Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 411, 2013 г.

И. А. Пушкарев, В. А. Бызов

ПОВОРОТЫ ПЕРВОГО УРОВНЯ НА МНОЖЕСТВЕ ПЛОСКИХ ДЕРЕВЬЕВ

§1. Простой поворот

В данной работе используется терминология и система определений, введенная в [7]. Простой поворот, как и преобразование Донахью, действует на множестве плоских кубических деревьев с висячим корнем (ПКДВК). Напомним основные определения.

(1) У любого ПКДВК есть выделенная вершина – (висячий) корень – имеющая ровно одного сына.

(2) Все остальные вершины ПКДВК делятся на два непересекающихся класса: листья и нелистья. Каждый нелист имеет ровно двух сыновей – левого и правого. Лист не имеет сыновей и вообще потомков.

Пусть α_0 – сын корня ПКДВК T, α_1 – правый сын вершины α_0, α_2 – правый сын вершины α_1 и т. д., α_n – правый сын вершины α_{n-1} и при этом лист. Последовательность вершин $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ назовем *старшей правой цепью*. Все вершины этой цепи кроме α_n являются, в свою очередь, корнями дочерних деревьев (сыном корня дочернего дерева, корнем которого является α_j, является левый сын этой вершины). Дерево с корнем α_i обозначим $T_i = T_i(\alpha_i)$, а в целом данную ситуацию запишем в виде формулы

$$T = |T_0(\alpha_0), T_1(\alpha_1), \ldots, T_{n-1}(\alpha_{n-1}), \alpha_n\rangle, \tag{1}$$

которую назовем *правым разложением* дерева T.

Аналогично определяется *левое разложение* дерева T:

$$T = \langle\beta_0, T_1(\beta_1), \ldots, T_m(\beta_m)|, \tag{2}$$

где β_0 – лист, β_m – сын корня.

Ключевые слова: плоские деревья, преобразование Донахью, простой поворот плоских деревьев, граф поворотов, орбита поворота.

Работа выполнена в рамках ФЦП "'Научные и научно-педагогические кадры инновационной России' на 2009–2013 годы", соглашение 14.B37.21.1641 от 1 октября 2012 г.

Во избежание недоразумений отметим, что в работе для чисел Каталана используется обозначение $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$, так что количество ПКДВК с n листьями равно C_{n-1}.

Определение 1.1. Пусть $T = |T_0(\alpha_0), T_1(\alpha_1), \ldots, T_{n-1}(\alpha_{n-1}), \alpha_n\rangle$ – правое разложение ПКДВК T. Простым поворотом назовем преобразование, переводящее T в дерево $\gamma(T) = \langle\alpha_0, T_0(\alpha_1), \ldots, T_{n-1}(\alpha_n)|$.

В данном виде простой поворот определен как преобразование помеченного ПКДВК, причем различными можно считать и вершины, и ребра ПКДВК, вместе или по отдельности. Однако можно рассматривать его и как преобразование непомеченного ПКДВК.

Рис. 1 показывает, как преобразуется дерево при простом повороте.

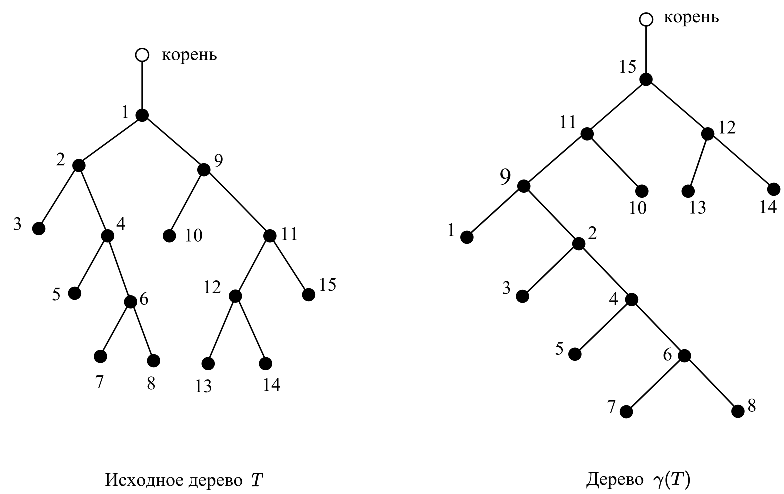

Рис. 1. Преобразование дерева при простом повороте.

