что $\dim W' > 0$. Заметим, что можно рассматривать рациональный морфизм $W \to \mathbb{P}^r(\overline{k})$ проективных алгебраических многообразий, заданный по тому же самому правилу, но, чтобы быть более точными, в дальнейшем мы имеем дело с регулярными морфизмами квазипроективных многообразий. Обозначим через

$$p' : W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r) \to W'$$

доминантный морфизм, индуцированный морфизмом p. Предположим, что

$$\dim W = n - s \quad \text{и} \quad \dim W' = n - \sigma > 0$$

(можно вычислить s и σ при помощи алгоритма из [5], см. [12, раздел 2]). Так что $0 \leqslant s \leqslant \sigma < n$. Пусть $v_j = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} v_{j,i} X_i$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, – общие линейные формы от $X_0, \dots, X_n$, т.е. семейство их коэффициентов $v_{j,i}$ имеет степень трансцендентности $(\sigma - s)(n+1)$ над k. Обозначим через k_v поле, порождённое всеми коэффициентами линейных форм v_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, над k. Обозначим через W_v пересечение многообразия W с линейным подпространством $\mathcal{Z}(v_{s+1}, \dots, v_\sigma)$ коразмерности $\sigma - s$ (следовательно, W_v определено над k_v). Положим $v = (v_{s+1}, \dots, v_\sigma)$, и пусть $\upsilon = \widetilde{v} = \{v_{j,i},\ s+1 \leqslant j \leqslant \sigma, 0 \leqslant i \leqslant n\}$ — семейство коэффициентов линейных форм v_j, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$ (не следует путать v и υ).

Пусть $n - \sigma \geqslant 2$. Тогда наша цель — построить за полиномиальное от $(dd')^n$ и длины записи входных данных время линейные формы $L'_{\sigma+1}, \dots, L'_{n-1} \in k[X_0, \dots, X_r]$ с целыми коэффициентами с длиной записи $O(n \log d + (n-\sigma) \log d')$, удовлетворяющие для всех i, $\sigma \leqslant i \leqslant n$, следующим условиям.

(i) Пересечения $(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i)$ и $W' \cap \mathcal{Z}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$ трансверсальны (см. определение ниже); если $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n-1$, то эти пересечения являются неприводимыми над k многообразиями.

(ii) Морфизм $p'_{v,i} : (W_v \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_i) \to W'(\overline{k_v}) \cap \mathcal{Z}(L'_{\sigma+1}, \dots, L'_i)$, индуцированный морфизмом p', является доминантным. Положим $p'_{v,\sigma} = p'_v$.

(iii) Степень морфизма $p'_{v,i}$ совпадает со степенью морфизма p'_v.

(iv) Степень замыкания $\overline{(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_i)}$ является максимально возможной (когда варьируются линейные формы L'_j, $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant n - 1$).

Справедливо даже больше условий общего положения, например

$$(L'_{\sigma+1}, \ldots, \quad L'_{n-1}) \in \mathcal{U}'''_{n-1},$$

где $\mathcal{U}'''_{n-1} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma-1)}$ – непустое открытое в топологии Зариского подмножество, введённое в [11], см. ниже. Для всякого j, где $\sigma+1 \leqslant j \leqslant n-1$, мы определим открытое в топологии Зариского подмножество $\mathcal{U}_j \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-j)}$, такое, что если $(L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_{n-1}) \in \mathcal{U}_j$, то выполняются условия (i)–(iv) при $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant j$.

В частности, в условиях первой теоремы Бертини для морфизма p' (см. ниже) мы покажем, как найти элемент из открытого множества $\mathcal{U}$ из формулировки этой теоремы за время, полиномиальное от $(dd')^n$ и длины записи входных данных. Заметим также, что до сих пор первая теорема Бертини была в основном теоремой существования. Не было явного описания открытого в топологии Зариского подмножества множества $\mathcal{U}$ из формулировки этой теоремы.

Замечание 1. В замечании 1 из [11] мы даём достаточное условие, при котором из (i), (ii) и (iii) следует (iv). Интересно найти другие такие условия.

Обозначим через k_u поле, порожденное над k алгебраически независимыми над k элементами $u_{j,w}$, $j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant w \leqslant r$. Пусть K – поле, содержащее k_u и такое, что K и k_v являются линейно раздельными над k. Пусть $l'_{j,w} \in \overline{k}$, $j \in \{0, \sigma + 1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant w \leqslant r$. Пусть $L'_j = l'_{j,0}X_0 + \ldots + l'_{j,r}X_r$ (соответственно $U_j = u_{j,0}X_0 + \ldots + u_{j,r}X_r$), $j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\}$, – линейные формы из $\overline{k}[X_0, \ldots, X_r]$ (соответственно $K[X_0, \ldots, X_n]$). Положим $e'_j = L'_j(e_0, \ldots, e_r)$ (соответственно $u_j = U_j(e_0, \ldots, e_r)$), $j \in \{0, \sigma + 1, \ldots, n\}$. Положим $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)$ (соответственно $U = (U_0, U_{\sigma+1}, \ldots, U_n)$). Положим u (соответственно l') равным семейству всех $u_{j,i}$ (соответственно $l'_{j,i}$), $j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant i \leqslant r$. В дальнейшем мы определим некоторые объекты, соответствующие L'. Аналогичные объекты, соответствующие U, определяются заменой поля k на K. Ниже мы будем рассматривать также случай, когда линейные формы L'_j имеют коэффициенты в $\overline{K}$. В этом случае объекты, соответствующие L', определяются при помощи расширения поля k до $\overline{K}$.

Напомним некоторые обозначения из [11]. Отождествим аффинное пространство $\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$ (соответственно $\mathbb{A}^{(r+1)(n-i)}(\overline{k})$) с множеством всех $(n-\sigma+1)$-наборов $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)$ (соответственно $(n-i)$-наборов $(L'_{i+1}, \ldots, L'_n)$) линейных форм $L'_j \in \overline{k}[X_0, \ldots, X_r]$. Для удобства обозначений, если $i = \sigma + 1$, мы будем отождествлять 1-набор $(L'_{\sigma+1})$ с линейной формой $L'_{\sigma+1}$. Напомним, что в теореме 1 работы [10] мы определяем открытое в топологии Зариского множество $\mathcal{U}'_0 \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$ в случае, когда $s = \sigma$.

В [11] множество $\mathcal{U}'_0$ определяется в общем случае. Именно, пусть $\mathcal{V}$ – открытое в топологии Зариского подмножество из утверждения теоремы 1 из [10] для p'_v, k_v вместо p', k соответственно. Тогда $\mathcal{U}'_0 = \mathcal{V} \cap \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$. Короче, $L' \in \mathcal{U}'_0$ в том и только в том случае, когда число элементов множества $W_v \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_n) \setminus (\mathcal{Z}(e'_0) \cup \overline{(V \setminus W)})$ (это подмножество в $\mathbb{P}^n(\overline{k_v})$) равно $\deg p'_v \deg W'$ и $\#(W' \cap \mathcal{Z}(L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)) = \deg W'$, т.е. последние два пересечения являются конечными и имеют максимально возможное число элементов, см. [10]. Поэтому если $L' \in \mathcal{U}'_0$, то $W' \cap \mathcal{Z}(L'_0, \ldots, L'_r) = \emptyset$ в $\mathbb{P}^r(\overline{k_v})$ и $W \cap \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_n) = W \cap \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$.

Замечание 2. Очевидно, если $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n) \in \mathcal{U}'_0$ и γ – невырожденное линейное преобразование форм $L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n$ над $\overline{k}$, то $(L'_0, \gamma(L'_{\sigma+1}), \ldots, \gamma(L'_n)) \in \mathcal{U}'_0$.

Предположим, что $L' \in \mathcal{U}'_0$. Рассмотрим морфизм

$$p_{L'} : W \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \ldots, e'_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k}),$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_{\sigma+1} : \ldots : e'_n).$$

В [11] для произвольного L' мы определяем алгебраические многообразия $W_i(L')$, $W_i^{(\beta)}$, $\sigma \leqslant i \leqslant n+1$ (они являются подмногообразиями в W). В настоящей статье нам потребуется только случай, когда $\sigma \leqslant i \leqslant n$ и $L' \in \mathcal{U}'_0$. В дальнейшем, если не оговорено противное, мы предполагаем, что $L' \in \mathcal{U}'_0$. Тогда

- $W_i(L')$, $\sigma \leqslant i \leqslant n$, является объединением всех неприводимых компонент E многообразия $W \cap \mathcal{Z}(e_{\sigma+1}, \ldots, e_i)$, таких, что $\dim E = \dim \overline{p(E \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r)} = n - i + \sigma - s$.

Следовательно, $W_\sigma(L') = W$. Положим $W_\sigma^{(\beta)}(L') = \varnothing$, $\beta = 1, 2, 3$. Далее (см. [11]), при $\sigma + 1 \leqslant i \leqslant n$ имеем $\dim(W_{i-1}(L') \cap \mathcal{Z}(e'_i)) \leqslant n + \sigma - s - i$ и $\dim(W_n(L') \cap \mathcal{Z}(e'_0)) \leqslant \sigma - s - 1$. Размерность каждой неприводимой

компоненты многообразия $W_i^{(\beta)}(L')$, $\beta = 1,2,3$, равна $n-\sigma+s-i$. Именно, $W_{i-1}(L')\cap\mathcal{Z}(e_i') = W_i(L')\cup W_i^{(1)}(L')\cup W_i^{(2)}(L')\cup W_i^{(3)}(L')$, где

- $W_i^{(1)}(L')$ является объединением всех неприводимых компонент E пересечения $W_{i-1}(L')\cap\mathcal{Z}(e_i')$, таких, что E – неприводимая компонента многообразия $W\cap\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$;
- $W_i^{(2)}(L')$ является объединением всех неприводимых компонент E многообразия $W_{i-1}(L')\cap\mathcal{Z}(e_i')$, таких, что $E\subset\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$, но E не является неприводимой компонентой пересечения $W\cap\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$;
- $W_i^{(3)}(L')$ является объединением всех неприводимых компонент E многообразия $W_{i-1}(L')\cap\mathcal{Z}(e_i')$, таких, что $E\not\subset\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$ и $\dim\overline{p_{L'}(E\setminus\mathcal{Z}(e_0',e_{\sigma+1}'\dots,e_n'))} < n-i+\sigma-s$, см. [11].

Поскольку $L'\in\mathcal{U}_0'$, мы имеем (см. [11]) следующее:

- $W_i^{(3)}(L')$ является объединением всех неприводимых компонент E многообразия $W_{i-1}(L')\cap\mathcal{Z}(e_i')$, таких, что $E\not\subset\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$ и $\dim\overline{p(E\setminus\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r))} < n-i+\sigma-s$.

Следовательно, если $W_i^{(3)}(L')\neq\emptyset$, то $\dim W_i^{(3)}(L')\geqslant 1$ (в частности, $W_n^{(3)}(L')=\emptyset$). Также мы имеем $W_{\sigma+1}^{(2)}(L')=\emptyset$. Положим $D_i(L') = \deg W_i(L')$ и $D_i^{(\beta)}(L') = \deg W_i^{(\beta)}(L')$, $\beta=1,2,3$.

Пусть W_j, $j\in J_i(L')$ (соответственно $j\in J_i^{(\beta)}(L')$, $\beta=1,2,3$) – семейство всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент многообразия $W_i(L')$ (соответственно $W_i^{(\beta)}(L')$) и $\iota_j(L') = i(W_{i-1}(L'),\mathcal{Z}(e_i');W_j)$ обозначает индекс пересечения многообразий $W_{i-1}(L')$ и $\mathcal{Z}(e_i')$ в компоненте W_j, см. [11]. Пусть $W_i^{(1)} = \bigcup_{j\in J_i^{(1)}} W_j$ – объединение всех неприводимых компонент размерности $n-\sigma+s-i$ пересечения $W\cap\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$. Мы предполагаем в дальнейшем без ограничения общности, что $J_i^{(1)}(L')\subset J_i^{(1)}$ для всякого $L'\in\mathcal{U}_0'$.

Пусть α – целое число, $\sigma+1\leqslant\alpha\leqslant n$. По лемме 11 работы [10] условие

$$W_i(L') = \overline{W\cap\mathcal{Z}(e_{\sigma+1}',\dots,e_i')\setminus\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)} \tag{2}$$

выполняется при $\sigma+1\leqslant i\leqslant\alpha$ тогда и только тогда, когда $W_i^{(3)}(L') = \varnothing$ при $\sigma+1\leqslant i\leqslant\alpha$. Если (2) имеет место для всякого i из интервала $\sigma+1\leqslant i\leqslant\alpha$, то (см. [11]) $W_i^{(1)}(L') = W_i^{(1)}$ при $\sigma+1\leqslant i\leqslant\alpha$ не

зависит от выбора L'. Следовательно, в этом случае $J_i^{(1)}(L') = J_i^{(1)}$ при $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$ не зависит от выбора L'.

Положим $D_i = D_i(U)$, $D_i^{(\beta)} = D_i^{(\beta)}(U)$, $\beta = 1,2,3$, и $\iota_j = \iota_j(U)$ для всякого $j \in J^{(1)}$.

В [11] мы вводим также обозначение $W_i(L') = W(L_{\sigma+1},\dots,L_i)$ и аналогичные обозначения для $W_i^{(1)}(L')$, $W_i^{(2)}(L')$, $D_i(L')$ (вместо $W_i(L')$) и т.д.; рассматриваемые объекты зависят фактически только от $L_{\sigma+1},\dots,L_i$.

Пусть α – целое число, $\sigma \leqslant \alpha \leqslant n$. *Обозначим через* $\mathcal{U}'_\alpha$ *образ множества* $\mathcal{U}'_0$ *при линейном отображении*

$$\pi_\alpha \,:\, \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k}),$$

$L' \mapsto (L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$. Тогда $\mathcal{U}'_\alpha$ является открытым множеством относительно топологии Зариского, поскольку образ открытого множества при линейной проекции открыт.

Обозначим через $\mathcal{U}''_\alpha \subset \mathcal{U}'_\alpha$ *подмножество всех* $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$, *таких, что*

$$D(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i) = D_i \tag{3}$$

при $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. *Положим также* $\mathcal{U}''_0$ *равным множеству всех* $L' \in \mathcal{U}'_0$, *таких, что* $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_n) \in \mathcal{U}''_n$.

Обозначим через $\mathcal{U}'''_\alpha \subset \mathcal{U}''_\alpha$ *подмножество всех* $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha)$, *таких, что*

$$D^{(2)}(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i) = D_i^{(2)} \tag{4}$$

при $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. *Положим также* $\mathcal{U}'''_0$ *равным множеству всех* $L' \in \mathcal{U}''_0$, *таких, что* $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_n) \in \mathcal{U}'''_n$.

Если $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha) \in \mathcal{U}'_\alpha$, то по лемме 11 из [10] имеем $\iota_j(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i) = 1$ для всех $j \in J(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i)$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Если $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha) \in \mathcal{U}''_\alpha$, то (см. [11]) $\iota_j(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i) = \iota_j$ для всех $j \in J_i^{(1)}$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Далее, $\mathcal{U}''_\alpha$, U'''_α являются непустыми открытыми в топологии Зариского подмножествами в $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$, см. [11]. Согласно лемме 14 из [10], применённой к W_v, p'_v, α вместо W, p', $i+1$, если $D_i(L') = D_i$ при $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$, то $W_i^{(3)}(L') = \varnothing$ при $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Следовательно, если $L' \in \mathcal{U}''_0$, то условие (2) выполняется для всех i из интервала $\sigma \leqslant i \leqslant n-1$.

Для краткости положим $\mathcal{U}' = \mathcal{U}'_{\sigma+1}$ *(соответственно* $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}''_{\sigma+1}$, $\mathcal{U}''' = \mathcal{U}'''_{\sigma+1}$*).* Заметим, что $\mathcal{U}'' = \mathcal{U}'''$.

Отметим (см. [11]), что D_i – максимально возможное значение числа $D_i(L')$; если $D_i(L') = D_i$, то все индексы пересечения $\iota_j(L') = \iota_j$, $j \in J^{(1)}$, являются минимально возможными; $D_i^{(2)}$ – максимально возможное значение числа $D_i^{(2)}(L')$ при условии, что $D_j = D_j(L')$ при $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant n$ и $D_j^{(2)}(L') = D_j^{(2)}$ при $\sigma + 2 \leqslant j < i$.

Пусть $W_1, W_2 \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – два квазипроективных алгебраических многообразия, определённых над k. Пусть W_3 – произвольная определённая над k и неприводимая над k компонента пересечения $W_1 \cap W_2$. Мы будем говорить, что пересечение $W_1 \cap W_2$ трансверсально в W_3, тогда и только тогда, когда существует точка $x \in W_3$, такая, что x является гладкой точкой каждого многообразия W_i, $i = 1, 2$, и пересечение $T_{x,W_1} \cap T_{x,W_2}$ касательных пространств многообразий W_1 и W_2 в точке x трансверсально, т.е. $\dim(T_{x,W_1} \cap T_{x,W_2}) = n - \dim(T_{x,W_1}) - \dim(T_{x,W_2})$. Мы будем говорить, что пересечение $W_1 \cap W_2$ трансверсально, в том и только в том случае, если оно трансверсально во всякой его определённой над k и неприводимой над k компоненте. Аналогичным образом можно определить трансверсальность пересечения конечного числа алгебраических многообразий.

Согласно, например, лемме 17 из [13], если пересечение $W_1 \cap W_2$ трансверсально и y является произвольной гладкой точкой многообразия $W_1 \cap W_2$, то y – гладкая точка каждого многообразия W_i, $i = 1, 2$, и пересечение $T_{y,W_1} \cap T_{y,W_2}$ касательных пространств многообразий W_1 и W_2 в точке y трансверсально. Также здесь может быть полезен следующий простой результат (мы оставляем его доказательство читателю).