Основной вопрос о распределении длин орбит преобразования для простого поворота решается сравнительно просто (по сути ответ давно известен) при помощи перехода к другой стандартной комбинаторной интерпретации чисел Каталана – вершинным триангуляциям многоугольника, который в данном случае удобно считать правильным.

Наглядное представление о биекции между ПКДВК и вершинными триангуляциями правильного $(n+1)$-угольника с выделенной стороной, соответствующей висячему корню, дает рис. 2.

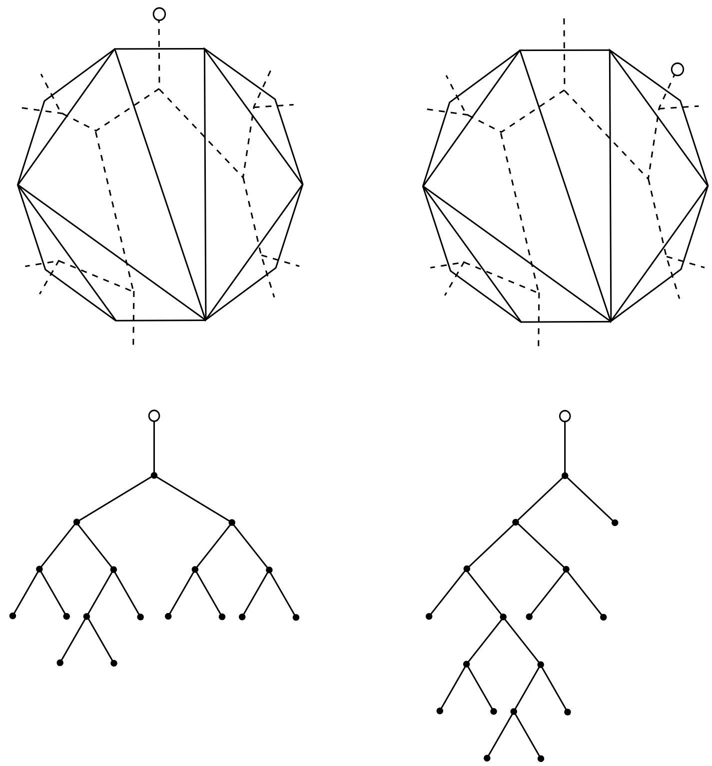

Рис. 2. Биекция между ПКДВК и вершинными триангуляциями многоугольников с выделенной стороной. Простой поворот как поворот триангуляции.

В терминах триангуляций (при рассмотрении помеченного варианта) простой поворот есть просто перенос выделенной стороны на следующую сторону $(n+1)$-угольника по часовой стрелке. Поэтому длина помеченной орбиты для дерева с n листьями равна $n+1$.

Соответственно, деревьям, длина непомеченной орбиты которых является собственным делителем числа $n+1$, соответствуют триангуляции с нетривиальным стабилизатором в группе собственных самосовмещений правильного $(n+1)$-угольника (то есть в группе поворотов на углы, кратные $\frac{2\pi}{n+1}$). Центр правильного $(n+1)$-угольника может лежать либо на ребре триангуляции, либо внутри одной из треугольных граней, поэтому стабилизатор триангуляции может быть только группой Z_2 или Z_3. Это исчерпывающим образом решает вопрос о распределении длин орбит простого поворота.

Теорема 1.1.

(1) *Длина орбиты простого поворота помеченного ПКДВК с n листьями равна $n+1$.*

(2) *Длина орбиты простого поворота непомеченного ПКДВК с n листьями может быть равна $n+1$, $\frac{n+1}{2}$ или $\frac{n+1}{3}$.*

(3) *Количество деревьев с n листьями, имеющих длину орбиты простого поворота $\frac{n+1}{2}$, равно $(\frac{n+1}{2})\cdot C_{\frac{n-1}{2}}$ при нечетном n и нулю при четном n.*

(4) *Количество деревьев с n листьями, имеющих длину орбиты простого поворота $\frac{n+1}{3}$, равно $(\frac{n+1}{3})\cdot C_{\frac{n-2}{3}}$ при $n\equiv 2 \pmod 3$ и нулю при прочих n.*

(5) *Количество непомеченных циклов простого поворота деревьев с n листьями равно*

$$U(n)=\frac{1}{n+1}(C_{n-1}+\{C_{\frac{n-1}{2}}\}+2\cdot\{C_{\frac{n-2}{3}}\}),$$

где $\{x\}=x$, если x определено, а иначе $\{x\}=0$.

Замечание. Полученное распределение встречается очень часто, например при рассмотрении 3-кластеров (см. [2]) или флексагонов (см. [3]).

§2. Граф поворотов первого уровня

Рассмотрим ориентированный граф G_n, вершинами которого являются всевозможные разложения числа $n-1$ в сумму упорядоченных натуральных слагаемых. Такие разложения принято называть *композициями* (см., например, [4]).

Ребрам графа G_n соответствуют всевозможные ПКДВК с n листьями. Точнее, из вершины $\overline{x}=(x_0,x_1,...,x_k)$ в вершину $\overline{y}=(y_0,y_1,...,y_m)$

идут ребра, соответствующие тем и только тем ПКДВК, у которых левое разложение имеет вид

$$T = \langle \alpha_0, T_0(\alpha_1), \dots, T_k(\alpha_{k+1})|, \tag{3}$$

причем количество листьев дерева $T_i(\alpha_{i+1})$ равно x_i, и одновременно правое разложение имеет вид

$$T = |S_0(\beta_0), \dots, S_m(\beta_m), \beta_{m+1}\rangle, \tag{4}$$

где количество листьев дерева $S_i(\beta_i)$ равно y_i.

Сразу заметим, что ребра, идущие из вершины $\overline{x}$ в вершину $\overline{y}$, соответствуют деревьям вида (3), для которых

$$S_0(\beta_0) = \langle \alpha_0, T_0(\alpha_1), \dots, T_{k-1}(\alpha_k)|, \tag{5}$$

или, симметрично, деревьям вида (4), для которых

$$T_k(\alpha_{k+1}) = |S_1(\beta_1), \dots, S_m(\beta_m), \beta_{m+1}\rangle. \tag{6}$$

Очевидно, что в этом случае $x_k = (\sum_{i=1}^{m} y_i) + 1$, $y_0 = (\sum_{i=0}^{k-1} x_i) + 1$.

Количество таких деревьев (то есть количество кратных ребер, идущих из вершины $\overline{y}$ в вершину $\overline{x}$) равно

$$\theta(\overline{x}, \overline{y}) = \prod_{i=0}^{k-1} C_{x_i - 1} \cdot \prod_{j=1}^{m} C_{y_j - 1}. \tag{7}$$

Отметим, что в этом случае

$$\sum_{i=0}^{k-1} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j = n - 2. \tag{8}$$

Очевидно, что количество вершин графа G_n есть 2^{n-2}, а количество ребер равно числу Каталана C_{n-1}.

Например, для $n = 5$ данный граф имеет вид, изображенный на рис. 3.

Отметим два простых, но важных для дальнейшего свойства графа G_n.

Теорема 2.1.

(1) *Граф G_n эйлеров.*

(2) *Все простые ориентированные циклы графа G_n проходят через вершину $(n-1)$.*

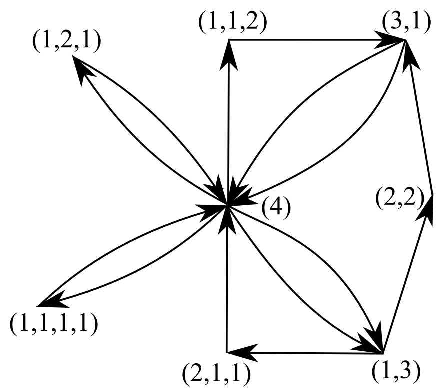

Рис. 3. Граф G_5.