Предложение 1. *Пусть W_i, $i \in I$, – конечное семейство квазипроективных алгебраических подмногообразий в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Предположим, что пересечение $\bigcap_{i \in I} W_i$ трансверсально. Пусть для произвольного семейства E_i, $i \in I$, такого, что E_i является неприводимой компонентой многообразия W_i, $i \in I$, выполнено условие $\sum\limits_{i \in I}(n - \dim E_i) = \sum\limits_{i \in I} \mathrm{codim} E_i \leqslant n$. Пусть $I_1 \subset I$. Предположим, что для всякой неприводимой компоненты E многообразия $\bigcap_{i \in I_1} W_i$ пересечение $E \cap \bigcap_{i \in I \setminus I_1} W_i$ непусто (в частности, это условие выполняется, если все алгебраические многообразия W_i, $i \in I$, являются проективными, т.е. замкнутыми в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$). Тогда пересечение $\bigcap_{i \in I_1} W_i$ также трансверсально.*

Теперь мы собираемся сформулировать вариант первой теоремы Бертини (главным образом для ссылок в дальнейшем). Заметим, что все объекты, введённые выше для алгебраических многообразий V, W и морфизма p, могут быть также определены аналогичным образом в случае, когда k является совершенным полем ненулевой характеристики и расширение полей $k(W) \supset k(W')$ сепарабельно. В этом случае, аналогично нулевой характеристике, $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$ являются открытыми в топологии Зариского подмножествами соответствующих аффинных пространств (мы оставляем подробности читателю; нашей целью в этой статье не является рассмотрение случая ненулевой характеристики, за исключением, может быть, приложения). Напомним, что если $L' \in \mathcal{U}''$, то $W^{(3)}(L'_{\sigma+1}) = \varnothing$ и $W(L'_{\sigma+1}) = \overline{W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)}$ (для ненулевой характеристики это доказывается аналогично случаю нулевой характеристики, см. лемму 14 из [10]). Если $V = W$, то множества $\mathcal{U}'$, $\mathcal{U}''$, $\mathcal{U}'''$ не зависят от выбора $f_1, \dots, f_m$. Из данного здесь варианта первой теоремы Бертини можно вывести обычный (см., например, [20]) вариант на языке линейных систем. Следует только положить $V = W$ и $k = \overline{k}$.

Теорема (версия первой теоремы Бертини)**.** *Пусть k – совершенное поле (сейчас не обязательно нулевой характеристики) и $W \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})$ – определённое над k и неприводимое над k проективное алгебраическое многообразие с $\dim W = n - s$. Пусть многообразия V, W, многочлены $e_0, \dots, e_r$, $r \geqslant 2$, и морфизмы p, p' – такие же, как и выше. Предположим, что $\dim W' > 1$ (следовательно, $s \leqslant n-2$) и расширение полей рациональных функций $k(W) \supset k(W')$ сепарабельно (возможно, ненулевой степени трансцендентности). Обозначим через $\mathcal{U}$ подмножество всех линейных форм $L'_{\sigma+1} \in \mathcal{U}''$, таких, что неприводимые над $\overline{k}$ компоненты алгебраических многообразий W и $W(L'_{\sigma+1})$ находятся во взаимно однозначном соответствии по правилу $W_1 \mapsto W_2$, где W_2 – неприводимая над $\overline{k}$ компонента пересечения $W_1 \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1})$, такая, что $W_2 \subset W(L'_{\sigma+1})$ (следовательно, W_2 является единственной компонентой, соответствующей W_1 и удовлетворяющей этим двум свойствам, и пересечение $W \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1})$ трансверсально в каждой компоненте W_2 многообразия $W(L'_{\sigma+1})$). Тогда $\mathcal{U}$ является непустым открытым в топологии Зариского определённым над k подмножеством в $\mathbb{A}^{n+1}(\overline{k})$. Для всякого $L'_{\sigma+1} \in \mathcal{U}(k)$ алгебраическое многообразие $W(L'_{\sigma+1})$ определено над k и неприводимо над k.*

Сформулированную теорему можно вывести, например, из [20]. Для удобства читателя мы даём независимое доказательство этого факта в приложении. То, что $\mathcal{U}$ является непустым и открытым в топологии Зариского, следует из леммы 24, которая основывается на теореме 4, см. приложение. Здесь достаточно трудно доказать (в ненулевой характеристике), что $\mathcal{U} \neq \varnothing$. Для того чтобы доказать этот факт, мы используем леммы 13 и 14 из [14].

Пусть $\mathcal{U}_\alpha$, $\sigma+1 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, – подмножество всех $(\alpha-\sigma)$-наборов $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_\alpha) \in \mathcal{U}'''_\alpha$, таких, что для всякого i из интервала $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$ (или, что эквивалентно, для $i=\alpha$, см. лемму 11 из [10]) неприводимые над $\overline{k}$ компоненты алгебраических многообразий W и $W(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i)$ находятся во взаимно однозначном соответствии по правилу $W_1 \mapsto W_2$, где W_2 является неприводимой над $\overline{k}$ компонентой многообразия $W_1 \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots,e'_i)$, такой, что $W_2 \subset W(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i)$. Следовательно, W_2 является единственной компонентой, соответствующей W_1 и удовлетворяющей этим двум свойствам, и пересечение многообразий W и $\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots,e'_i)$ трансверсально в каждой неприводимой компоненте W_2 многообразия $W(L'_{\sigma+1},\dots,L'_i)$, $\sigma+1 \leqslant i \leqslant \alpha$. Применяя сформулированный вариант первой теоремы Бертини $\alpha-\sigma$ раз, можно показать, что множество $\mathcal{U}_\alpha$, $\sigma+1 \leqslant \alpha \leqslant n-1$, является непустым. По лемме 24 (см. приложение) множество $\mathcal{U}_\alpha$ является непустым открытым относительно топологии Зариского подмножеством в $\mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k})$ при условии, что расширение полей $k(W) \supset k(W')$ сепарабельно.

Обозначим через $\mathcal{U}_n$ (*соответственно* $\mathcal{U}_0$) *подмножество всех*

$$(L'_{\sigma+1},\dots,L'_n) \in \mathcal{U}'''_n$$

(*соответственно* $L' \in \mathcal{U}'''_0$), *таких, что* $(L'_{\sigma+1},\dots,L'_{n-1}) \in \mathcal{U}_{n-1}$.

Замечание 3. Напомним, что замечание 2 работы [11], относящееся к расширениям основных полей, справедливо для всех $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$. Аналогичное замечание верно теперь для всех $\mathcal{U}_\alpha$ и $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_\alpha$, определённых ниже.

Теперь пусть $\lambda = (L_{s+1},\dots,L_\sigma)$ и

$$L_j = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} l_{j,i}X_i \in \overline{k}[X_0,\dots,X_n], \quad s+1 \leqslant j \leqslant \sigma.$$

Обозначим через $\widetilde{\lambda}$ семейство коэффициентов $l_{j,i}$, $s+1 \leqslant i \leqslant \sigma$, $0 \leqslant i \leqslant n$, линейных форм L_j. Если не оговорено противное, в дальнейшем мы

будем предполагать (другие предположения см. в начале раздела 1), что для λ выполняются следующие свойства.

(C) Все коэффициенты $l_{j,i}$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, $0 \leqslant i \leqslant n$, лежат в k. Размерность пересечения $W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \ldots, L_\sigma)$ равна $n-\sigma > 0$; последнее пересечение трансверсально. Алгебраическое многообразие $W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \ldots, L_\sigma)$ является неприводимым над k. Положим $W_\lambda = W \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \ldots, L_\sigma)$, $V_\lambda = V \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \ldots, L_\sigma)$. Алгебраическое многообразие W_λ не содержится в $\overline{V_\lambda \setminus W_\lambda}$.

Напомним, что если справедливо условие (A) из [11], то также выполняется условие (C). Обозначим через

$$p_\lambda \,:\, W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r) \to \mathbb{P}^r(\overline{k}), \tag{5}$$

$$p'_\lambda \,:\, W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r) \to W' \tag{6}$$

морфизмы, индуцированные морфизмами p и p'. Предположим, что морфизм p'_λ является доминантным. Заменим (V, W, p, p') на

$$(V_\lambda, W_\lambda, p_\lambda, p'_\lambda)$$

в определениях всех $W_i(L')$, $W(L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)$, $\mathcal{U}'_\alpha$, $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$ и т.д. Мы будем обозначать полученные объекты через $W_{\lambda,i}(L')$, $W_\lambda(L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n)$, $\mathcal{U}'_{\lambda,\alpha}$, $\mathcal{U}''_{\lambda,\alpha}$, $\mathcal{U}'''_{\lambda,\alpha}$ и т.д. Заметим, что $k(v_\lambda) = k$, поскольку $s_\lambda = \sigma_\lambda = \sigma$. Для нас будет удобно рассматривать морфизм p'_λ вместе с p'_v, см. теорему 2 ниже. Определим V_v, W_v и т.д., расширяя основное поле k до k_v.

Рассмотрим базис над k линейного пространства всех однородных многочленов степени d', состоящий из всех различных мономов $X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}$, $i_0 + \ldots + i_n = d'$, $i_0, \ldots, i_n \geqslant 0$. Обозначим через I множество всех мультииндексов $(i_0, \ldots, i_n)$. Таким образом,

$$\#I = \binom{n+d'}{n}.$$

Пусть $\widetilde{e}_{n+1}$ – общий однородный многочлен степени d' от $X_0, \ldots, X_n$, т.е. семейство $c = \{c_i\}_{i \in I}$ его коэффициентов в рассматриваемом базисе имеет степень трансцендентности $\binom{n+d'}{n}$ над K_v. Положим $K' = K(v, c) \supset k_v(c, u) = k(c, v, u)$.

Пусть e'_{n+1} – однородный многочлен с коэффициентами из k. Обозначим через $c' = \{c'_i\}_{i \in I}$ семейство коэффициентов многочлена e'_{n+1} в рассматриваемом базисе.

Пусть λ – такое, как выше, и $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$ (если не оговорено противное, мы будем предполагать, что эти условия выполняются, когда мы рассматриваем морфизмы (7)–(11); но иногда предположения будут другими). Определим морфизмы

$$p_{\lambda,L'} : W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_n) \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k}), \tag{7}$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_{\sigma+1} : \ldots : e'_n);$$
$$p_{c',\lambda} : W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r, e'_{n+1}) \to \mathbb{P}^{r+1}(\overline{k}), \tag{8}$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e_0 : \ldots : e_r : e'_{n+1});$$
$$p_{c',\lambda,L'} : W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \ldots, e'_{n+1}) \to \mathbb{P}^{n-\sigma+1}(\overline{k}), \tag{9}$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_{\sigma+1} : \ldots : e'_{n+1});$$
$$p_{\lambda,L',*} : W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_n) \to \mathbb{P}^1(\overline{k}), \tag{10}$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_n);$$
$$p_{c',\lambda,L',*} : W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_n, e'_{n+1}) \to \mathbb{P}^2(\overline{k}), \tag{11}$$
$$(X_0 : \ldots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_n : e'_{n+1}).$$

Положим

$$W'(c', \lambda) = \overline{p_{c',\lambda}(W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e_0, \ldots, e_r, e'_{n+1}))} \subset \mathbb{P}^{r+1}(\overline{k}), \tag{12}$$
$$W'(c', \lambda, L') = \overline{p_{c',\lambda,L'}(W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1} \ldots, e'_{n+1}))} \subset \mathbb{P}^{n-\sigma+1}(\overline{k}), \tag{13}$$
$$W'(c', \lambda, L', *) = \overline{p_{c',\lambda,L',*}(W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_n, e'_{n+1}))}. \tag{14}$$

Тогда $W'(c', \lambda, L', *) \subset \mathbb{P}^2(\overline{k})$. Поскольку $L' \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$, морфизм $p_{\lambda,L'}$ является доминантным. Если морфизм $p_{\lambda,L'}$ доминантный и $\dim W_\lambda = n-\sigma$ (без каких-либо дополнительных предположений на $\lambda \in \mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{k})$ и $L' \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$), то $\dim W'(c', \lambda, L') = \dim W'(c', \lambda) = n-\sigma$. Согласно [12], если утверждения (c) и (d) теоремы 1 из [12] выполняются для λ и L', то размерность всякой неприводимой компоненты многообразия $W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_n, e'_{n+1})$ равна 1 и морфизм $p_{\lambda,L',*}$ является доминантным. Если морфизм $p_{\lambda,L',*}$ доминантный и $\dim W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_n, e'_{n+1}) = 1$ (без каких-либо дополнительных предположений на $\lambda \in \mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{k})$ и $L' \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$), то $\dim W'(c', \lambda, L', *) = \dim W'(c', \lambda, *) = 1$.

Для произвольного многочлена ψ мы будем обозначать через ψ_0 его бесквадратную часть, т.е. сепарабельный (не имеющий кратных

множителей) многочлен максимальной степени, делящий ψ. Этот многочлен ψ_0 определён с точностью до множителя из k; мы выбираем и фиксируем его. Теперь пусть $\psi \in \overline{k}[a', Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_{n+1}]$, где a' – некоторые переменные (или переменные и семейства переменных). Тогда мы полагаем

$$\psi_* = \psi(a', Z_0, 0, \dots, 0, Z_n, Z_{n+1}) \in \overline{k}[a', Z_0, Z_n, Z_{n+1}].$$

Если $\psi \in \overline{k}[a', Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_n]$, то мы будем предполагать, что $\psi_* \in \overline{k}[a', Z_0, Z_n]$.

Пусть c', $\lambda = (L_{s+1}, \dots, L_\sigma)$, $L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}'_{\lambda,0}$ – такие же, как и выше. Напомним, что мы считаем, что $L_j \in k[X_0, \dots, X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$; $L'_w \in \overline{k}[X_0, \dots, X_r]$, $\sigma+1 \leqslant w \leqslant n$. Обозначим через $A_{\lambda,L'}$ множество изолированных точек пересечения

$$(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(L_{s+1}, \dots, L_\sigma) \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n). \tag{15}$$

Тогда $\#A_{\lambda,L'} = \deg p'_\lambda \deg W' \leqslant \deg p'_v \deg W'$, см. [11, 12].

Обозначим через $\Phi \in \overline{k}[Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_{n+1}]$ *сепарабельный многочлен минимальной степени относительно всех переменных, такой, что* $\Phi(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_{n+1})$ *обращается в нуль тождественно на* W_λ. Мы выбираем и фиксируем Φ (он определён однозначно с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}$ даже при более ограничительных предположениях, именно, что морфизм $p_{\lambda,L'}$ доминантный, $\dim W_\lambda = n-\sigma$, $\lambda \in \mathbb{A}^{(\sigma-s)(n+1)}(\overline{k})$ и $L' \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$). *Обозначим через*

$$R = \mathrm{Res}_{Z_{n+1}}(\Phi, \partial\Phi/\partial Z_{n+1}) \in \overline{k}[Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_n]$$

дискриминант многочлена Φ *относительно* Z_{n+1} (это определение дискриминанта как результанта многочлена и его частной производной отличается от общепринятого на множитель $\mathrm{lc}_{Z_{n+1}}\Phi$, но оно более удобно для нас). *Обозначим через* $R_0 \in \overline{k}[Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_n]$ *бесквадратную часть многочлена* R. Если все линейные формы L'_j, $\sigma+1 \leqslant j \leqslant n$, имеют коэффициенты из k, то мы выбираем Φ равным многочлену с коэффициентами из k. Следовательно, R, R_0 также имеют коэффициенты из k в рассматриваемом случае. Будем писать также $\Phi = \Phi_{c',\lambda,L'}$, $R = R_{c',\lambda,L'}$, $R_0 = R_{c',\lambda,L',0}$, когда зависимость от e'_{n+1}, λ, L' важна. Очевидно, что $W'(c', \lambda, L') = \mathcal{Z}(\Phi_{c',\lambda,L'}(X_0, \dots, X_{n-\sigma+1}))$,

$$\deg_{Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L'} = \deg W'(c', \lambda, L')$$

и $\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L'} = \deg r_{c',\lambda,L'}$, см. (23) ниже. *Следовательно, если* $L'_j \in k[X_0, \dots, X_r]$ *для всех* $j \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, *то можно вычислить*

$\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L'}$ *и* $\deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L'}$ *при помощи теоремы* 1 *из* [10]. Мы имеем

$$W'(c',\lambda) \cap \mathcal{Z}(U_0, U_{\sigma+1}, \dots, U_n, X_{n+1}) = \varnothing$$

в $\mathbb{P}^{n-\sigma+1}(\overline{k_u})$. Поэтому $\deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda} = \deg W'(c',\lambda)$. Если выполняются условия 1), 2) и 3) из определения 1 ниже, то по лемме 2 многочлены $\Phi_{c,\lambda,L',*}$, $R_{c,\lambda,L',*}$ и $R_{c,\lambda,L',*,0}$ являются ненулевыми. Положим

$$a(c',\lambda,L') = \deg_{Z_0,Z_n} R_{c',\lambda,L',*,0}, \quad b(c',\lambda,L') = \deg_{Z_0,Z_n} R_{c',\lambda,L',0,*}.$$

Очевидно, $a(c',\lambda,L') \leqslant b(c',\lambda,L')$. В теореме 3 раздела 4 рассматривается случай, когда это неравенство становится равенством, $d' = 1$ и справедливо условие 4), см. ниже.

Определение 1. *Мы будем говорить, что* (c',λ,L') *удовлетворяет свойству* (*) (*или свойство* (*) *выполняется для* (c',λ,L')), *в том и только в том случае, если выполняются следующие условия.*

1) *Все линейные формы* L_j *лежат в* $k[X_0,\dots,X_n]$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$; $L'_w \in \overline{k}[X_0,\dots,X_r]$, $w \in \{0,\sigma+1,\dots,n\}$.
2) *Далее,* L' *и* λ *удовлетворяют утверждениям* (c) *и* (d) *теоремы* 1 *из* [12] (*сейчас мы не предполагаем, что* L_j *и* L'_j *имеют целые коэффициенты, как в утверждениях* (a) *и* (b) *этой теоремы*). *Другими словами,* λ *удовлетворяет условию* (A) *из* [11]; *морфизм* p'_λ *доминантный*; $\deg p'_\lambda = \deg p'_v$; $D_{\lambda,i} = D_i$, $D^{(1)}_{\lambda,i} = D^{(1)}_i$, $D^{(2)}_{\lambda,i} = D^{(2)}_i$ *при* $\sigma \leqslant i \leqslant n$; *и* $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda,0} \subset \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$.
3) *Многочлен* $e'_{n+1} \in k[X_0,\dots,X_n]$ *является однородным многочленом степени* d', *и*

$$\#(e'_{n+1}/e'_0)(W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\dots,e'_n) \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) = \deg p'_v \deg W'. \quad (16)$$

4) *Наконец, многочлен* $\Phi_{c',\lambda,L',*}$ *не имеет неприводимых множителей из* $\overline{k}[Z_0,Z_n]$, *т.е. для всякого неприводимого множителя* Ψ *многочлена* $\Phi_{c',\lambda,L',*}$ *имеем* $\deg_{Z_{n+1}} \Psi \geqslant 1$.

Пусть $c_0,\lambda_0,L^{(0)}$ *аналогичны* c',λ,L'. *Мы будем говорить, что элемент* $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$ *удовлетворяет свойству* (∗) (*соответственно* 1), 2), 3), 4)), *тогда и только тогда, когда этот элемент удовлетворяет* (∗) (*соответственно* 1), 2), 3), 4)), *вместо* (c',λ,L'). *Расширим основное поле* k *до* k_u. *Мы будем говорить, что* (c',λ) *удовлетворяет*

свойству $(*)$ (*соответственно* 1), 2), 3), 4)) *тогда и только тогда, когда* (c', λ, U) *удовлетворяет* (*) (*соответственно* 1), 2), 3), 4)).