Доказательство. 1. Граф G_n эйлеров, так как количество деревьев вида (3) равно количеству деревьев вида

$$T = |T_0(\alpha_0), \ldots, T_k(\alpha_k), \alpha_{k+1}\rangle. \tag{9}$$

2. Напомним что если вершины

$$\overline{x} = (x_0, x_1, \ldots, x_k) \quad \text{и} \quad \overline{y} = (y_0, y_1, \ldots, y_m)$$

соединены ребром, то $y_0 = (\sum_{i=0}^{k-1} x_i) + 1$, поэтому $y_0 > x_0$ – за исключением того случая, когда $y_0 = 1$. Следовательно, любой ориентированный цикл в графе G_n содержит ребро, соответствующее дереву, для которого $y_0 = 1$. Осталось заметить, что такое ребро обязательно начинается в вершине $(n-1)$. □

Определение 2.1.

(1) Граф G_n назовем *графом поворотов первого уровня.*

(2) Разбиение всех ребер графа G_n на ориентированные циклы назовем *поворотом первого уровня.* (Заметим, что множество таких разбиений непусто именно потому, что граф эйлеров.)

(3) Циклы, на которые конкретный поворот разбивает ребра графа G_n, назовём *орбитами этого поворота.*

Теорема 2.2. *Простой поворот и преобразование Донахью являются поворотами первого уровня.*

Принадлежность простого поворота к поворотам первого уровня совершенно очевидна. Она проиллюстрирована на рис. 4. Если заметить, что преобразование Донахью состоит в том, что сначала осуществляется простой поворот, а затем без изменения количества листьев преобразуются (по отдельности) левые поддеревья, то вторая половина теоремы 2.2 также становится очевидной.

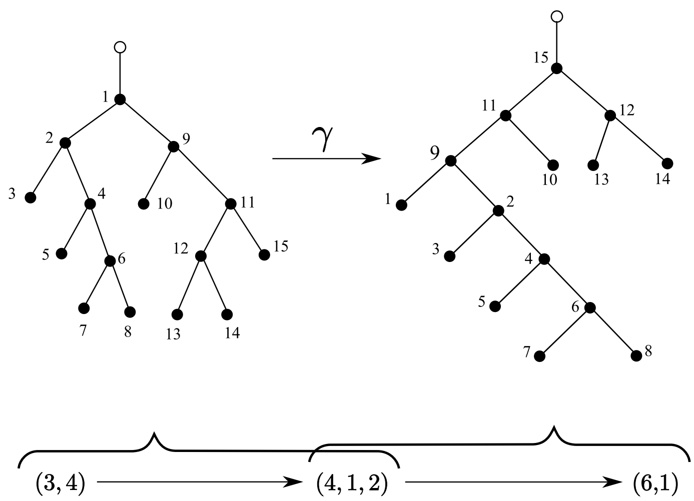

Рис. 4. Простой поворот как поворот первого уровня.

§3. Общее количество поворотов первого уровня

Теорема 2.2 мотивирует нас к рассмотрению множества всех поворотов первого уровня, которое удобно начать с изучения эйлеровых циклов в графе G_n, являющихся, можно сказать, *эргодическими* поворотами первого уровня.

Упорядочим вершины графа G_n лексикографически: первой вершиной является $(n-1)$, второй – $(n-2,1)$ и так далее, последней является вершина $\underbrace{(1,1,\ldots,1)}_{n-1}$. Соответствующая этому упорядочению матрица Кирхгофа графа G_n отличается от верхнетреугольной только первым столбцом. Это следует из сделанного ранее замечания о монотонном увеличении слагаемого x_0 композиции при переходе по ребру, если только это ребро не выходит из вершины $(n-1)$. Поэтому главный минор этой матрицы, получающийся вычеркиванием первой строки и первого столбца, является определителем верхнетреугольной матрицы и равен произведению диагональных элементов матрицы – полустепеней всех вершин графа G_n кроме вершины $(n-1)$.

Полустепень вершины $(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ равна количеству деревьев с левым разложением вида (3), то есть произведению $\prod_{i=0}^{k} C_{x_i-1}$.