Согласно лемме 10, элемент (c', λ) удовлетворяет свойству $(*)$ в том и только в том случае, если (c', λ, U) удовлетворяет условиям 1)–3) из $(*)$ (для основного поля k_u).

Замечание 4. Можно модифицировать свойство 2), заменив (d) на условие $L' \in \mathcal{U}_0'$, и предложить новые версии формулируемых ниже результатов. Тогда условие (iv) (см. выше) не обязательно выполняется. Можно также ослабить условие (c). Читатель может предложить и другие такие модификации.

При условиях 1), 2) и 3) число элементов

$$\#(e'_{n+1}/e'_0)(W_\lambda \cap \mathcal{Z}(e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n))$$

является максимально возможным (когда оно конечно, см. [11, 12]) и $\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L'} = \deg p'_v \deg W'$. Согласно утверждению (e) теоремы 1 работы [12], из (c) и (d) следует, что $L' \in \mathcal{U}_0'''$. Если условия 1), 2) и 3) выполняются, то $\deg_{Z_{n+1}} \Phi = \deg p'_v \deg W'$. Ниже мы увидим, как построить по крайней мере один элемент (c', λ, L'), удовлетворяющий свойству $(*)$.

Напомним, что при условиях 1), 2) и 3) многочлен $\Phi_{c',\lambda,L',*}$ ненулевой. Тогда

$$\deg_{Z_0,Z_n,Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L',*} = \deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}} \Phi_{c',\lambda,L'} = \deg W'(c', \lambda, L').$$

Предположим, что выполняются свойства 1), 2) *и* 3). *Тогда по лемме* 3 *свойство* 4) *выполняется для* (c', λ, L') *в том и только в том случае, если* $\deg W'(c', \lambda, L') = \deg W'(c', \lambda, L', *)$.

Замечание 5. Предположим, что элемент (c', λ, L') удовлетворяет условию 1) и, более того, все линейные формы L'_j имеют коэффициенты из k. Тогда можно выяснить, верно ли, что (c', λ, L') удовлетворяет $(*)$, используя алгоритмы из [10–13]. Оценка времени работы здесь аналогична оценке на время работы алгоритмов из теоремы 1 статьи [10] и теоремы 1 статьи [12]. Более точно, при выполнении условий 1) и 2), чтобы выяснить, верно ли, что (c', λ, L') удовлетворяет свойству 4), достаточно вычислить $\deg W'(c', \lambda, L')$ и $\deg W'(c', \lambda, L', *)$ при помощи теоремы 1 из [10].

Мы будем рассматривать (c', λ, L') как точку из $\mathbb{A}^\nu(\overline{k})$, где $\nu = \binom{n+d'}{n} + (\sigma - s)(n+1) + (n - \sigma)(r+1)$. Координаты точки (c', λ, L')

суть c'_i, $i \in I$; $l_{j,i}$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, $0 \leqslant i \leqslant n$; $l'_{j,w}$, $\sigma \leqslant j \leqslant n$, $0 \leqslant w \leqslant r$. Аналогичным образом, (c', λ) является точкой из $\mathbb{A}^{\nu_1}(\overline{k})$, где $\nu_1 = \binom{n+d'}{n} + (\sigma - s)(n+1)$.

Пусть $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ (соответственно (c_1, λ_1)) – общая точка аффинного линейного подпространства $\mathcal{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$ (соответственно $\mathcal{L}_{c_1,\lambda_1}$) в $\mathbb{A}^{\nu}(\overline{k})$ (соответственно $\mathbb{A}^{\nu_1}(\overline{k})$), такая, что c_1 и λ_1 определены над k.

Более точно, общая точка (c_1, λ_1) задана следующим образом. Дана точка $(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) \in \mathcal{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$. Пусть коэффициенты $c_{0,i}$, $i \in I$; $l_{0,j,i}$, $s+1 \leqslant j \leqslant \sigma$, $0 \leqslant i \leqslant n$; $l^{(0)}_{j,i}$, $j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\}$, $0 \leqslant i \leqslant r$, для $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$ аналогичны соответствующим коэффициентам c'_i, $l_{j,i}$, $l'_{j,i}$, определённым для (c', λ, L'). Далее, предположим, что

$$c_1 = \{c_{1,i}\}_{i \in I}, \quad \lambda_1 = (L_{1,s+1}, \ldots, L_{1,\sigma}),$$

$$L_{1,j} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} l_{1,j,i} X_i, \quad s+1 \leqslant j \leqslant \sigma,$$

$$L^{(1)} = (L^{(1)}_{\sigma+1}, \ldots, L^{(1)}_n), \quad L^{(1)}_j = \sum_{0 \leqslant i \leqslant r} l^{(1)}_{j,i} X_i, \quad j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\},$$

$$c_{1,i} = c_{0,i} + \sum_{1 \leqslant w \leqslant n_1} c_{1,i,w} \tau_w, \quad i \in I, \tag{17}$$

$$l_{1,j,i} = l_{0,j,i} + \sum_{1 \leqslant w \leqslant n_1} l_{1,j,i,w} \tau_w, \quad s+1 \leqslant j \leqslant \sigma,\ 0 \leqslant i \leqslant n, \tag{18}$$

$$l^{(1)}_{j,i} = l^{(0)}_{j,i} + \sum_{1 \leqslant w \leqslant n_1} l^{(1)}_{j,i,w} \tau_w, \quad j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\},\ 0 \leqslant i \leqslant r, \tag{19}$$

где $n_1 \geqslant 0$ ограничено сверху полиномом от $(d'+1)^n$ и r; здесь $\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}$ – семейство алгебраически независимых элементов над k; $c_{1,i,w} \in k$, $l_{1,j,i,w} \in k$, $l^{(1)}_{j,i,w} \in \overline{k}$. Точка (c_1, λ_1) задана аналогичным образом, следует только удалить (19). Положим

$$e_{j,n+1} = \sum_{i=(i_0,\ldots,i_n) \in I} c_{j,i} X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n}, \quad j = 0, 1. \tag{20}$$

Мы не предполагаем, что n_1 минимально возможное, но при необходимости всегда можно построить, решая линейную систему, новые представления (17)–(19), задающие общую точку того же самого линейного пространства и такие, что n_1 минимально возможное. В этом случае $n_1 \leqslant \nu$ (соответственно $n_1 \leqslant \nu_1$).

Если $(0,\dots,0)\in\mathcal{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$ (соответственно $\mathcal{L}_{c_1,\lambda_1}$), то в (17)–(19) мы будем иногда опускать $c_{0,i}$, $l'_{j,i}$, $l^{(0)}_{j,i}$, но помнить, что они существуют.

Расширим поле k до $k(\tau_1,\dots,\tau_{n_1})$. Мы будем говорить, что точка $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$ (соответственно (c_1,λ_1)) удовлетворяет свойству $(*)$ (или это свойство справедливо для $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$), тогда и только тогда, когда $(*)$ выполняется для $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$ (соответственно (c_1,λ_1)) и поля $k(\tau_1,\dots,\tau_{n_1})$ вместо (c',λ,L') (соответственно (c',λ)) и k. *Рассмотрим следующее свойство элемента* $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$*:*

5) $\deg W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)})=\deg W'(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$.

Мы будем говорить, что точка $(c_4,\lambda_4,L^{(4)})$ *(которая аналогична* $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$*) удовлетворяет свойству* 5) *для* $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$*, тогда и только тогда, когда это свойство выполняется с* $(c_4,\lambda_4,L^{(4)})$ *вместо* $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$. Мы будем опускать “для $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$”, когда это не ведёт к двусмысленности.

Предположим, что $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$ удовлетворяет условиям 1) и 2) из $(*)$. Пусть $\overline{\lambda_0}=(L_{0,0},\dots,L_{0,n+1})$, см. условие (A) из введения работы [11]. Положим $\overline{\lambda_1}=(L_{0,0},\dots,L_{0,s},L_{1,s+1},\ \dots,\ L_{1,\sigma},L_{0,\sigma+1},\dots,L_{0,n+1})$. Тогда условие (A) из [11] справедливо для λ_1; подробности см. в [11, раздел 1]. Предположим, что $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$ удовлетворяет $(*)$ и 5). Тогда по лемме 9 имеем $L^{(1)}\in\mathcal{U}_0'''$, и $(*)$ выполняется для $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$. Мы всегда будем выбирать многочлен $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$ сепарабельным многочленом из кольца $\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,\ Z_{n+1}]$ минимальной степени относительно всех переменных. Если все коэффициенты $l^{(1)}_{j,i,w}$ лежат в k, то мы выбираем $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$ равным многочлену с коэффициентами из k. Имеем $R_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}},R_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},0}\in\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_n]$; $R_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}$, $R_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},0,*}$, $R_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*,0}\in\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},Z_0,Z_n]$.

Можно рассмотреть частный случай, когда некоторые из τ_j совпадают с элементами из семейств c, υ, u. Более точно, предположим, что один (или более) элемент из $c_1,\lambda_1,L^{(1)}$ совпадает с c,υ,u соответственно. Тогда удобно слегка изменить обозначения. Пусть, например, $c_1=c$, $\lambda_1=\upsilon$ (другие семь случаев рассматриваются аналогичным образом). Тогда мы заменяем в (17)–(19) семейство $\tau_1,\dots,\tau_{n_1}$ на объединение трёх семейств $\tau_1,\dots,\tau_{n_1}$, $\{c_i\}_{i\in I}$, υ и предполагаем, что все $n_1+\binom{n+d'}{n}+(\sigma-s)(n+1)$ элементов этих семейств являются алгебраически независимыми над полем k. Далее, в этом случае мы считаем,

что для точки типа $(c, v, L^{(1)})$ коэффициенты при всех c_i в (18), (19) равны нулю и коэффициенты при всех $v_{j,i}$ в (17), (19) также равны нулю.

В других примерах, если мы рассматриваем точки типа $(c_1, v, L^{(1)})$ (соответственно (c_1, v)), то мы считаем, что все коэффициенты при $v_{j,i}$ в (17), (19) равны нулю. Аналогично для точки (c_1, v, U) (соответственно (c_1, λ_1, U)) все коэффициенты при $v_{j,i}$ и u_{j_1,i_1} (соответственно при u_{j_1,i_1}) в (17) (соответственно (17), (18)) равны нулю.

В частности, мы можем рассмотреть один из семи случаев (c', v, L'), (c, λ, U), (c', v, U), (c, λ, L'), (c, v, L'), (c, λ, U), (c, v, U) в качестве $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$. Положим $\Phi_{c,v,U} = F$, $R_{c,v,U} = \Delta$, $b(c, v, U) = b$; $a(c, v, U) = a$, $R_{c,v,U,0} = \Delta_0$. В других случаях для удобства мы иногда опускаем в обозначениях общие точки элементов c, v, U. Например, $R_{c_1,\lambda_1,U} = R_{c_1,\lambda_1}$, $\Phi_{c_1,v,L'} = \Phi_{c_1,L'}$, $\Phi_{c,v,L'} = \Phi_{L'}$, $R_{c,\lambda,U} = R_\lambda$, $b(c, \lambda_1, U) = b(\lambda_1)$, $W'(c, \lambda_1) = W'(\lambda_1)$ и т.д. (в случае (c, v, U) эта операция может привести к двусмысленности, поэтому мы ввели новые обозначения).

Очевидно, для (c, v, U) выполняется свойство $(*)$. Для (c, λ, L') можно опустить условие 3) в $(*)$ (и получить эквивалентное свойство). *Рассмотрим следующее свойство элемента* $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$.

$(**)$ *Все* $l^{(0)}_{j,i}$ *и* $l^{(1)}_{j,i,w}$ *из* (19) *являются элементами из* k. *Далее, задана точка* $(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \mathcal{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$, *такая, что* $L^{(3)}$ *и* λ_3 *удовлетворяют условиям* 1) *и* 2) *из* $(*)$ (*вместо* L' *и* λ) *и все коэффициенты* $l^{(3)}_{j,i}$, *соответствующие* $L^{(3)}$, *являются элементами из* k.

В разделе 3 мы построим *алгоритм, выясняющий, верно ли, что свойство* $(*)$ *выполняется для элемента* $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$, *удовлетворяющего условию* $(**)$. *Если условие* $(*)$ *справедливо для* $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$, *то на выходе этого разрешающего алгоритма мы имеем точку* $(c_4, \lambda_4, L^{(4)}) \in \mathcal{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$, *такую, что* $(*)$ *выполняется для* $(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$,

$$\deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)}) = \deg W'(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$$

и все коэффициенты $c_{4,i}$, $l_{4,j,i}$, $l^{(4)}_{j,i}$, *соответствующие* $(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$, *получаются из* (17)–(19) *подстановкой* τ'_i *вместо* τ_i, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, *где все* τ'_i – *целые числа с длинами записи* $O(n \log d + (n - \sigma) \log d')$. *Время работы этого алгоритма – то же, что и в утверждении* (e) *теоремы* 2.

Предположим, что при помощи этого алгоритма мы построили точку $(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$. Тогда, заменяя в (17)–(19) точку $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$ на $(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$, мы можем предполагать без ограничения общности, что $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$ удовлетворяет условиям $(*)$ и 5). В дальнейшем, если не оговорено противное, мы будем считать, что если свойство $(*)$ выполняется для $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$, то $(*)$ и 5) справедливы для $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$.

Фактически нам потребуется этот разрешающий алгоритм только в частных случаях, таких, как, например, $(c_1, \lambda_1, L^{(1)}) = (c, v, L')$. В последнем случае всегда можно построить требуемый элемент $(c_3, \lambda_3, L^{(3)})$, используя результаты работ [11–13].

Можно применить этот разрешающий алгоритм в частном случае $(c_1, \lambda_1, L^{(1)}) = (c', \lambda, U)$. Здесь также можно построить элемент

$$(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) = (c', \lambda, L^{(3)}),$$

используя результаты работ [11–13]. *Следовательно, можно выяснить, верно ли, что (c', λ) удовлетворяет условию $(*)$.*

Отметим также, что, расширяя поле k до $k^{(1)}$ (где степень $[k^{(1)} : k]$ конечна), можно обобщить свойство $(**)$ и этот разрешающий алгоритм на случай, когда $l^{(0)}_{j,i}, l^{(1)}_{j,i,w}, l^{(3)}_{j,i}, l^{(4)}_{j,i} \in k^{(1)}$.

Разрешающий алгоритм без известной точки $(c_3, \lambda_3, L^{(3)})$ (если его вообще можно построить) требует пересмотра результатов из [10–13].

Согласно лемме 10, многочлен $R_{c_1,\lambda_1,0,*}$ есть ненулевой сепарабельный многочлен, и $a(c_1, \lambda_1) = b(c_1, \lambda_1)$. В частности, многочлен $\Delta_{0,*}$ ненулевой, не имеет кратных множителей относительно каких-либо переменных, и $a = b$.

Определение открытого множества $\mathcal{U}$ (и, более общим образом, $\mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$) является экзистенциональным. До сих пор не было простого описания какого-либо открытого подмножества множества $\mathcal{U}$. Теперь мы собираемся явно определить непустое определённое над k открытое в топологии Зариского подмножество $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})} \subset \mathcal{U}$ (и, более общим образом, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_\alpha \subset \mathcal{U}_\alpha$, $\alpha \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$) в случае нулевой характеристики. Это подмножество имеет простую структуру. Фактически мы определим ещё и другие открытые в топологии Зариского подмножества в $\mathcal{U}$.

Определение 2. *Пусть элемент (c_1, λ_1) – такой же, как и выше, и удовлетворяет условию $(*)$. Тогда $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$ – множество всех $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}(\overline{k}) = \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0} \cap \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$ (напомним, что $\mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}$ определено*

для основного поля $k(\tau_1, \ldots, \tau_{n_1})$, *см. выше и* [11–13]; *а также, что если* $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}$, *то* $L' \in \mathcal{U}'''_0$), *таких, что*

(i) (c_1, λ_1, L') *удовлетворяет свойству* $(*)$,
(ii) $\deg W'(c_1, \lambda_1) = \deg_{Z_0, Z_{\sigma+1}, \ldots, Z_n} \Phi_{c_1,\lambda_1,L'}$,
(iii) $b(c_1, \lambda_1) = a(c_1, \lambda_1, L')$.

Для всякого α, *такого, что* $\sigma + 1 \leqslant \alpha \leqslant n$, *обозначим через* $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,\alpha}$ *образ множества* $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$ *при линейной проекции*

$$\pi_{0,\alpha} \,:\, \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{(r+1)(\alpha-\sigma)}(\overline{k}),$$

$L' \mapsto (L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_\alpha)$. *Положим* $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1}$ *равным* $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,\sigma+1}$.

Замечание 6. Очевидно, $\pi_{0,\alpha}(\mathcal{U}''_0) \subset \mathcal{U}''_\alpha$, $\pi_{0,\alpha}(\mathcal{U}'''_0) \subset \mathcal{U}'''_\alpha$, $\pi_{0,\alpha}(\mathcal{U}_0) \subset \mathcal{U}_\alpha$ для всех α, но мы не определяем $\mathcal{U}''_\alpha$, $\mathcal{U}'''_\alpha$ и $\mathcal{U}_\alpha$ просто как проекции множеств $\mathcal{U}''_0$, $\mathcal{U}'''_0$ и $\mathcal{U}_0$; наши определения являются более тонкими. В случае $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,\alpha}$ можно дать аналогичные более тонкие определения отдельно для всякого α (это потребовало бы сформулировать выше ещё и другие определения). Таким образом можно получить объекты, которые могут быть отличными от $\pi_{0,\alpha}(\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0})$. Но здесь, чтобы упростить изложение, мы ограничились данными выше определениями.

Определение 2 особенно просто для частного случая $(c_1, \lambda_1) = (c, v)$. В этом случае можно заменить $\mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}$ на $\mathcal{U}'''_0$ и опустить (i).

По лемме 11 множество $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$ непусто и открыто в топологии Зариского в $\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$. Далее (см. доказательство той же леммы), $L' \in \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$ в том и только в том случае, если $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}(\overline{k})$, многочлены $\Phi_{c_1,\lambda_1,L'}$ и $\Phi_{c_1,\lambda_1}|_{u=l'}$ совпадают с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}[\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}]$, многочлен $\Phi_{c_1,\lambda_1,*}|_{u=l'}$ является ненулевым и не имеет неприводимых множителей из $\overline{k}[\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}, Z_0, Z_n]$ и $R_{c_1,\lambda_1,L',*,0}$ совпадает с $R_{c_1,\lambda_1,0,*}|_{u=l'}$ с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}[\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}]$.

Замечание 7. Пусть условие (i) выполнено и $L'_j \in k[X_0, \ldots, X_r]$ для всех $j \in \{0, \sigma+1, \ldots, n\}$. Тогда, используя теорему 2, можно выяснить, верно ли, что справедливо условие (ii) (соответственно (iii)), см. ниже.

Для удобства мы иногда опускаем общие элементы c, v в обозначениях, ср. выше. Например, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c,\lambda,0} = \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{\lambda,0}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})} = \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c,v}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{\alpha} = \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c,v,\alpha}$ для $\alpha \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. Мы получаем четыре непустых множества $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c',\lambda,0}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c',0}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{\lambda,0}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{0}$.

Пусть $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ и n_1 – такие же, как и выше, и $(c_2, \lambda_2, L^{(2)})$ и n_2 аналогичны $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ и n_1. *Положим* $(c_2, \lambda_2, L^{(2)}) \leqslant (c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ *тогда и только тогда, когда* $\mathcal{L}_{c_2,\lambda_2,L^{(2)}} \subset \mathcal{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$. Например,

$$(c_1, \lambda_1, L^{(1)}) \leqslant (c, v, U)$$

для всякого $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$. Если $(c_2, \lambda_2, L^{(2)}) \leqslant (c_1, \lambda_1, L^{(1)})$, то для удобства обозначений в дальнейшем мы будем предполагать без ограничения общности, что семейство $\tau_1, \dots, \tau_{n_2}$, определённое для $(c_2, \lambda_2, L^{(2)})$, является частью семейства $\tau_1, \dots, \tau_{n_1}$, определённого для $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$, и представления (17)–(19) для $(c_2, \lambda_2, L^{(2)})$ получаются из (17)–(19) для $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ подстановкой $\tau'_{n_2+1}, \dots, \tau'_{n_1} \in k$ вместо $\tau_{n_2+1}, \dots, \tau_{n_1}$. Так что мы не предполагаем, что элемент $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$ является одним и тем же для $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ и $(c_2, \lambda_2, L^{(2)})$. Аналогичным образом мы определяем отношение $(c_1, \lambda_1) \leqslant (c_2, \lambda_2)$ (с аналогичными предположениями на семейства $\tau_1, \dots, \tau_{n_i}$, $i = 1, 2$); следует только опустить везде $L^{(1)}$, $L^{(2)}$ и (19).

Теорема 1. *Пусть λ, L' и однородный многочлен e'_{n+1} степени d' с соответствующим семейством коэффициентов c' – такие же, как и выше, и (c', λ) удовлетворяет свойству $(*)$. Пусть элементы*

$$(c_2, \lambda_2, L^{(2)}) \leqslant (c_1, \lambda_1, L^{(1)})$$

(соответственно $(c_2, \lambda_2) \leqslant (c_1, \lambda_1)$) – такие же, как и выше, и оба этих элемента удовлетворяют условию $(*)$. Тогда справедливы следующие утверждения.

(a) *Множества $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c',\lambda,0}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c',0}$, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{\lambda,0}$ и $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{0}$ являются непустыми открытыми в топологии Зариского подмножествами в $\mathcal{U}_0$. Более общо, множества $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,\alpha}$, определённые выше, являются непустыми открытыми в топологии Зариского подмножествами в $\mathcal{U}_\alpha$ для всех $\alpha \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$. В частности, $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})} \subset \mathcal{U}$.*

(b) *Для всякого (c_1, λ_1) для произвольного элемента $L' \in \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$ существует пара (c', λ), такая, что (c', λ) удовлетворяет*

условию $(*)$, $(c',\lambda) \leqslant (c_1,\lambda_1)$,

$$\deg W'(c',\lambda,L') = \deg W'(c',\lambda) = \deg W'(c_1,\lambda_1),$$

$$a(c',\lambda,L') = b(c',\lambda) = b(c_1,\lambda_1)$$

и, следовательно, $L' \in \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c',\lambda,0} \subset \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$.

(c) *Кроме того, в утверждении* (b) *пара* (c',λ) *всегда может быть получена из* (c_1,λ_1) *подстановкой в* (17), (18) *значений* τ'_i *вместо* τ_i, $1 \leqslant i \leqslant n_1$, *где* τ'_i *– целые числа с длинами записи* $O(n\log d + (n-\sigma)\log d')$. *В частности, если* $c_1 = c$ *(соответственно* $\lambda_1 = v$*), то* c' *является семейством целых чисел с длинами записи* $O(n\log d + (n-\sigma)\log d')$ *(соответственно все линейные формы* L_j, $s \leqslant j \leqslant \sigma$, *имеют целые коэффициенты с длиной записи* $O(n\log d + (n-\sigma)\log d')$*).*

(d) *В обозначениях из п.* (c) *пусть* $\mathfrak{l} \subset \mathbb{A}^{\nu_1}(\overline{k})$, *где* $\nu_1 = \binom{n+d'}{n} + (\sigma - s)(n+1)$, *является прямой, определённой над* k *и такой, что* $(c',\lambda) \in \mathfrak{l} \subset \mathcal{L}_{c_1,\lambda_1}$, *где* $\mathcal{L}_{c_1,\lambda_1}$ *– аффинное линейное подпространство, соответствующее* (c_1,λ_1), *см. выше. Тогда для всех* $(c_3,\lambda_3) \in \mathfrak{l}(k)$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа, выполняется утверждение* (b) *для* (c_3,λ_3) *вместо* (c',λ).

(e) *Имеем*

$$a(c_2,\lambda_2,L^{(2)}) \leqslant a(c_1,\lambda_1,L^{(1)}),$$

$$b(c_2,\lambda_2,L^{(2)}) \leqslant b(c_1,\lambda_1,L^{(1)}),$$

$$\deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}} \Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)}} \leqslant \deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}} \Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}.$$

(f) *Имеем* $b(c_2,\lambda_2) \leqslant b(c_1,\lambda_1)$,

$$\deg W'(c_2,\lambda_2) \leqslant \deg W'(c_1,\lambda_1).$$

Если $\deg W'(c_2,\lambda_2) = \deg W'(c_1,\ \lambda_1)$ *и* $b(c_2,\lambda_2) = b(c_1,\lambda_1)$, *то* $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_2,\lambda_2,0} \subset \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$.

(g) *Для любого* (c_1,λ_1) *существует элемент*

$$L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \dots, L'_n) \in \mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0},$$

такой, что все линейные формы L'_j, $j \in \{0,\sigma+1,\dots,n\}$, *имеют целые коэффициенты с длинами записи*

$$O(n\log d + (n-\sigma)\log d').$$

Теорема 2 использует в своем доказательстве теорему 3 раздела 4, которая обобщает теорему 3 из [9] на случай рациональных морфизмов. Из теоремы 3 и её следствия 1 мы немедленно получаем следующий результат.

Теорема (критерий неприводимости). *Пусть* $\Phi = \sum_{0\leqslant i\leqslant D} \Phi_i X_0^i \in k[X_0, \ldots, X_n]$, $n \geqslant 1$, *– однородный многочлен над полем нулевой характеристики и* $\Phi_i \in k[X_1, \ldots, X_n]$ *для всех* i. *Пусть* $\deg_{X_0} \Phi = D \geqslant 1$. *Предположим, что дискриминант* R *многочлена* Φ *относительно* X_0 *является ненулевым. Пусть* R_0 *– бесквадратная часть многочлена* R *(т.е.* R_0 *сепарабелен и* $\mathcal{Z}(R_0) = \mathcal{Z}(R)$*). Пусть* L *– ненулевая линейная форма от* $X_1, \ldots, X_n$ *с коэффициентами из* k *и* $A = k[X_0, \ldots, X_n]/(L)$ *(следовательно,* A *изоморфно кольцу многочленов от* n *переменных, и степень* $\deg_{X_0} a$ *определена для всякого* $a \in A$*).*

1) *Предположим, что многочлен* $R_0 \bmod L \in A$ *сепарабелен. Тогда неприводимые над* k *множители многочленов* Φ *и* $\Phi \bmod L \in A$ *степени не меньше 1 относительно* X_0 *находятся во взаимно однозначном соответствии по правилу* $\Psi \mapsto \Psi \bmod L$.
2) *Предположим дополнительно, что наибольший общий делитель* $\mathrm{GCD}\,\{\Phi_i \bmod L : 0 \leqslant i \leqslant D\}$ *равен 1 в* A. *Тогда каждый неприводимый множитель многочлена* Φ *(соответственно* $\Phi \bmod L$*) имеет степень не меньше* 1 *относительно* X_0.

Кроме того, для всякого линейного подпространства $\mathcal{L}$ *линейных форм от* $X_1, \ldots, X_n$ *с* $\dim \mathcal{L} \geqslant 3$ *существует форма* $L \in \mathcal{L}$, *удовлетворяющая всем условиям из* 1) *(соответственно из* 1) *и* 2) *всякий раз, когда* $\mathrm{GCD}\,\{\Phi_i : 0 \leqslant i \leqslant D\} = 1$ *в* $k[X_0, \ldots, X_n]$*). В частности, при выполнении условий из* 1) *и* 2), *если* Φ *является неприводимым над* k, *то* $\Phi \bmod L$ *является неприводимым над* k.

Теперь мы перейдём к точным формулировкам, необходимым для теоремы 2. Пусть даны однородные многочлены

$$f_1, \ldots, f_m \in k[X_0, \ldots, X_n], \quad m \geqslant 1.$$

Рассмотрим замкнутое алгебраическое множество или алгебраическое многообразие

$$V = \{(x_0 : \ldots : x_n) : f_i(x_0, \ldots, x_n) = 0,\ x_i \in \overline{k},\ 1 \leqslant i \leqslant m\} \subset \mathbb{P}^n(\overline{k})\,.$$

Это множество всех общих нулей многочленов $f_1, \ldots, f_m$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$. Следовательно, $V = \mathcal{Z}(f_1, \ldots, f_m)$. Пусть $e_0, \ldots, e_r \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – однородные многочлены, такие, что $\deg_{X_0,\ldots,X_n} e_j = d'$, если $e_j \neq 0$, при $0 \leqslant j \leqslant r$.

Теперь пусть $k = \mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_l, \theta)$, где $t_1, \ldots, t_l$ являются алгебраически независимыми над полем $\mathbb{Q}$, а θ – алгебраический над $\mathbb{Q}(t_1, \ldots, t_l)$ элемент с минимальным многочленом $\psi_1 \in \mathbb{Q}[t_1, \ldots, t_l, Z]$ и старший коэффициент $\mathrm{lc}_Z \psi_1$ многочлена ψ_1 равен 1. Мы будем представлять каждый многочлен $f = f_i$ (и аналогично e_j) в виде

$$f = \frac{1}{a_0} \sum_{i_0,\ldots,i_n} \sum_{0 \leqslant j < \deg_Z \psi_1} a_{i_0,\ldots,i_n,j} \theta^j X_0^{i_0} \cdots X_n^{i_n},$$

где $a_0, a_{i_0,\ldots,i_n,j} \in \mathbb{Z}[t_1, \ldots, t_l]$, $\mathrm{G\,C\,D}_{i_0,\ldots,i_n,j}(a_0, a_{i_0,\ldots,i_n,j}) = 1$. Длина записи $\mathrm{l}(a)$ целого числа a определяется формулой $\mathrm{l}(a) = \min\{s \in \mathbb{Z} : |a| < 2^{s-1}\}$. Длина записи коэффициентов $\mathrm{l}(f)$ многочлена f по определению равна максимуму длин записи коэффициентов из $\mathbb{Z}$ многочленов $a_0, a_{i_0,\ldots,i_n,j}$, и его степень равна

$$\deg_{t_\gamma}(f) = \max_{i_0,\ldots,i_n,j} \{\deg_{t_\gamma}(a_0), \deg_{t_\gamma}(a_{i_0,\ldots,i_n,j})\},$$

где $1 \leqslant \gamma \leqslant l$. Аналогичным образом мы будем определять степени и длины записи целых коэффициентов других многочленов; в частности, определены $\deg_{t_\gamma} F$ и $\mathrm{l}(F)$.

Мы будем предполагать, что выполняются следующие оценки:

$$\begin{aligned}
&\deg_{X_0,\ldots,X_n}(f_i) < d,\ \deg_{t_\gamma}(f_i) < d_2,\ \mathrm{l}(f_i) < M,\\
&\deg_{X_0,\ldots,X_n}(e_j) = d' \text{ или } e_j = 0,\ \deg_{t_\gamma}(e_j) < d_2',\ \mathrm{l}(e_j) < M',\\
&\deg_Z(\psi_1) < d_1,\ \deg_{t_\gamma}(\psi_1) < d_1,\ \mathrm{l}(\psi_1) < M_1
\end{aligned}$$

при $1 \leqslant i \leqslant m$, $0 \leqslant j \leqslant r$, $1 \leqslant \gamma \leqslant l$. Размер $\mathrm{L}(f)$ многочлена f определяется как произведение $\mathrm{l}(f)$ на число коэффициентов из $\mathbb{Z}$ полинома f в плотном представлении. Мы имеем

$$\mathrm{L}(f_i) < \left(\binom{d+n}{n} d_1 + 1\right) d_2^l M.$$

Аналогично $\mathrm{L}(\psi_1) < d_1^{l+1} M_1$.

Замечание 8. Если не оговорено противное, в дальнейшем мы предполагаем, что l фиксировано, т.е. равно константе. Время работы алгоритма из теоремы 2 (см. ниже) по существу то же самое, что и для

решения систем полиномиальных уравнений с конечным числом решений в проективном пространстве. Так что эта теорема может быть сформулирована также и в случае, когда l не фиксировано, см. [4]. Заметим ещё, что константы в $O(\ldots)$, см. теорему 2 и леммы ниже, в оценках длин записи целых коэффициентов линейных форм L'_j, L_j являются абсолютными; они не зависят от l.

Мы будем представлять точку $z \in V$ с координатами из конечного расширения поля k следующим образом. Известен индекс i_0, где $0 \leqslant i_0 \leqslant n$, такой, что $X_{i_0}(z) \neq 0$, и задан изоморфизм полей

$$k(z) = k((X_1/X_{i_0})(z), \ldots, (X_n/X_{i_0})(z)) = k[\eta] \simeq k[Z]/(\psi_2), \qquad (21)$$

где $\eta = \sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant n} \nu_i (X_i/X_{i_0})(z)$, коэффициенты $\nu_i \in \mathbb{Z}$ заданы и $\psi_2 \in k[Z]$ является минимальным многочленом элемента η над k со старшим коэффициентом $\mathrm{lc}_Z \psi_2 = 1$ (так что точка z определена с точностью до сопряжения над k).

Пусть $g \in k[\eta]$ – произвольный элемент. Тогда $g = G(\eta)$ для однозначно определённого многочлена $G \in k[Z]$, такого, что $\deg_Z G < \deg_Z \Phi$. Длина записи целых коэффициентов $\mathrm{l}(g)$, размер $\mathrm{L}(g)$ и степени $\deg_{t_\alpha} g$, $1 \leqslant \alpha \leqslant l$, полинома g определяются формулами

$$\mathrm{l}(g) = \mathrm{l}(G), \quad \mathrm{L}(g) = \mathrm{L}(G), \quad \deg_{t_\alpha} g = \deg_{t_\alpha} G.$$

Определим размер точки z как $\mathrm{L}(\psi_2) + \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} \mathrm{L}(X_i/X_{i_0})$.

Теорема 2. *Пусть поле k нулевой характеристики, алгебраическое многообразие V, многочлены F, $f_1, \ldots, f_m$ и $e_0, \ldots, e_r$, $r \geqslant 2$, – те же самые, что и выше. Пусть задана точка $x^{(0)} \in V$ и $x^{(0)}$ принадлежит только одной неприводимой над k компоненте многообразия V. Обозначим через W эту компоненту. Пусть многообразие W' – такое же, как и выше, см.* (1). *Тогда можно вычислить размерность $\dim W'$. Предположим, что $\dim W' = n - \sigma > 1$ (так что $s \leqslant \sigma \leqslant n-2$).*

(a) *Пусть задан элемент (c_1, λ_1) согласно* (17), (18). *Предположим, что элемент (c_0, λ_0) из* (17), (18) *удовлетворяет условиям* $(*)$ *и* 5) (*и, следовательно, элемент (c_1, λ_1) также удовлетворяет условию* $(*)$ *по лемме* 9). *Тогда можно вычислить целое число $b(c_1, \lambda_1)$ и степень $\deg W'(c_1, \lambda_1)$. Далее, можно построить элемент*

$$L' = (L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n) \in \mathfrak{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1, \lambda_1, 0},$$

удовлетворяющий утверждению (b) *теоремы* 1, *т.е. такой, что все* L'_j *являются линейными формами из* $k[X_0,\dots,X_r]$ *с целыми коэффициентами с длинами записи* $O(n\log d+(n-\sigma)\log d')$.

(b) *В частности, можно построить элемент* L' *из открытого в топологии Зариского подмножества* $\mathfrak{U}_0^{(\mathrm{v})}$ *множества* $\mathfrak{U}_0$, *такой, что все* L'_j *имеют целые коэффициенты, удовлетворяющие оценкам из* (a). *Следовательно, можно вычислить линейную форму* $L'_{\sigma+1}\in\mathfrak{U}^{(\mathrm{v})}$ *с целыми коэффициентами, удовлетворяющими оценке из* (a).

(c) *В условиях п.* (a) *пусть задан элемент* $L'=(L'_0,L'_{\sigma+1},\dots,L'_n)$ *и* $L'_j\in k[X_0,\dots,X_r]$ *для всех* $j\in\{0,\sigma+1,\dots,n\}$. *Пусть элементы* (c_1,λ_1,L') *удовлетворяют условию* $(**)$, *см. выше. Тогда можно выяснить, верно ли, что* $L'\in\mathfrak{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$. *Если* $L'\in\mathfrak{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$, *то можно построить элемент* (c',λ), *такой, что выполняются утверждения* (b) *и* (c) *теоремы* 1.

(d) *Пусть задан элемент* $L'=(L'_0,L'_{\sigma+1},\dots,L'_n)$ *и* $L'_j\in k[X_0,\dots,X_r]$ *для всех* $j\in\{0,\sigma+1,\dots,n\}$. *Тогда, в частности, можно выяснить, верно ли, что* $L'\in\mathfrak{U}_0^{(\mathrm{v})}$. *Если* $L'\in\mathfrak{U}_0^{(\mathrm{v})}$, *то можно построить точку* (c',λ,L'), *такую, что* $\deg W'(c',\lambda,\ L')=\deg W'(c,v)$, $a(c',\lambda,L')=b$, *выполняется утверждение* (c) *теоремы* 1 *для* (c',λ,L') *и* $(c_1,\lambda_1)=(c,v)$.