Соответственно, степень, в которой число C_{i-1} входит как множитель в рассматриваемый минор, равна количеству $f_{n-1,i}$ появлений числа i как слагаемого во всевозможных композициях числа $n-1$.

В работе [4] показано, что $f_{n,1} = (n+2)2^{n-3}$ при $n \geqslant 2$ (исключая очевидное значение $f_{1,1} = 1$) и $f_{n,i} = f_{n-i+1,1} = (n-i+3)2^{n-i-2}$ при $n \geqslant i$.

Соответственно, количество остовных деревьев в графе G_n, растущих из вершины $(n-1)$, есть

$$T(G_n) = \prod_{k=1}^{n-2} (C_{k-1})^{(n-k+2)2^{n-k-3}}. \tag{10}$$

Отметим, что в эйлеровом орграфе количество остовных деревьев, растущих из вершины, не зависит от этой вершины (это простое следствие теоремы BEST, см. [5] или [6]).

Используя теорему BEST, получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Количество эйлеровых циклов в графе G_n равно*

$$C(G_n) = T(G_n) \prod_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n-1} (C_{i_1-1}C_{i_2-1}\ldots C_{i_k-1} - 1)!$$

$$= \prod_{k=1}^{n-2} (C_{k-1})^{(n-k+2)2^{n-k-3}} \cdot \prod_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n-1} (C_{i_1-1}C_{i_2-1}\ldots C_{i_k-1} - 1)!,$$

где произведение берется по всем композициям числа $n-1$.

На противоположном полюсе рассмотрения находятся *примитивы* – повороты первого уровня, содержащие максимально возможное количество орбит, другими словами, являющиеся объединением вершинно-простых циклов. Согласно доказательству теоремы 2.1, цикл в графе G_n является вершинно-простым тогда и только тогда, когда он проходит через вершину $(n-1)$ ровно один раз. Напомним, что вершина $(n-1)$ соответствует переходам от деревьев вида $|T_0(\alpha_0), \alpha_1\rangle$ к деревьям вида $\langle\beta_0, T_1(\beta_1)|$, в которых правая (соответственно левая) цепочка потомков сына корня имеет длину 2.

Для прояснения ситуации введем на множестве поворотов первого уровня одно отношение эквивалентности и одновременно определим одно соответствие между поворотами и перестановками деревьев с $n-1$ листьями.

Определение 3.1.

(1) Пусть ξ и ζ – два поворота первого уровня. Назовем их *эквивалентными*, если для любого дерева T из того, что $\xi(T) \neq \zeta(T)$, обязательно следует, что $T = |T_0(\alpha_0), \alpha_1\rangle$. Другими словами, эквивалентные повороты могут различаться только своим поведением в вершине $(n-1)$.

(2) Пусть ξ – поворот, $T = |T_1(\alpha_0), \alpha_1\rangle$. Рассмотрим наименьшее натуральное k, такое, что $\xi^k(T) = |T_2(\beta_0), \beta_1\rangle$. Положим $(\sigma(\xi))(T_1) = T_2$. Тем самым, повороту ξ сопоставлена перестановка $\sigma(\xi)$ деревьев с $n-1$ листьями.

Заметим, что в каждом классе эквивалентности полученное соответствие σ между поворотами и перестановками деревьев является биекцией. При этом количество орбит поворота ξ равно количеству циклов перестановки $\sigma(\xi)$. В частности, ξ является эйлеровым циклом тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi)$ – полный цикл, а примитивом тогда и только тогда, когда $\sigma(\xi)$ – тождественная перестановка. Рисунок 5 иллюстрирует соответствие между произвольным поворотом первого уровня, эквивалентным ему примитивом и перестановкой. Предостережение: на рисунке изображена не часть графа G_n, вершинам соответствуют деревья, а ребрам – переходы при повороте. Сплошной линией изображен участок орбиты поворота ξ, пунктиром – переключения, превращающие поворот в примитив, точечные стрелки изображают перестановку $\sigma(\xi)$.

Очевидно, что в каждом классе рассмотренной эквивалентности содержится ровно один примитив и ровно $(C_{n-2}-1)!$ эйлеровых циклов, поэтому количество примитивов в графе G_n есть $\frac{C(G_n)}{(C_{n-2}-1)!}$. Тем самым доказан следующий результат.