(e) *Пусть элемент* $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$ *задан согласно* (17)–(19) *и удовлетворяет условию* $(**)$. *Тогда можно выяснить, верно ли, что* $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$ *удовлетворяет условию* $(*)$. *Если* $(*)$ *выполняется для* $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$, *то можно вычислить*

$$\deg W'(c_1,\lambda_1,L^{(1)}),\quad \deg W'(c_1,\lambda_1),\quad a(c_1,\lambda_1,L^{(1)}),\quad b(c_1,\lambda_1)$$

и построить точку $(c_4,\lambda_4,L^{(4)})\in\mathfrak{L}_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$, *удовлетворяющую условиям* $(*)$ *и* 5) *и такую, что*

$$a(c_4,\lambda_4,L^{(4)})=a(c_1,\lambda_1,L^{(1)}).$$

Наконец, $(c_4,\ \lambda_4,L^{(4)})$ *получается из* $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$ *подстановкой в* (17)–(19) *значений* τ'_i *вместо* τ_i, $1\leqslant i\leqslant n_1$, *где все* τ'_i – *целые числа с длинами записи* $O(n\log d+(n-\sigma)\log d')$.

Время работы алгоритма из (b) *полиномиально от* d^n, $(d')^n$, d_1, d_2, d'_2, M, M', M_1, m, r *и размера* $\mathrm{L}(x^{(0)})$ *точки* $x^{(0)}$. *Время работы*

алгоритма из (a) (*соответственно* (c), (d), (e)) *полиномиально от тех же самых величин и длины записи входных данных, т.е. для* (a) *это дополнительно* $\mathrm{L}(c_1)$, $\mathrm{L}(\lambda_1)$; *для* (c) – $\mathrm{L}(c_1)$, $\mathrm{L}(\lambda_1)$, $\mathrm{L}(L')$; *для* (d) – $\mathrm{L}(L')$; *и для* (e) – $\mathrm{L}(c_1)$, $\mathrm{L}(\lambda_1)$, $\mathrm{L}(L^{(1)})$.

Замечание 9. Можно также вычислить $b(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ с оценкой на время работы алгоритма из утверждения (e). Однако в настоящей статье нам это не потребуется.

Замечание 10. В дальнейшем во многих случаях, когда говорится, что $a_1, \ldots, a_\mu$ (здесь могут быть другие семейства переменных или коэффициентов некоторых многочленов; возможно, только одна переменная) являются бесконечно малыми величинами, допуская вольность речи, удобно считать, что каждая переменная $a_1, \ldots, a_\mu$ является бесконечно малой величиной или нулём. Обычно мы явно оговариваем, что $a_1, \ldots, a_\mu$ могут быть равны нулю. Однако, даже если где-то мы забыли оговорить это явным образом, читатель легко увидит всё из контекста. Это не приведёт к двусмысленности. Например, допуская вольность речи, удобнее сказать, что коэффициенты линейной формы $\widetilde{L}_0$ являются бесконечно малыми величинами, но всё же в этом случае мы обычно говорим, что все ненулевые коэффициенты линейной формы $\widetilde{L}_0$ являются бесконечно малыми величинами.

§1. Несколько лемм

В следующих семи леммах основное поле есть $\overline{K}$ и мы рассматриваем точки $(c_j, \lambda_j, L^{(j)}) \in \mathbb{A}^\nu(\overline{K})$ для целого числа j (фактически для $j = 0, 3, 4, 5$). Ниже (см. определение 3) мы формулируем свойство (D) для $(\lambda_j, L^{(j)})$. Для $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$ семейство $c_j = \{c_{j,i}\}_{i \in I}$ определяется аналогично случаю $j = 0$ (см. введение); многочлен $e_{j,n+1}$ соответствует c_j согласно (20), теперь с произвольным j (не только $j = 0, 1$); $\lambda_j = (L_{j,s+1}, \ldots, L_{j,\sigma})$, $L^{(j)} = (L^{(j)}_{\sigma+1}, \ldots, L^{(j)}_n)$, все $L_{j,i} \in \overline{K}[X_0, \ldots, X_n]$, $s + 1 \leqslant i \leqslant \sigma$, и $L^{(j)}_w \in \overline{K}[X_0, \ldots, X_r]$ – линейные формы; $e^{(j)}_w = L^{(j)}_w(e_0, \ldots, e_r)$, $w \in \{0, \sigma + 1, \ldots, n\}$, см. введение. Морфизмы $p_{\lambda_j, L^{(j)}}, p_{\lambda_j, L^{(j)}, *}$ определяются аналогично (7), (10). Многообразия $W'(c_j, \lambda_j, L^{(j)}), W'(c_j, \lambda_j, L^{(j)}, *)$ определены аналогично (13), (14). Положим $A_{\lambda_j, L^{(j)}}$ равным множеству всех изолированных точек из $\mathbb{P}^n(\overline{K})$

пересечения

$$(W \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(L_{j,s+1}, \dots, L_{j,\sigma}) \cap \mathcal{Z}(e^{(j)}_{\sigma+1}, \dots, e^{(j)}_n), \qquad (22)$$

ср. (15). Многочлен $\Phi_{c_j,\lambda_j,L^{(j)}}$ для $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$ также определён аналогично случаю $j = 0$, см. введение. Целые числа $b(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$, $a(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$ определяются аналогично случаю точки (c', λ, L') из введения. Эти определения всегда возможны для введённых объектов, соответствующих $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$, при формулируемых ниже предположениях; см. также замечания о предположениях и их вариантах во введении.

Положим $W_{\lambda_j} = W \cap \mathcal{Z}(L_{j,s+1}, \dots, L_{j,\sigma})$ в $\mathbb{P}^n(\overline{K})$, см. введение. Для всякого j, где $\sigma \leqslant j \leqslant n$, положим $\widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)})$ равным замыканию относительно топологии Зариского алгебраического многообразия

$$(W_{\lambda_j} \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e^{(j)}_{\sigma+1}, \dots, e^{(j)}_i) \quad \text{в} \quad \mathbb{P}^n(\overline{K}).$$

Определение 3. *Мы будем говорить, что* $(\lambda_j, L^{(j)})$ (*соответственно* $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$) *удовлетворяет свойству* (D), *тогда и только тогда, когда выполняются следующие условия.*

(i) *Число элементов* $N_{\lambda_j,L^{(j)}} = \#A_{\lambda_j,L^{(j)}}$ *равно* $\deg q_v \deg W'$.

(ii) $A_{\lambda_j,L^{(j)}} \cap (\mathcal{Z}(e^{(j)}_0) \cup \overline{(V \setminus W)}) = \varnothing$.

(iii) *Для всякого* i, *где* $\sigma \leqslant i \leqslant n$, *каждая неприводимая над* $\overline{K}$ *компонента многообразия* $\widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)}) \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)$ *содержит точку из* $A_{\lambda_j,L^{(j)}}$. *Следовательно, размерность* $\dim \widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)})$ *равна* $n - i$.

(iv) *Для всякого* i, *где* $\sigma \leqslant i \leqslant n$, *степень* $\deg \widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)})$ *равна* D_i, *см. введение.*

Обозначение $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$ в этом определении несущественно, в том смысле, что можно взять любую другую точку, аналогичную $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$, скажем (c_*, λ_*, L^*), и любое другое поле, аналогичное K; это будет видно из контекста. Теперь мы хотим сделать несколько наблюдений, относящихся к свойству (D), которые будут полезны в дальнейшем.

Согласно лемме 13(ii) из [13], если $\#A_{\lambda_j,L^{(j)}} = \deg p_v \deg W'$, то для всякого $x \in A_{\lambda_j,L^{(j)}}$ пересечение $n-s+1$ алгебраических многообразий $W, \mathcal{Z}(L_{j,s+1}), \dots, \mathcal{Z}(L_{j,\sigma}), \mathcal{Z}(e^{(j)}_{\sigma+1}), \dots, \mathcal{Z}(e^{(j)}_n)$ в точке x трансверсально

(в частности, x – гладкая точка этих $n-s+1$ алгебраических многообразий). Следовательно, если свойство (D) выполняется для $(\lambda_j, L^{(j)})$, то пересечение (22) совпадает с $A_{\lambda_j, L^{(j)}}$ (чтобы увидеть это, следует положить $i=n$ в (iii)).

Если выполнено условие (D), то морфизм

$$p_{\lambda_j, L^{(j)}, i} : \widetilde{W}_{\lambda_j, i}(L^{(j)}) \setminus \mathcal{Z}(e_0^{(j)}, e_{\sigma+1}^{(j)} \dots, e_n^{(j)}) \to \mathbb{P}^{n-i}(\overline{K}),$$

индуцированный морфизмом $p_{\lambda_j, L^{(j)}}$, является доминантным (напомним, что по определению это означает, что ограничение морфизма $p_{\lambda_j, L^{(j)}, i}$ на всякую компоненту многообразия

$$\widetilde{W}_{\lambda_j, i}(L^{(j)}) \setminus \mathcal{Z}(e_0^{(j)}, e_{\sigma+1}^{(j)} \dots, e_n^{(j)})$$

является доминантным) по лемме 5 из [12]. В частности, морфизмы $p_{\lambda_j, L^{(j)}}$ и $p_{\lambda_j, L^{(j)}, *}$ доминантные.

Предположим, что $\dim W_{\lambda_j} = n - \sigma$ и морфизм $p_{\lambda_j, L^{(j)}}$ доминантный (сейчас мы не предполагаем, что выполняется свойство (D)). Тогда по лемме 13(ii) из [13] имеем $\deg p_{\lambda_j, L^{(j)}} \leqslant \deg q_v \deg W'$. Далее, если для всякого i, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$, размерность $\dim \widetilde{W}_{\lambda_j, i}(L^{(j)})$ равна $n-i$ и морфизм $p_{\lambda_j, L^{(j)}, i}$ доминантный, то, очевидно (ср. также с доказательством леммы 11 из [10]), выполняются неравенства $\deg p_{\lambda_j, L^{(j)}, i} \leqslant \deg p_{\lambda_j, L^{(j)}} \leqslant \deg q_v \deg W'$. Поэтому в рассматриваемом случае, если справедливо условие (i), то по лемме 2 из [10] имеем $\deg p_{\lambda_j, L^{(j)}, i} = \deg q_v \deg W'$, и выполняется условие (iii). Рассмотрим следующее условие.

(v) *Для всякого i, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$, размерность $\dim \widetilde{W}_{\lambda_j, i}(L^{(j)})$ равна $n-i$ и морфизм $\deg p_{\lambda_j, L^{(j)}, i}$ доминантный.*

Тогда конъюнкция условий (i), (ii), (iv) и (v) эквивалентна свойству (D), т.е. если заменить в (D) условие (iii) на (v), то полученное свойство эквивалентно (D).

Пусть k' – чисто трансцендентное расширение поля k конечной степени трансцендентности, такое, что все коэффициенты всех линейных форм $L_{j,i}$, $L_w^{(j)}$ принадлежат алгебраическому замыканию поля k' (и, следовательно, W неприводимо над k'). Пусть $\mathcal{U}'_{k',0}$ (соответственно $\mathcal{U}''_{k',0}$) – множество $\mathcal{U}'_0$ (соответственно $\mathcal{U}''_0$), определённое для основного поля k', см. замечание 2 из [11] (и замечание 3). Множества $\mathcal{U}'_{k',0}$ и $\mathcal{U}''_{k',0}$ зависят только от $\overline{k'}$, см. замечание 2 из [11].

Пусть $W_i(L^{(j)})$ (см. введение) определено для основного поля k'. Очевидно, если $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$ удовлетворяет условиям (i) и (ii) из (D), то $L^{(j)} \in \mathcal{U}'_{k',0}$ (чтобы доказать это, можно предполагать без ограничения общности, что коэффициенты линейных форм из v являются бесконечно близкими к соответствующим коэффициентам линейных форм из λ_j, и применить теорему о неявной функции). Далее, если $(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$ удовлетворяет свойству (D), то $L^{(j)} \in \mathcal{U}''_{k',0}$, и по теореме Безу $\widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)}) = W_i(L^{(j)}) \cap \mathcal{Z}(L_{j,s+1}, \ldots, L_{j,\sigma})$ при $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Рассмотрим следующее условие:

(vi) $L^{(j)} \in \mathcal{U}''_{k',0}$

(справедливость этого условия не зависит от выбора k'). Тогда, предполагая, как и прежде, что коэффициенты линейных форм из v являются бесконечно близкими к соответствующим коэффициентам линейных форм из λ_j и применяя лемму 13 из [13] и теорему о неявной функции, можно доказать, что конъюнкция условий (i), (ii) и (vi) эквивалентна свойству (D).

Теперь предположим, что условие (v) выполняется для $(\lambda_j, L^{(j)})$ (мы не предполагаем, что выполнено условие (D)). Пусть k' и $W_i(L^{(j)})$ – такие же, как и выше. Обозначим через E объединение всех неприводимых над $\overline{K}$ компонент E_1 пересечения $W \cap \mathcal{Z}(e^{(j)}_{\sigma+1}, \ldots, e^{(j)}_i)$, таких, что

$$E_1 \cap \mathcal{Z}(L_{j,s+1}, \ldots, L_{j,\sigma})$$

содержит неприводимую компоненту многообразия $\widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)})$. Тогда $E \cap \mathcal{Z}(L_{j,s+1}, \ldots, L_{j,\sigma}) \supset \widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)})$. Далее, очевидно, $E \subset W_i(L^{(j)})$. Тогда $\deg W_i(L^{(j)}) \leqslant D_i$ согласно лемме 8 из [12] с основным полем k' вместо k (фактически доказательство этого неравенства не зависит от выбора основного поля; мы оставляем подробности читателю). Следовательно, по теореме Безу $\deg \widetilde{W}_{\lambda_j,i}(L^{(j)}) \leqslant D_i$.

Если λ_j (вместо λ) удовлетворяет условию (C) и $L^{(j)} \in \mathcal{U}''_{\lambda_j,0}$ (так что сейчас все линейные формы $L_{j,w}$ имеют коэффициенты из k и все линейные формы $L^{(j)}_w$ имеют коэффициенты из $\overline{k}$), то по леммам 11 и 14 из [10] пара $(\lambda_j, L^{(j)})$ удовлетворяет свойству (D).

Предположим, что все коэффициенты всех линейных форм $L_{j,\nu}$, $L^{(j)}_w$ принадлежат подполю k'' поля $\overline{K}$, такому, что $k'' \supset k$. Пусть $\lambda_* = (L_{*,s+1}, \ldots, L_{*,\sigma})$, $L^* = (L^*_0, L^*_{\sigma+1}, \ldots, L^*_n)$, где все $L_{*,\nu} \in \overline{K}[X_0, \ldots, X_n]$, $L^*_w \in \overline{K}[X_0, \ldots, X_r]$ являются линейными формами, такими, что все

ненулевые коэффициенты линейных форм $L_{j,\nu} - L_{*,\nu}$, $s+1 \leqslant \nu \leqslant \sigma$, $L_w^{(j)} - L_w^*$, $w \in \{0, \sigma+1, \dots, n\}$, – бесконечно малые величины относительно поля k'. В этом случае по теореме о неявной функции, лемме 9 из [12] и условию (2) (для L^* вместо L'), если $(\lambda_j, L^{(j)})$ удовлетворяет условию (D), то (λ_*, L^*) также удовлетворяет условиям (i), (ii) и (vi). Поэтому свойство (D) выполняется для (λ_*, L^*).

Лемма 1. *Расширим основное поле k до $\overline{K}$. Пусть $(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) \in \mathbb{A}^\nu(\overline{K})$ (так что все элементы $c_{0,i}$, коэффициенты всех линейных форм $L_{0,j}$, $L_w^{(0)}$ принадлежат полю $\overline{K}$). Предположим, что $(\lambda_0, L^{(0)})$ удовлетворяет свойству* (D). *Тогда $(\mathrm{lc}_{Z_{n+1}} \Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}})(1, 0, \dots, 0) \neq 0$. Поэтому $(\mathrm{lc}_{Z_{n+1}} \Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}})_* \neq 0$, т.е.*

$$\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*} = \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}.$$

В частности, эти утверждения справедливы для любой точки $(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) \in \mathbb{A}^\nu(\overline{k})$, удовлетворяющей условиям 1), 2) *из* $(*)$.

Доказательство. Согласно свойству (D) и нашим наблюдениям, $\dim W_{\lambda_0} = n - \sigma$, $\dim(W_{\lambda_0} \setminus \mathcal{Z}(e_0, \dots, e_r)) \cap \mathcal{Z}(e_{\sigma+1}^{(0)}, \dots, e_{n-1}^{(0)}) = 1$ и морфизмы $p_{\lambda_0,L^{(0)}}, p_{\lambda_0,L^{(0)},*}$ являются доминантными. Рассмотрим регулярные морфизмы

$$\begin{aligned} &r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}} : W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) \setminus \{(0 : \dots : 0 : 1)\} \to \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k}), && (23)\\ &(X_0 : \dots : X_{n-\sigma+1}) \mapsto (X_0 : \dots : X_{n-\sigma}); \\ &q_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}} : W_\lambda \setminus \mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \dots, e'_n) \to W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}), && (24)\\ &(X_0 : \dots : X_n) \mapsto (e'_0 : e'_{\sigma+1} : \dots : e'_{n+1}). \end{aligned}$$

Тогда $p_{\lambda_0,L^{(0)}} = r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}} \circ q_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$ и морфизмы $r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$ и $q_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$ являются доминантными. Напомним, что

$$W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) = \mathcal{Z}(\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(X_0, \dots, X_{n-\sigma+1})).$$

Число элементов $\#A_{\lambda_0,L^{(0)}} = \deg p'_v \deg W'$ – максимально возможное (когда оно конечно), см. лемму 13(i) из [13]. Поэтому согласно лемме 2 из [10] существует аффинная окрестность U' точки $z = (1 : 0 : \dots : 0) \in \mathbb{P}^{n-\sigma}(\overline{k})$, такая, что $p^{-1}_{\lambda_0,L^{(0)}}(U') \to U'$ является конечным доминантным морфизмом. Композит двух доминантных морфизмов конечен тогда и только тогда, когда они оба конечны. Следовательно, морфизм $r^{-1}_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(U') \to U'$, индуцированный морфизмом $r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$,

является конечным доминантным. Многообразие U' нормально. Известно, что в этом случае старший коэффициент $\mathrm{lc}_{Z_{n+1}}\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$ не обращается в нуль в любой точке из $r^{-1}_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(U')$. Следовательно, $(\mathrm{lc}_{Z_{n+1}}\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}})(1,0,\ldots,0)\neq 0$. Лемма доказана. □

Лемма 2. *В условиях леммы* 1 *предположим дополнительно, что* $\#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}})=\deg p'_v\deg W'$. *Тогда многочлен* $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(1,0,\ldots,0,Z_{n+1})$ *сепарабелен. Поэтому многочлен* $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}$ *сепарабелен относительно* Z_{n+1}. *Следовательно, многочлены* $R_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}$ *и* $R_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*,0}$ *являются ненулевыми. В частности, эти утверждения справедливы для любой точки* $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})\in\mathbb{A}^\nu(\overline{k})$, *удовлетворяющей условиям* 1)–3) *из* $(*)$.

Доказательство. В самом деле, многочлен $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(1,0,\ldots,0,Z_{n+1})$ ненулевой по лемме 1. Следовательно, в наших условиях многочлен $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(1,0,\ldots,0,Z_{n+1})$ сепарабелен. Лемма доказана. □

Определение 4. *Предположим, что многочлен* $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}\in\overline{K}[Z_0,Z_{\sigma+1},\ldots,Z_n]$ *определён для* $(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$, *см. введение. Предположим, что* $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}=\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}(Z_0,0,\ldots,0,Z_n,Z_{n+1})\neq 0$. *Представим этот многочлен в виде* $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}=g_1g_2$, *где* $g_1\in\overline{K}[Z_0,Z_n]$, $g_2\in\overline{K}[Z_0,Z_n,Z_{n+1}]$ *и степень* $\deg g_1$ *максимально возможная. Выберем и зафиксируем многочлен* g_2 *(он однозначно определён с точностью до ненулевого множителя из* $\overline{K}$*). Положим* $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},+}=g_2$.

Лемма 3. *В условиях леммы* 2

$$W'(c',\lambda,L',*)=\mathcal{Z}(\Phi_{c,\lambda,L,+}(X_0,X_1,X_2))$$

и многочлен $\Phi_{c,\lambda,L,+}$ *сепарабелен.*

Доказательство. Пусть

$$q_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}:W_\lambda\cap\mathcal{Z}(e'_{\sigma+1},\ldots,e'_{n-1})\setminus\mathcal{Z}(e'_0,e'_n)\to W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)},*),\tag{25}$$

$$r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}:W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)},*)\setminus\{(0:0:1)\}\to\mathbb{P}^1(\overline{k}),\tag{26}$$

– морфизмы, индуцированные морфизмами $q_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$, $r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$, см. доказательство леммы 2. По лемме 2 морфизм $p_{\lambda_0,L^{(0)},*}$ является доминантным. Поэтому морфизмы $q_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}$, $r_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}$ также являются доминантными. Очевидно,

$$W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)},*)\subset\mathcal{Z}(\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},*}(X_0,X_1,X_2)).$$

Поскольку

$$\#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}}) = \deg p'_v \deg W',$$

имеем $W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)},*) = \mathcal{Z}(\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},+}(X_0,X_1,X_2))$. Лемма доказана. □

Лемма 4. *В условиях леммы* 1 *пусть* $\mathfrak{l} \subset \mathbb{A}^\nu(\overline{K})$ *– прямая и* $y_0 = (c_0,\lambda_0,L^{(0)}) \in \mathfrak{l}$. *Пусть* $(c_4,\lambda_4,L^{(4)})$ *– общая точка прямой* $\mathfrak{l}$. *Тогда для всех* $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа,* y *удовлетворяет свойству* (D),

$$\begin{aligned}\#(e_{3,n+1}/e_0^{(3)})(A_{\lambda_3,L^{(3)}}) &= \#(e_{4,n+1}/e_0^{(4)})(A_{\lambda_4,L^{(4)}})\\ &\geqslant \#(e_{1,n+1}/e_0^{(1)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}})\end{aligned}$$

и

$$\deg W'(c_3,\lambda_3,L^{(3)}) = \deg W'(c_4,\lambda_4,L^{(4)}) \geqslant \deg W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)}).$$

Доказательство. Пусть ε – координатная функция на $\mathbb{A}^1(\overline{K})$. Пусть $(c_5,\lambda_5,L^{(5)}) \in \mathfrak{l}$ и $(c_0,\lambda_0,L^{(0)}) \neq (c_5,\lambda_5,L^{(5)})$. Имеем $e_{3,n+1} = e_{0,n+1} + \varepsilon^{(3)}e_{5,n+1}$, $L_{3,i} = L_{0,i} + \varepsilon^{(3)}L_{5,i}$, $L_w^{(3)} = L_w^{(0)} + \varepsilon^{(3)}L_w^{(5)}$, где $\varepsilon^{(3)} \in \overline{K}$ для всех i,w. Мы будем предполагать, не умаляя общности, что $e_{4,n+1} = e_{0,n+1} + \varepsilon e_{5,n+1}$, $L_{4,\nu} = L_{0,\nu} + \varepsilon L_{5,\nu}$, $L_w^{(4)} = L_w^{(0)} + \varepsilon L_w^{(5)}$ для общей точки $(c_4,\lambda_4,L^{(4)})$ прямой $\mathfrak{l}$. Рассмотрим следующее подмногообразие в $\mathbb{P}^n(\overline{K}) \times \mathbb{A}^1(\overline{K})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}_i = (V \times \mathbb{A}^1(\overline{K})) &\cap \mathcal{Z}(L_{0,s+1} + \varepsilon L_{5,s+1},\dots,L_{0,\sigma} + \varepsilon L_{5,\sigma})\\ &\cap \mathcal{Z}(e_{\sigma+1}^{(0)} + \varepsilon e_{\sigma+1}^{(5)},\dots,e_i^{(0)} + \varepsilon e_i^{(5)}), \quad i = s, n-1, n\end{aligned} \tag{27}$$

(так что для $i = s$ многообразие $\mathcal{Z}(e_{\sigma+1}^{(0)} + \varepsilon e_{\sigma+1}^{(5)},\dots,e_i^{(0)} + \varepsilon e_i^{(5)})$ можно опустить). Обозначим через $\mathcal{W}_i$ объединение всех неприводимых над $\overline{K}$ компонент E многообразия $\mathcal{V}_i$, таких, что $E \cap (A_{\lambda_0,L^{(0)}} \times \{0\}) \neq \varnothing$. Тогда $\mathcal{W}_i \subset W \times \mathbb{A}^1(\overline{K})$. Размерность всякой неприводимой компоненты многообразия $\mathcal{W}_i$ равна $n-i+1$. Далее, $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon) = \widetilde{W}_{\lambda_0,i}(L^{(0)}) \times \{0\}$. Для всякого i, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$, по теореме Безу существует не более чем полиномиальное от $d^n(d')^{n-\sigma}$ число точек $y \in \mathfrak{l}$, таких, что $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)})$ имеет неприводимую компоненту E, содержащуюся

в $\mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$ (поскольку в этом случае E с необходимостью является неприводимой компонентой пересечения $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$). Следовательно, для всех $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)})$ является объединением некоторых неприводимых компонент многообразия $\widetilde{W}_{\lambda_3,i}(L^{(3)}) \times \{\varepsilon^{(3)}\}$. Мы покажем, что $\deg \mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)}) \geqslant D_i$ для всех $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, для всякого i, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$. С другой стороны, мы знаем (см. выше), что всегда $\deg \widetilde{W}_{\lambda_3,i}(L^{(3)}) \leqslant D_i$. Поэтому отсюда следует, что $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)}) = \widetilde{W}_{\lambda_3,i}(L^{(3)}) \times \{\varepsilon^{(3)}\}$ для всех $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, для всякого i, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$.

Существуют однородные многочлены $h_1,\dots,h_s \in k[X_0,\dots,X_n]$, такие, что W является неприводимой компонентой многообразия $\mathcal{Z}(h_1,\dots,h_s)$ в $\mathbb{P}^n(\overline{k})$ и пересечение s гиперповерхностей $\mathcal{Z}(h_1),\dots,\mathcal{Z}(h_s)$ в каждой точке из $A_{\lambda_0,L^{(0)}}$ трансверсально. Мы выбираем $h_1,\dots,h_s$, используя линейные проекции $\mathbb{P}^n(\overline{k}) \to \mathbb{P}^{n-s+1}(\overline{k})$ в общем положении, так, что $\deg h_i \leqslant \deg W \leqslant d^s$ (мы оставляем подробности читателю). Существуют линейно независимые линейные формы $\widetilde{L}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{L}_n \in k[X_0,\dots,X_n]$, такие, что для всякого i, где $\sigma \leqslant i \leqslant n$, пересечение n гиперповерхностей $\mathcal{Z}(h_1),\dots,\mathcal{Z}(h_s)$, $\mathcal{Z}(L_{0,s+1}),\dots,\mathcal{Z}(L_{0,\sigma})$, $\mathcal{Z}(e^{(0)}_{\sigma+1}),\dots,\mathcal{Z}(e^{(0)}_i)$, $\mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}),\dots,\mathcal{Z}(\widetilde{L}_n)$ трансверсально во всякой точке $\xi \in \widetilde{W}_{\lambda_0,i}(L^{(0)}) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1},\dots,\widetilde{L}_n) = B_i$ (следовательно, по свойству (iv) число элементов $\#B_i$ равно D_i), для всякого точки $\xi \in B_i$ дифференциал $d_\xi p_{\lambda_0,L^{(0)},i}$ является изоморфизмом и $B_i \cap (\mathcal{Z}(e^{(0)}_0) \cup \overline{(V \setminus W)}) = \varnothing$. Это условия общего положения для $\widetilde{L}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{L}_n$ согласно свойству (D) для $(\lambda_0,L^{(0)})$ и нашему первому наблюдению, относящемуся к свойству (D), см. выше. Обозначим через Δ_i якобиан n многочленов $h_1,\dots,h_s$, $L_{0,s+1} + \varepsilon L_{5,s+1},\dots,L_{0,\sigma} + \varepsilon L_{5,n}$, $e^{(0)}_{\sigma+1} + \varepsilon e^{(5)}_{\sigma+1},\dots,e^{(0)}_i + \varepsilon e^{(5)}_i$, $\widetilde{L}_{i+1},\dots,\widetilde{L}_n$ относительно $X_1,\dots,X_n$. Очевидно, степень $\deg_{X_0,\dots,X_n,Z} \Delta_i$ ограничена сверху многочленом от $d^n(d')^{n-\sigma}$. Осуществляя невырожденное линейное преобразование координат в $\mathbb{P}^n(\overline{K})$, мы будем предполагать без ограничения общности, что $X_0(\xi) \neq 0$ для всякого $\xi \in B_i$ и $(B_i \times \{0\}) \cap \mathcal{Z}(\Delta_i) = \varnothing$ при $\sigma \leqslant i \leqslant n$.

Положим C_i равным объединению всех неприводимых компонент C пересечения $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1},\dots,\widetilde{L}_n)$, таких, что $C \cap \mathcal{Z}(\varepsilon) \cap (B_i \times \{0\}) \neq \varnothing$.

Тогда $C_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon) = B_i \times \{0\}$ и C_i является кривой. По теореме Безу $\deg C_i \leqslant 2^{n-s} d^s (d')^{n-\sigma}$ (степень $\deg C_i$ по определению равна степени кривой $C_i \setminus \mathcal{Z}(L_0)$ в аффинном пространстве $\mathbb{A}^n(\overline{K}) \times \mathbb{A}^1(\overline{K})$, где $L_0 \in k[X_0, \ldots, X_n]$ – произвольная линейная форма, которая не обращается в нуль тождественно ни на какой неприводимой компоненте кривой C_i). Линейная проекция $C_i \to \mathbb{A}^1(\overline{K})$, $((X_0 : \ldots : X_n), \varepsilon) \mapsto \varepsilon$, является доминантной. Следовательно, для всех $\varepsilon^{(3)} \in \overline{K}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа, $+\infty > \#(C_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)})) \geqslant \#(C_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon)) = D_i$ при $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Напомним, что C_i является объединением неприводимых компонент многообразия $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \ldots, \widetilde{L}_n)$. Поэтому по теореме Безу для всех $\varepsilon^{(3)} \in \overline{K}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа, каждая изолированная точка из $C_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)})$ является изолированной точкой из $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \ldots, \widetilde{L}_n) \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)})$. Следовательно, для всех $\varepsilon^{(3)} \in \overline{K}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа, $\deg \mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)}) \geqslant D_i$. Для этих y имеем $\mathcal{W}_i \cap \mathcal{Z}(\varepsilon - \varepsilon^{(3)}) = \widetilde{W}_{\lambda_3, i}(L^{(3)}) \times \{\varepsilon^{(3)}\}$ и $\deg \widetilde{W}_{\lambda_3, i}(L^{(3)}) = D_i$, см. выше.

По теореме Безу число точек из $C_i \cap \mathcal{Z}(\Delta_i)$ ограничено сверху многочленом от $d^n (d')^{n-\sigma}$. Поэтому для всех $y \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа, для всякой точки $(\xi, \varepsilon^{(3)}) \in (\widetilde{W}_{\lambda_3, i}(L^{(3)}) \times \{\varepsilon^{(3)}\}) \cap \mathcal{Z}(\widetilde{L}_{i+1}, \ldots, \widetilde{L}_n)$ дифференциал $d_\xi p_{\lambda_3, L^{(3)}, i}$ является изоморфизмом при $\sigma \leqslant i \leqslant n$. Таким образом, мы доказали, что для всех $y \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа, условия (i), (iv) и (v) (см. начало раздела) выполняются, если $j = 3$.

Напомним, что $B_i \cap (\mathcal{Z}(e_0^{(0)}) \cup \overline{(V \setminus W)}) = \varnothing$, см. выше. Следовательно, число элементов $\#(C_i \cap (\mathcal{Z}(e_0^{(0)} + \varepsilon e_0^{(5)}) \cup \overline{(V \setminus W)}))$ конечно и ограничено сверху многочленом от $d^n (d')^{n-\sigma}$ по теореме Безу. Беря $i = n$, мы получаем, что выполняется условие (ii) с $j = 3$ для всех $y \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа. Для таких y выполнены условия (i), (ii), (iv), (v). Поэтому для них также выполняются условия (i)–(iv), см. наблюдения в начале раздела. Таким образом, свойство (D) выполняется для всех $y \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n (d')^{n-\sigma}$ числа. В частности, оно справедливо для общей точки $(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$, поскольку существует бесконечно много изоморфных над $\overline{K}$ общих точек прямой $\mathfrak{l}$ в $\mathfrak{l}(\overline{K(\varepsilon)})$.

Многочлен

$$\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}} \in \overline{k}[\varepsilon, Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_{n+1}]$$

сепарабелен, и ε не делит $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}$. Поэтому $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}|_{\varepsilon=0} \neq 0$ и $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}}$ делит $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}|_{\varepsilon=0}$. Следовательно,

$$\deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)}) \geqslant \deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$$

и

$$\begin{aligned}\#(e_{4,n+1}/e_0^{(4)})(A_{\lambda_4,L^{(4)}}) &= \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}} \\ &\geqslant \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)}} = \#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}}).\end{aligned}$$

Представим многочлен $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}$ в виде $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}} = \sum_{0\leqslant i\leqslant\delta} \Phi_i Z_{n+1}^i$, где

$$\begin{gathered}\Phi_i \in \overline{k}[\varepsilon, Z_0, Z_{\sigma+1}, \dots, Z_n], \\ \delta = \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}.\end{gathered}$$

Тогда $\mathrm{G\,C\,D}_{0\leqslant i\leqslant\delta}\{\Phi_i\}=1$ согласно определению многочлена $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}$.

С другой стороны, для всех $y = (c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, многочлен $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}}$ сепарабелен,

$$\begin{aligned}\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_3,\lambda_3,L^{(3)}} &= \#(e_{3,n+1}/e_0^{(3)})(A_{\lambda_3,L^{(3)}}) = \#(e_{4,n+1}/e_0^{(4)})(A_{\lambda_4,L^{(4)}}) \\ &= \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}\end{aligned}$$

и (ср. доказательство леммы 8 ниже) $\mathrm{G\,C\,D}_{0\leqslant i\leqslant\delta}\{\Phi_i|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}}\} = 1$. Поэтому для таких $(c_3, \lambda_3, L^{(3)})$ многочлены $\Phi_{c_3,\lambda_3,L^{(3)}}$ и $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}}$ совпадают с точностью до ненулевого множителя из $\overline{K}$. Таким образом,

$$\deg W'(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) = \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)}) \geqslant \deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$$

и

$$\begin{aligned}\#(e_{3,n+1}/e_0^{(3)})(A_{\lambda_3,L^{(3)}}) &= \#(e_{4,n+1}/e_0^{(4)})(A_{\lambda_4,L^{(4)}}) \\ &\geqslant \#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}}).\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Лемма 5. *В условиях леммы* 4 *предположим, что*

$$\#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}}) = \#(e_{4,n+1}/e_0^{(4)})(A_{\lambda_4,L^{(4)}}) = \deg p_v' \deg W'$$

и

$$\deg W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)}) = \deg W'(c_4,\lambda_4,L^{(4)}).$$

Тогда для всех $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа,* $b(c_3,\lambda_3,L^{(3)}) = b(c_4,\lambda_4,L^{(4)}) \geqslant b(c_0,\lambda_0,L^{(0)})$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon^{(0)} = 0$. При $j = 0,3$ для всех

$$y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l},$$

за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, многочлены $\Phi_{c_j,\lambda_j,L^{(j)}}$ совпадают с $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)}}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(j)}}$. Следовательно,

$$(R_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},0}|_{\varepsilon=0})_0 = R_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},0}$$

и

$$R_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},0}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}} = R_{c_3,\lambda_3,L^{(3)},0}$$

для всех $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа. Отсюда вытекает утверждение леммы. □

Лемма 6. *В условиях леммы* 4 *предположим дополнительно, что* $\#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}}) = \deg p_v' \deg W'$. *Тогда для всех* $y = (c_3,\lambda_3,L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа,*

$$\deg W'(c_3,\lambda_3,L^{(3)},*) = \deg W'(c_4,\lambda_4,L^{(4)},*) \geqslant \deg W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)},*).$$

Доказательство. Выберем в определении 4 (с полем $\overline{K}$ вместо $\overline{k}$) для $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}$ многочлены $g_1 \in \overline{k}[\varepsilon,Z_0,Z_n]$ максимальной степени относительно ε, Z_0, Z_n и $g_2 \in \overline{k}[\varepsilon,Z_0,\ Z_n,Z_{n+1}]$. Заметим, что $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}$ сепарабелен и ε не делит $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}$. Поэтому $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}|_{\varepsilon=0} \neq 0$ и $\Phi_{c_0,\lambda_0,L^{(0)},+}$ делит $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}|_{\varepsilon=0}$. Следовательно,

$$\deg W'(c_4,\lambda_4,L^{(4)},*) \geqslant \deg W'(c_0,\lambda_0,L^{(0)},*)$$

по лемме 3. Пусть

$$\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+} = \sum_{0\leqslant i\leqslant\delta} \varphi_i Z_{n+1}^i,$$

где $\varphi_i \in \overline{k}[\varepsilon, Z_0, Z_{\sigma+1}, \ldots, Z_n]$, $\delta = \deg p'_v \deg W'$. Тогда $\mathrm{G\,C\,D}_{0\leqslant i\leqslant\delta}\{\varphi_i\} = 1$ согласно определению многочлена $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}$. С другой стороны, для всех $y = (c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, многочлен $\Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}}$ сепарабелен и (ср. доказательство леммы 8)

$$\mathrm{G\,C\,D}_{0\leqslant i\leqslant\delta}\{\varphi_i|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}}\} = 1.$$

Поэтому для таких $(c_3,\ \lambda_3, L^{(3)})$ многочлены

$$\Phi_{c_3,\lambda_3,L^{(3)},+} \quad \text{и} \quad \Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},+}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(3)}}$$

совпадают с точностью до ненулевого множителя из $\overline{K}$ и, следовательно,

$$\deg W'(c_3, \lambda_3, L^{(3)}, *) = \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)}, *) \geqslant \deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}, *).$$

Лемма доказана. □

Лемма 7. *В условиях леммы* 4 *предположим, что*

$$\#(e_{0,n+1}/e_0^{(0)})(A_{\lambda_0,L^{(0)}}) = \#(e_{4,n+1}/e_0^{(4)})(A_{\lambda_4,L^{(4)}})$$

и

$$\begin{aligned}\deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) &= \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)}) = \deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}, *)\\ &= \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)}, *).\end{aligned}$$

Тогда для всех $y = (c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, *за исключением не более чем полиномиального от* $d^n(d')^{n-\sigma}$ *числа,* $a(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) = a(c_4, \lambda_4, L^{(4)}) \geqslant a(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$.