Теорема 3.2. *Количество примитивов в графе G_n равно*

$$P(G_n) = T(G_n) \prod_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n-1,\ k\geq 2} (C_{i_1-1}C_{i_2-1}\ldots C_{i_k-1}-1)!$$

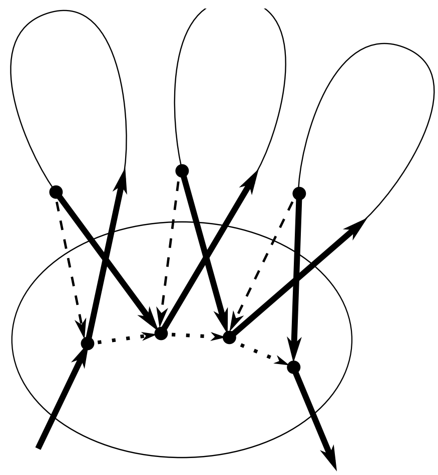

Рис. 5. Соответствие σ.

$$= \prod_{k=1}^{n-2} (C_{k-1})^{(n-k+2)2^{n-k-3}} \cdot \prod_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n-1,\ k\geq 2} (C_{i_1-1}C_{i_2-1}\ldots C_{i_k-1}-1)!,$$

где произведение берется по всем композициям числа $n-1$ *кроме тривиальной композиции* $(n-1)$.

Биекция σ и теорема 3.2 позволяют вычислить общее количество поворотов первого уровня.

Следствие 3.3. *Количество различных поворотов первого уровня равно*

$$\begin{aligned} R_n &= T(G_n) \cdot (C_{n-2})! \cdot \prod_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n-1,\ k\geq 2} (C_{i_1-1}C_{i_2-1}\ldots C_{i_k-1}-1)! \\ &= \prod_{k=1}^{n-2} (C_{k-1})^{(n-k+2)2^{n-k-3}} \times (C_{n-2})! \\ &\times \prod_{i_1+i_2+\ldots+i_k=n-1,\ k\geq 2} (C_{i_1-1}C_{i_2-1}\ldots C_{i_k-1}-1)!, \end{aligned}$$

где произведение берется по всем композициям числа $n-1$ *кроме тривиальной композиции* $(n-1)$.

§4. Среднее количество орбит поворотов первого уровня

Рассмотренное выше соответствие σ переводит орбиты поворота ξ в точности в циклы перестановки $\sigma(\xi)$. Это позволяет очень быстро решить вопрос о скорости роста среднего количества орбит в повороте первого уровня. Обозначим символом L_n среднее количество циклов в случайном покрытии циклами графа G_n, иными словами, среднее количество орбит поворота первого уровня. Это количество равно среднему количеству циклов в случайной перестановке (C_{n-2})-элементного множества, которое растет как $\ln(C_{n-2})$. Тем самым получен следующий результат.

Следствие 4.1. *При* $n \to \infty$ *имеем* $L_n \sim \ln(C_{n-2}) = (\ln 4)n(1 + o(1))$.

Заметим, что эта линейная асимптотика не родственна полученной в [7] линейной нижней оценке для числа орбит преобразования Донахью, а, если можно так выразиться, “ортогональна” ей.

Более того, следствие 4.1 не может служить в качестве оценки “неудивительного” ожидаемого количества орбит преобразования Донахью, которое, в отличие от произвольного поворота первого уровня (в частности, в отличие от простого поворота), имеет нетривиальный *альтернирующий инвариант* (см. [7]), введение которого в рассмотрение закономерно изменяет характер роста среднего количества орбит поворота.

Напомним, что преобразование Донахью переводит ПКДВК, имеющие ровно k левых листьев и $n-k$ правых, только в деревья, у которых ровно $n-k$ левых листьев и k правых.

Рассмотрим остовной подграф $G_{\{k,\,n-k\}}$ графа G_n, содержащий только ребра, соответствующие деревьям, имеющим либо k левых листьев и $n-k$ правых, либо, наоборот, $n-k$ левых листьев и k правых.