Доказательство. Пусть $\varepsilon^{(0)} = 0$ и $\varepsilon^{(3)}$ – такие же, как и выше. По леммам 3 и 6 для всех $y = (c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \mathfrak{l}$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, $\Phi_{c_j,\lambda_j,L^{(j)},+} = \Phi_{c_j,\lambda_j,L^{(j)},*} = \Phi_{c_4,\lambda_4,L^{(4)},*}|_{\varepsilon=\varepsilon^{(j)}}$, $j = 0, 3$. Теперь требуемое утверждение немедленно следует из определений $a(c_j, \lambda_j, L^{(j)})$, $j = 0, 3, 4$. Лемма доказана. □

Напомним, что в обозначениях из введения мы имеем естественную проекцию $\mathbb{A}^{\nu}(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{\nu_1}(\overline{k})$, такую, что $(c, \lambda, L') \mapsto (c', \lambda)$.

Лемма 8. *Пусть* $\mathbb{A}^1(\overline{k})$ *определено над* k *и имеет координатную функцию* ε, *определённую над* k. *В обозначениях из введения пусть* $\iota : \mathbb{A}^1(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{\nu}(\overline{k})$ (*соответственно* $\mathbb{A}^1(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{\nu_1}(\overline{k})$) – *аффинное линейное вложение, индуцирующее определённый над* k *морфизм* ι :

$\mathbb{A}^1(\overline{k}) \to \mathbb{A}^{\nu_1}(\overline{k})$ *(соответственно линейное вложение, определённое над k). Пусть $y_\varepsilon = \iota(\varepsilon) = (c_4, \lambda_4, L^{(4)})$ – общая точка прямой $\mathfrak{l} = \iota(\mathbb{A}^1(\overline{k}))$. Предположим, что точка $\iota(0) = (c_0, \lambda_0, L^{(0)})$ (соответственно $\iota(0) = (c_0, \lambda_0)$) удовлетворяет свойству $(*)$ из введения и*

$$\deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) = \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$$

(соответственно $\deg W'(c_0, \lambda_0, U) = \deg W'(c_4, \lambda_4, U)$*). Тогда для всех $y \in k$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа, свойство $(*)$ выполняется для $\iota(y) = (c_3, \lambda_3, L^{(3)})$ (соответственно $\iota(y) = (c_3, \lambda_3)$) и*

$$\deg W'(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) = \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$$

(соответственно $\deg W'(c_3, \lambda_3, U) = \deg W'(c_4, \lambda_4, U)$*). Более того, аналогичное утверждение справедливо, если заменить условие $(*)$ конъюнкцией условий 1) и 2) (или 1), 2) и 3)) из $(*)$.*

Доказательство. Если (c_0, λ_0) удовлетворяет свойству $(*)$ и

$$\deg W'(c_0, \lambda_0, U) = \deg W'(c_4, \lambda_4, U),$$

то существует набор линейных форм $L^{(0)} \in \mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$, такой, что $\deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) = \deg W'(c_4, \lambda_4, U)$. Для всякой точки (c_3, λ_3) из утверждения леммы

$$\deg W'(c_3, \lambda_3, L^{(0)}) \leqslant \deg W'(c_3, \lambda_3, U) \leqslant \deg W'(c_4, \lambda_4, U).$$

Поэтому случай (c_0, λ_0) сводится к случаю $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$. Последнее утверждение леммы доказывается аналогично первому.

Рассмотрим первое утверждение для случая $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$. Пересечение (15) с $j = 0$ конечно и трансверсально, см. [11–13]. Рассматривая соответствующий якобиан, мы получаем, что оно остаётся трансверсальным для всех точек $(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \iota(\mathbb{A}^1(\overline{k}))$ вместо $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа. Следовательно, из утверждения (d) теоремы 1 работы [10], утверждения (f) теоремы 1 работы [12] и теоремы Безу следует, что свойства 1), 2) и 3) из $(*)$ выполняются для всех $(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) \in \iota(\mathbb{A}^1(\overline{k}))$, за исключением не более чем полиномиального от $d^n(d')^{n-\sigma}$ числа.

Рассмотрим подробно условие 4) из $(*)$. Выберем $\Phi_{c_4, \lambda_4, L^{(4)}} \in \overline{k}[\varepsilon, Z_0, Z_{\sigma+1}, \ldots, Z_{n+1}]$, где ε не делит последний многочлен. Для краткости положим $\delta = \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_4, \lambda_4, L^{(4)}}$. Пусть $\Phi_{c_4, \lambda_4, L^{(4)}, *} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant \delta} \varphi_i Z_{n+1}^i$,

где $\varphi_i \in \overline{k}[\varepsilon, Z_0, Z_n]$. По теореме Безу все степени $\deg_{\varepsilon, Z_0, Z_n} \varphi_i$ ограничены сверху многочленом от $d^n(d')^{n-\sigma}$, ср. [10, лемма 7]. Имеем $\mathrm{G\,C\,D}_{0 \leqslant i \leqslant \delta}\{\varphi_i(0, Z_0, Z_n)\} = 1$ в $\overline{k}[Z_0, Z_n]$ согласно условию 4) из $(*)$ для $\iota(0)$ и поскольку $\deg W'(c_0, \lambda_0, L^{(0)}) = \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$. Поэтому существуют многочлены $A_{j,i} \in \overline{k}[\varepsilon, Z_0, Z_n]$, $j = 0, n$, $0 \leqslant i \leqslant \delta$, и $0 \neq A_j \in \overline{k}[\varepsilon]$, $j = 0, n$, такие, что степени относительно ε, Z_0, Z_n всех $A_{j,i}, A_j$ ограничены сверху многочленом от $d^n(d')^{n-\sigma}$ и $\sum_{0 \leqslant i \leqslant \delta} A_{j,i}\varphi_i = A_j Z_j^{\mu}$, $j = 0, n$. Теперь если $\varepsilon^{(3)} \in k$, $\iota(\varepsilon^{(3)}) = (c_3, \lambda_3, L^{(3)})$, свойства 1), 2), 3) выполняются для $(c_3, \lambda_3, L^{(3)})$ и $(A_0 A_n)(\varepsilon^{(3)}) \neq 0$, то многочлен $\Phi_{c_3, \lambda_3, L^{(3)}, *} = \Phi_{c_4, \lambda_4, L^{(4)}, *}\big|_{\{\varepsilon = \varepsilon^{(3)}\}}$ не имеет неприводимых множителей из $\overline{k}[Z_0, Z_n]$, т.е. свойство 4) выполнено и $\deg W'(c_3, \lambda_3, L^{(3)}) = \deg W'(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$. Лемма доказана. □

Лемма 9. *Пусть* $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ (*соответственно* (c_1, λ_1)) *задано посредством формул* (17)–(19) (*соответственно* (17), (18)), *см. введение. В обозначениях из введения предположим, что* $(c_0, \lambda_0, L^{(0)})$ (*соответственно* (c_0, λ_0)) *удовлетворяет свойствам* $(*)$ *и* 5) (*соответственно удовлетворяет свойству* $(*)$ *и условию* $\deg W'(c_0, \lambda_0, U) = \deg W'(c_1, \lambda_1, U)$). *Тогда* $(c_1, \lambda_1, L^{(1)})$ (*соответственно* (c_1, λ_1)) *удовлетворяет свойству* $(*)$. *Более того, аналогичное утверждение справедливо, если заменить* $(*)$ *конъюнкцией условий* 1) и 2) (*или* 1), 2) *и* 3)) *из* $(*)$.

Доказательство. Общая точка $(c_4, \lambda_4, L^{(4)})$ (соответственно (c_4, λ_4)) прямой $\iota(\mathbb{A}^1(\overline{k}))$ из леммы 8 удовлетворяет свойствам $(*)$ и 5) (соответственно свойству $(*)$ и условию $\deg W'(c_0, \lambda_0, U) = \deg W'(c_4, \lambda_4, U)$), если расширить основное поле. Таким образом, последовательно расширяя поле k до $k(\tau_1)$, $k(\tau_1, \tau_2), \ldots, k(\tau_1, \ldots, \tau_{n_1})$ и применяя каждый раз лемму 8, мы получаем утверждение леммы. □

Лемма 10. *Пусть точка* (c_1, λ_1) *задана при помощи формул* (17), (18) *и удовлетворяет условиям* 1)–3) *из* $(*)$, *см. введение. Тогда справедливы следующие утверждения.*

(a) *Многочлен* $R_{c_1, \lambda_1, 0, *} = R_{c_1, \lambda_1, 0}(\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}, u, Z_0, 0, \ldots, 0, Z_n)$ *является ненулевым сепарабельным элементом кольца многочленов*

$$\overline{k}[\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}, u, Z_0, Z_n]$$

(относительно всех переменных $\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}$, u, Z_0, Z_n*). Другими словами,* $a(c_1, \lambda_1) = b(c_1, \lambda_1)$, *см. введение.*

(b) *Многочлен* $\Phi_{c_1,\lambda_1,*}$ *не имеет неприводимых множителей из* $k[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_n]$.

В частности (см. обозначения во введении), $\Delta_{0,*}$ *является ненулевым сепарабельным элементом кольца многочленов* $\overline{k}[c,\upsilon,u,Z_0,Z_n]$, *и* F_* *не имеет неприводимых множителей из* $\overline{k}[c,\upsilon,u,Z_0,Z_n]$.

Доказательство. Пусть $\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1}$ – линейные формы от Z_0, $Z_{\sigma+1},\dots,Z_n$ с коэффициентами из k в общем положении. Отождествим $k[Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_n]/(\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1})$ с $k[Z_0,Z_n]$.

Пусть $\delta=\deg p_v'\deg W'$. По лемме 2 имеем $\Phi_{c_1,\lambda_1,*}\neq 0$. Представим многочлен Φ_{c_1,λ_1} в виде

$$\Phi_{c_1,\lambda_1}=\sum_{0\leqslant i\leqslant\delta}\Phi_i Z_{n+1}^i,$$

где $\Phi_i\in\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_n]$. Согласно своему определению, многочлен Φ_{c_1,λ_1} не имеет неприводимых множителей из

$$\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,\dots,Z_n].$$

Поэтому $\mathrm{G\,C\,D}_{0\leqslant i\leqslant\delta}\{\Phi_i\}=1$ в последнем кольце, т.е.

$$\operatorname{codim}\mathcal{Z}(\Phi_0,\dots,\Phi_\delta)\geqslant 2$$

в соответствующем аффинном пространстве. Напомним, что формы $\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1}$ находятся в общем положении. Поэтому, рассматривая коразмерности, мы получаем, что $\mathrm{G\,C\,D}_{0\leqslant i\leqslant\delta}\{\Phi_i \bmod (\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1})\}=1$ в кольце $\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,\dots,Z_n]/(\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1})=\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_n]$.

Рассмотрим аффинное пространство $\mathbb{A}^N(\overline{k})$ с координатными функциями из семейств $\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_n$. Пусть $\mathbb{A}^N(\overline{k})$ вложено в $\mathbb{P}^N(\overline{k})$ естественным образом. Пусть $\mathcal{W}$ – неприводимая компонента замыкания в $\mathbb{P}^N(\overline{k})$ алгебраического многообразия $\mathcal{Z}(R_{c_1,\lambda_1,0})$. Применим теорему 1 из [11] к каждому морфизму $\mathcal{W}\to\mathbb{P}^{n-\sigma+1}(\overline{k})$, индуцированному линейной проекцией, заданной формами $Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_n$. Тогда, поскольку $\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1}$ находятся в общем положении, мы получаем, что многочлен

$$\begin{aligned}&0\neq R_{c_1,\lambda_1,0} \bmod (\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1})\\&\in\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_n]/(\widetilde{Z}_{\sigma+1},\dots,\widetilde{Z}_{n-1})\end{aligned}$$

является сепарабельным элементом последнего кольца. Согласно своим определениям, U_j являются общими линейными формами. Поэтому U_0, $\widetilde{Z}_j(U_0, U_{\sigma+1}, \ldots, U_{n-1})$, $\sigma + 1 \leqslant j \leqslant n-1$, U_n также образуют семейство общих линейных форм от $X_0, \ldots, X_n$ относительно поля k. Следовательно, многочлены $\Phi_{i,*}$, $R_{c_1,\lambda_1,0,*}$ получаются из $\Phi_i \bmod (\widetilde{Z}_{\sigma+1}, \ldots, \widetilde{Z}_{n-1})$, $R_{c_1,\lambda_1,0} \bmod (\widetilde{Z}_{\sigma+1}, \ldots, \widetilde{Z}_{n-1})$ автоморфизмом, индуцированным линейным преобразованием над k переменных из семейства u. Поэтому $\mathrm{G\,C\,D}_{0 \leqslant i \leqslant \delta}\{\Phi_{i,*}\} = 1$ и $R_{c_1,\lambda_1,0,*}$ является ненулевым сепарабельным многочленом. Лемма доказана. □

Лемма 11. *Пусть* (c_1, λ_1) *– элемент из введения и он удовлетворяет условию* $(*)$. *Тогда множество всех* L', *таких, что* $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}(\overline{k})$ *и выполняются условия* (i), (ii) (*соответственно* (i)–(iii)) *из определения* 2 *для* (c_1, λ_1, L'), *является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в* $\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$. *Следовательно,* $\mathcal{U}^{(\mathrm{v})}_{c_1,\lambda_1,0}$ *является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в* $\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$.

Доказательство. Согласно условиям 3) и 2) из $(*)$, многочлен $e_{1,n+1}$ не обращается в нуль тождественно ни на какой неприводимой компоненте многообразия W_{λ_1}. Поэтому X_{r+1} не обращается в нуль тождественно ни на какой неприводимой компоненте многообразия $W'(c_1, \lambda_1)$. Следовательно, $W'(c_1, \lambda_1) \cap \mathcal{Z}(U_0, U_{\sigma+1}, \ldots, U_n, X_{r+1}) = \varnothing$, $\deg W'(c_1, \lambda_1) = \deg_{Z_0, Z_{\sigma+1}, \ldots, Z_n} \Phi_{c_1,\lambda_1}$, ср. замечание 5 из [10]. Поэтому (см. лемму 13 из [6] и замечание 5 из [11]) если

$$\deg_{Z_0, Z_{\sigma+1}, \ldots, Z_n} \Phi_{c_1,\lambda_1,L'} = \deg W'(c_1, \lambda_1),$$

то многочлены $\Phi_{c_1,\lambda_1,L'}$ и $\Phi_{c_1,\lambda_1}|_{u=l'}$ (последний многочлен получается подстановкой $l'_{i,j}$ вместо $u_{i,j}$ для всех i, j) совпадают с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}[\tau_1, \ldots, \tau_{n_1}]$.

Далее, пусть $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}(\overline{k})$ и (c_1, λ_1, L') удовлетворяет условиям 2), 3) из $(*)$ (множество всех таких L' является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$). Тогда условие (ii) определения 2 выполняется для L' в том и только в том случае, если $W'(c_1, \lambda_1) \cap \mathcal{Z}(L'_0, L'_{\sigma+1}, \ldots, L'_n, X_{r+1}) = \varnothing$. Следовательно, множество $\mathcal{W}$ всех $L' \in \mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}(\overline{k})$, таких, что условия 2), 3) из $(*)$ и условие (ii) из определения 2 выполняются для (c_1, λ_1, L'), является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathbb{A}^{(r+1)(n-\sigma+1)}(\overline{k})$.

Пусть $\delta = \deg p'_v \deg W'$. Представим многочлен $\Phi_{c_1,\lambda_1,*}$ в виде $\Phi_{c_1,\lambda_1,*} = \sum_{0\leqslant i\leqslant\delta} \varphi_i Z_{n+1}^i$, где $\Phi_i \in \overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_n]$. По лемме 10 существуют многочлены $A_{j,i} \in \overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u,Z_0,Z_n]$, $j=0,n$, $0\leqslant i\leqslant\delta$, и $0\neq A_j\in\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1},u]$, $j=0,n$, такие, что $\sum_{0\leqslant i\leqslant\delta} A_{j,i}\varphi_i = A_j Z_j^{\mu}$, $j=0,n$. Теперь пусть $L'\in\mathcal{W}$. Тогда из того, что $(A_0A_n)|_{\{u=l'\}}\neq 0$, следует условие 4) из $(*)$ для (c_1,λ_1,L'). Поэтому множество элементов $L'\in\mathcal{W}$, таких, что условие 4) из $(*)$ выполняется для (c_1,λ_1,L'), является непустым. С другой стороны, очевидно, если $L'\in\mathcal{W}$ и $\mathrm{G\,C\,D}\,\{\varphi_i|_{\{u=l'\}}\}=1$ в $\overline{k}(\tau_1,\dots,\tau_{n_1})[Z_0,Z_n]$, то существует окрестность $\mathcal{W}'\subset\mathcal{W}$ элемента L' относительно топологии Зариского, такая, что для всякого $L''\in\mathcal{W}'$ мы имеем $\mathrm{G\,C\,D}\,\{\varphi_i|_{\{u=l''\}}\}=1$ (здесь семейство коэффициентов l'' для L'' аналогично семейству l', определённому для L') в $\overline{k}(\tau_1,\dots,\tau_{n_1})[Z_0,Z_n]$. Отсюда вытекает утверждение леммы, относящееся к условиям (i) и (ii).

Обозначим через $\mathcal{W}''$ множество всех $L'\in\mathcal{U}'''_{\lambda_1,0}(\overline{k})$, таких, что выполняются условия (i), (ii) из определения 2. Тогда $L'\in\mathcal{U}^{(5)}_{c_1,\lambda_1}$ в том и только в том случае, если $L'\in\mathcal{W}''$ и $R_{c_1,\lambda_1,0,*}|_{\{u=l'\}}$ совпадает с $R_{c_1,\lambda_1,L',*,0}$ с точностью до ненулевого множителя из $\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_1}]$, т.е. в том и только в том случае, если $R_{c_1,\lambda_1,0,*}|_{\{u=l'\}}$ является сепарабельным относительно переменных Z_0,Z_n. Многочлен $R_{c_1,\lambda_1,0,*}$ является ненулевым и сепарабельным по лемме 10. Следовательно, рассматривая дискриминанты многочлена $R_{c_1,\lambda_1,0,*}$ относительно Z_0 и Z_n, мы выводим отсюда, что множество всех $L'\in\mathcal{W}'$, таких, что $R_{c_1,\lambda_1,0,*}|_{\{u=l'\}}$ совпадает с $R_{c_1,\lambda_1,L',*,0}$, является непустым открытым в топологии Зариского подмножеством в $\mathcal{W}''$. Лемма доказана. $\square$

Лемма 12. *В обозначениях из введения пусть* $(c_2,\lambda_2,L^{(2)})\leqslant(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$. *Предположим, что* $(c_i,\lambda_i,L^{(i)})$ *удовлетворяет условиям* 1)–3) *из* $(*)$, *если расширить основное поле* k *до* $k(\tau_1,\dots,\tau_{n_i})$, $i=1,2$. *Предположим, что* $n_1=n_2+1$ *и представления* (17)–(19) *для* $(c_2,\lambda_2,L^{(2)})$ *получаются из* (17)–(19) *для* $(c_1,\lambda_1,L^{(1)})$ *подстановкой* $\tau'_{n_1}\in k$ *вместо* τ_{n_1}, *см. введение. Тогда многочлен* $\Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)}}$ *совпадает с* $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}|_{\{\tau_{n_1}=\tau'_{n_1}\}}$ *с точностью до ненулевого множителя из*

$$\overline{k}[\tau_1,\dots,\tau_{n_2},Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_n].$$

В частности, если

$$\deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}}\Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)}} = \deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\dots,Z_{n+1}}\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}},$$

то $\Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)}}$ *совпадает с* $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}|_{\{\tau_{n_1}=\tau'_{n_1}\}}$ *с точностью до ненулевого множителяи из* $\overline{k}[\tau_1,\ \ldots,\tau_{n_2}]$.

Доказательство. Расширяя основное поле k до $k(\tau_1,\ldots,\tau_{n_2})$, мы будем предполагать без ограничения общности, что $n_1 = 1$ и $n_2 = 0$. Пусть $\mathbb{A}^1(\overline{k})$ имеет координатную функцию τ_1. Пусть $\mathcal{W}$ – объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $(W \times \mathbb{A}^1(\overline{k})) \cap \mathcal{Z}(L_{1,s+1},\ldots,L_{1,\sigma})$, таких, что E не содержится ни в какой гиперплоскости $\mathcal{Z}(\tau_1 - z)$, $z \in \overline{k}$. Тогда произвольный многочлен $h \in \overline{k}[X_0,\ldots,X_n,\tau_1]$, однородный относительно $X_0,\ldots,X_n$, обращается в нуль тождественно на $W_{\lambda_1}(\overline{k(\tau_1)})$ в том и только в том случае, если h обращается в нуль тождественно на $\mathcal{W}$.

Кроме того, $\dim E = n-\sigma+1$ для всякой компоненты E многообразия $\mathcal{W}$. Поэтому $\dim \mathcal{W}\cap\mathcal{Z}(\tau_1-\tau'_1) = n-\sigma$. Размерность всякой неприводимой компоненты E_1 многообразия $(W\times\mathbb{A}^1(\overline{k}))\cap\mathcal{Z}(L_{1,s+1},\ldots,L_{1,\sigma})$ не меньше $n-\sigma+1$. В частности, это верно для всякой неприводимой компоненты $E_1 \subset \mathcal{Z}(\tau_1-\tau'_1)$. Очевидно, $(W \times \mathbb{A}^1(\overline{k})) \cap \mathcal{Z}(L_{1,s+1},\ldots,L_{1,\sigma}) \cap \mathcal{Z}(\tau_1-\tau'_1) = W_{\lambda_2} \times \{\tau'_1\}$, и $\dim W_{\lambda_2} = n-\sigma$. Следовательно, $\mathcal{W} \cap \mathcal{Z}(\tau_1 - \tau'_1) = W_{\lambda_2} \times \{\tau'_1\}$.

Элемент $\tau_1 - \tau'_1$ не делит $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$. Поэтому

$$\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}|_{\{\tau_1=\tau'_1\}} \neq 0.$$

Подставим в многочлен $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}$ элементы $L_j^{(1)}(e_0,\ldots,e_r)$ вместо Z_j, $j \in \{0,\sigma+1,\ldots,n\}$, и $e_{1,n+1}$ вместо Z_{n+1}. Полученный многочлен обращается в нуль тождественно на $W_{\lambda_1}(\overline{k(\tau_1)})$ и, следовательно, на $\mathcal{W}$. Поэтому если подставить в $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}|_{\{\tau_1=\tau'_1\}}$ элементы $L_j^{(2)}(e_0,\ldots,e_r)$ вместо Z_j, $j \in \{0,\sigma+1,\ldots,n\}$, и $e_{2,n+1}$ вместо Z_{n+1}, то полученный многочлен обращается в нуль тождественно на W_{λ_2}. Следовательно, $\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}|_{\{\tau_1=\tau'_1\}} = \deg p'_v \deg W'$. Отсюда немедленно следуют требуемые утверждения. Лемма доказана. □

Лемма 13. *В условиях леммы* 12 *пусть* $\gamma \geqslant 0$ *– наибольшее целое число, такое, что* $(\tau_{n_1} - \tau'_{n_1})^\gamma$ *делит* $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}$ *(оно существует по лемме* 2*). Тогда многочлен* $(\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}/(\tau_{n_1} - \tau'_{n_1})^\gamma)|_{\{\tau_{n_1}=\tau'_{n_1}\}}$ *совпадает с* $\Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)},*}$ *с точностью до ненулевого множителя из* $k(\tau_1,\ldots,\tau_{n_2},Z_0,Z_n)$. *Предположим дополнительно, что*

$$\deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\ldots,Z_{n+1}} \Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)}} = \deg_{Z_0,Z_{\sigma+1},\ldots,Z_{n+1}} \Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)}}.$$

Тогда $\gamma = 0$ *и* $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}|_{\{\tau_{n_1}=\tau'_{n_1}\}}$ *совпадает с* $\Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)},*}$ *с точностью до ненулевого множителя из* $k(\tau_1,\dots,\tau_{n_2})$.

Доказательство. Как в доказательстве леммы 12, мы будем предполагать без ограничения общности, что $n_2 = 0$ и $n_1 = 1$. Пусть $\mathcal{W}_1$ – объединение всех неприводимых над $\overline{k}$ компонент E многообразия $(W \times \mathbb{A}^1(\overline{k})) \cap \mathcal{Z}(L_{1,s+1},\dots,L_{1,\sigma}) \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1})$, таких, что E не содержится ни в какой гиперплоскости $\mathcal{Z}(\tau_1 - z)$, $z \in \overline{k}$, и $E \not\subset \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$. Тогда произвольный многочлен $h \in \overline{k}[X_0,\dots,X_n,\tau_1]$, однородный относительно $X_0,\dots,X_n$, обращается в нуль тождественно на $W_{\lambda_1}(\overline{k(\tau_1)}) \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$ в том и только в том случае, если h обращается в нуль тождественно на $\mathcal{W}_1$.

Согласно свойству 2) из $(*)$, имеем $\dim(W_{\lambda_j}(\overline{k(\tau_1,\dots,\tau_{n_j})} \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) = 1$, $j = 1,2$. Поэтому $\dim \mathcal{W}_1 = 2$. Размерность каждой неприводимой компоненты многообразия $(W \times \mathbb{A}^1(\overline{k})) \cap \mathcal{Z}(L_{1,s+1},\dots,L_{1,\sigma}) \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1})$ не меньше 2. Следовательно, как в доказательстве леммы 12, мы получаем, что

$$(\mathcal{W}_1 \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) \cap \mathcal{Z}(\tau_1 - \tau'_1) = (W_{\lambda_2} \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)) \times \{\tau'_1\}.$$

По лемме 2 многочлен $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}/(\tau_1 - \tau'_1)^\gamma$ ненулевой. Подставим

$$Z_0 = L^{(1)}_0(e_0,\dots,e_r), \quad Z_n = L^{(1)}_n(e_0,\dots,e_r), \quad Z_{n+1} = e_{1,n+1}$$

в $\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}/(\tau_1 - \tau'_1)^\gamma$. Согласно лемме 3, полученный многочлен обращается в нуль тождественно на

$$W_{\lambda_1}(\overline{k(\tau_1)}) \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$$

и, следовательно, на $\mathcal{W}_1$. Поэтому если подставить $Z_0 = L^{(2)}_0(e_0,\dots,e_r)$, $Z_n = L^{(2)}_n(e_0,\dots,e_r)$ в $(\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}/(\tau_1 - \tau'_1)^\gamma)|_{\{\tau_1=\tau'_1\}}$, то полученный многочлен обращается в нуль тождественно на $W_{\lambda_2} \cap \mathcal{Z}(e^{(1)}_{\sigma+1},\dots,e^{(1)}_{n-1}) \setminus \mathcal{Z}(e_0,\dots,e_r)$. Следовательно, по лемме 3 многочлен $\Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)},+}$ делит $(\Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}/(\tau_1 - \tau'_1)^\gamma)|_{\{\tau_1=\tau'_1\}}$. По лемме 2

$$\deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_1,\lambda_1,L^{(1)},*}/(\tau_{n_1} - \tau'_{n_1})^\gamma = \deg_{Z_{n+1}} \Phi_{c_2,\lambda_2,L^{(2)},*} = \deg p'_v \deg W'.$$

Отсюда вытекает первое утверждение леммы. Второе утверждение немедленно следует из второго утверждения леммы 12. Лемма доказана. □

Предположим, что поле k снабжено вещественной структурой (она индуцирует вещественную структуру на $\overline{k}$), см. [15]. Пусть $\varepsilon_i > 0$ – бесконечно малая величина относительно поля $k_i = k(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{i-1})$ для всякого целого числа $i \geqslant 1$. Поле $\overline{k_i}$ снабжено вещественной структурой, см. [15]. Определено отображение стандартной части $\mathrm{st}_i : \mathbb{P}^n(\overline{k_i}) \to \mathbb{P}^n(\overline{k})$ (мы будем использовать одно и то же обозначение для всех n, это не приведёт к двусмысленности), см. [15]. Именно, для всякого $z \in \mathbb{P}^n(\overline{k_i})$ элемент $\mathrm{st}_i(z) \in \mathbb{P}^n(\overline{k})$ бесконечно близок к z (стандартная часть $\mathrm{st}_i(z)$ однозначно определена этим свойством). Для всякой точки $z \in \mathbb{A}^n(\overline{k_i})$, такой, что всякая её координата не является бесконечно большой относительно поля k, имеем $\mathrm{st}_i(z) \in \mathbb{A}^n(\overline{k})$. В частности, если элемент $z \in \overline{k_i}$ не является бесконечно большим относительно поля k, то $\mathrm{st}_i(z) \in \overline{k}$.

Лемма 14. *В обозначениях из введения предположим, что точка* $(c', \lambda, L') \in \mathbb{A}^\nu(\overline{k})$ *удовлетворяет свойствам* 1) *и* 2) *из* $(*)$. *Пусть* $i \geqslant 1$ *– целое число. Предположим, что* $(c'', \lambda', L'') \in \mathbb{A}^\nu(\overline{k_i})$ *и*

$$\mathrm{st}_i((c'', \lambda', L'')) = (c', \lambda, L').$$

Заменим в (8)–(14), (7), (10) *элементы* c', λ, L' *и поле* k *на* c'', λ', L'' *и поле* $\overline{k_i}$ *соответственно* (*мы не предполагаем сейчас, что выполняется условие* (C) *для* (c'', λ', L'') *над каким-либо полем*). *Тогда* $\dim W'(c'', \lambda') = \dim W'(c'', \lambda', L'') = n - \sigma$, $\dim W'(c'', \lambda', *) = \dim W'(c'', \lambda', L'', *) = 1$, *морфизмы* $p_{\lambda', L''}$, $p_{\lambda', L'', *}$ *являются доминантными и*

$$\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda')) \supset W'(c', \lambda), \quad \mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', L'')) \supset W'(c', \lambda, L'),$$

$$\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', *)) \supset W'(c', \lambda, *), \quad \mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', L'', *)) \supset W'(c', \lambda, L', *).$$

Доказательство. Пусть $\lambda' = (L'_{s+1}, \dots, L'_\sigma)$, $L'' = (L''_0, L''_{\sigma+1}, \dots, L''_n)$ и $e''_j = L''_j(e_0, \dots, e_r)$ для всех j. Из свойств 1) и 2) для (c', λ, L') следует, что (c', λ, L') удовлетворяет условию (D), см. начало раздела. Следовательно (см. последнее наблюдение перед леммой 1), точка (c'', λ', L'') также удовлетворяет условию (D). Поэтому морфизмы $p_{\lambda', L''}$ и $p_{\lambda', L'', *}$ являются доминантными.

Следовательно,

$$\dim W'(c'', \lambda') = \dim W'(c'', \lambda', L'') = n - \sigma,$$

$$\dim W'(c'', \lambda', *) = \dim W'(c'', \lambda', L'', *) = 1.$$

Для всякой точки $y \in W_{\lambda'}$, которая не является бесконечно близкой к $\mathcal{Z}(e'_0, e'_{\sigma+1}, \ldots, e'_n)$ относительно поля k, справедливо равенство

$$p_{c',\lambda,L'}(\mathrm{st}_i(y)) = \mathrm{st}_i(p_{c',\lambda,L'}(y)).$$

Поэтому, используя принцип переноса или непосредственно, мы получаем, что $\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', L''))$ содержит плотное относительно топологии Зариского подмножество многообразия $W'(c', \lambda, L')$. По лемме 1 из [12] всякая неприводимая компонента алгебраического многообразия $\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', L''))$ имеет размерность $n - \sigma$. Следовательно, $\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', L'')) \supset W'(c', \lambda, L')$. Включения $\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda')) \supset W'(c', \lambda)$, $\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', *)) \supset W'(c', \lambda, *)$ и $\mathrm{st}_i(W'(c'', \lambda', L'', *)) \supset W'(c', \lambda,\ L', *)$ доказываются аналогичным образом. Лемма доказана. $\square$

Литература

1. М. Бальдассарри, *Алгебраические многообразия.* М., Изд. иностр. лит., 1961.
2. Н. Бурбаки, *Коммутативная алгебра.* М., Мир, 1971.
3. Н. Г. Чеботарев, *Теория алгебраических функций.* М.-Л., ОГИЗ, 1948.
4. А. Л. Чистов, *Алгоритм полиномиальной сложности для разложения многочленов на неприводимые множители и нахождение компонент многообразия в субэкспоненциальное время.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **137** (1984), 124–188.
5. А. Л. Чистов, *Вычисление степеней алгебраических многообразий над полем нулевой характеристики за полиномиальное время и его приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **258** (1999), 7–59.
6. А. Л. Чистов, *Эффективная конструкция локальных параметров неприводимых компонент алгебраического многообразия.* — Труды С.-Петерб. мат. общ. **7** (1999), 230–266.
7. А. Л. Чистов, *Сильная версия основного разрешающего алгоритма для экзистенциональной теории первого порядка вещественно замкнутых полей.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **256** (1999), 168–211.
8. А. Л. Чистов, *Эффективная гладкая стратификация алгебраического многообразия в нулевой характеристике и её приложения.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **266** (2000), 254–311.
9. А. Л. Чистов, *Монодромия и критерии неприводимости с алгоритмическими приложениями в нулевой характеристическе.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **292** (2002), 130–152.
10. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* I. — Зап. научн. семин. ПОМИ **307** (2004), 189–235.
11. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* II. — Зап. научн. семин. ПОМИ **325** (2005), 181–224.

12. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* III. — Зап. научн. семин. ПОМИ **344** (2007), 203–239.
13. А. Л. Чистов, *Вычисление степени доминантного морфизма в нулевой характеристике за полиномиальное время.* IV. — Зап. научн. семин. ПОМИ **360** (2008), 260–294.
14. А. Л. Чистов, *Оценка степени системы уравнений, задающей многообразие приводимых многочленов.* — Алгебра и анализ **24**, вып. 3 (2012), 199–222.
15. A. L. Chistov, *Polynomial-time computation of the dimensions of components of algebraic varieties in zero-characteristic.* — J. Pure Appl. Algebra **117 & 118** (1997), 145–175.
16. A. Chistov, H. Fournier, L. Gurvits, P. Koiran, *Vandermonde matrices, NP-completeness, and transversal subspaces.* — Found. Comput. Math. **3**, no. 4 (2003), 421–427.
17. J. Bochnak, M. Coste, M.-F. Roy, *Géométrie algébrique réelle.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg–New York, 1987.
18. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry.* Springer-Verlag, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.
19. C. Jordan, *Traité des substitutions et des équations algébriques.* Paris, 1870, pp. 277–279.
20. O. Zariski, *Pencils on an algebraic variety and a new proof of a theorem of Bertini.* — Trans. Amer. Math. Soc. **50** (1941), 48–70.

Chistov A. L. A deterministic polynomial-time algorithm for the first Bertini theorem. I.

Consider a projective algebraic variety W that is an irreducible component of the set of all common zeros of a family of homogeneous polynomials of degree less than d in $n+1$ variables in zero characteristic. Consider a linear system on W given by homogeneous polynomials of degree d'. Under the conditions of the first Bertini theorem for W and this linear system, we show how to construct an irreducible divisor in general position from the statement of this theorem. The algorithm is deterministic and polynomial in $(dd')^n$ and the size of the input.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
наб. р. Фонтанки, д. 27,
191023 С.-Петербург,
Россия
E-mail: alch@pdmi.ras.ru

Поступило 4 февраля 2013 г.