Граф $G_{\{k,\,n-k\}}$ эйлеров, так как орбиты преобразования Донахью с соответствующими значениями альтернирующего инварианта образуют однократное покрытие всех его ребер непересекающимися циклами.

Количество ребер в графе $G_{\{k,\,n-k\}}$ равно $N(n,k)+N(n,n-k)$ при $k \neq \frac{n}{2}$ и $N(n,\frac{n}{2})$ при $k=\frac{n}{2}$, где $N(n,k)$ – известные *числа Нараяны* $N(n,k)=\frac{1}{n}\binom{n}{k}\binom{n}{k-1}$ (см. [6]).

Определение 4.1.

(1) Поворот первого уровня ξ назовем *альтернированным*, если для дерева t, имеющего k левых листьев и $n-k$ правых, дерево $\xi(t)$ обязательно имеет $n-k$ левых листьев и k правых.

(2) Поворот первого уровня назовем *полуальтернированным*, если каждая его орбита целиком содержится в некотором графе $G_{\{k,\, n-k\}}$.

Замечание. Преобразование Донахью является альтернированным поворотом. Любой альтернированный поворот является также и полуальтернированным; обратное, очевидно, неверно.

Перенос на полуальтернированные повороты понятий предыдущего раздела требует небольшого уточнения. Соответствующая полуальтернированному повороту ξ перестановка $\sigma(\xi)$ уже не является случайной: она может перевести дерево с k левыми листьями только в пределах подграфа $G_{\{k,\, n-k\}}$, то есть только в дерево, имеющее либо k, либо $(n-k)$ левых листьев (напомним, что деревья, на множестве которых действует $\sigma(\xi)$, имеют то же самое количество левых листьев, что и ребра графа G_n, и на один правый лист меньше). Множество таких деревьев обозначим $T(k)$. Их количество $|T(k)|$ есть $N(n-1,k)+N(n-1,n-k)$ при $k \neq \frac{n+1}{2}$ и $N(n-1, \frac{n+1}{2})$ при $k = \frac{n+1}{2}$.

Соответственно, для выяснения порядка роста среднего количества орбит полуальтернированного поворота вместо группы перестановки всех деревьев, имеющих $n-1$ листьев, следует взять группу перестановок деревьев, относительно которых все множества $T(k)$ являются инвариантными. При этом среднее количество циклов будет равно не $\ln(C_{n-2})$, а $\sum_k \ln|T(k)|$.

Числа Нараяны, по крайней мере при $k \geq \varepsilon n$ (при фиксированном $\varepsilon > 0$), растут экспоненциально, поэтому в полученной сумме при $n \to \infty$ не менее $\frac{(1-\varepsilon)}{2} \cdot n$ слагаемых будут (по отдельности) расти как $Cn(1+o(1))$. Обозначив символом L'_n среднее количество орбит полуальтернированных поворотов, приходим к следующему результату.

Теорема 4.2. *При $n \to \infty$ имеем $L'_n \sim Cn^2(1+o(1))$.*

Замечание. Основной недостаток теоремы 4.2 как оценки для "неудивительного" количества циклов преобразования Донахью очевиден: она не учитывает то обстоятельство, что ребра графа $G_{\{k,\, n-k\}}$ при $k \neq \frac{n}{2}$ покрашены в два цвета, а орбиты поворота должны быть *чередующимися* циклами.

Чередование цветов может привести к увеличению их среднего количества: короткому циклу проще “оказаться” чередующимся.

Авторы работы планируют в ближайшем будущем избавиться от этого недостатка. Кроме того, возможно, существуют и другие инварианты преобразования Донахью.

Литература

1. R. Donaghey, *Automorphisms on Catalan trees and bracketing.* — J. Combin. Theory, Ser. B. **29**, no. 1 (1980), 75–90.
2. F. Harary, E. M. Palmer, R. C. Read, *On the cell-growth problem for arbitrary polygons.* — Discrete Math. **11** (1975), 371–389.
3. C. O. Oakley, R. J. Wisner, *Flexagons.* — Amer. Math. Monthly **64** (1957), 143–154.
4. P. Z. Chinn, G. Colyer, M. Flashman, E. Migiliore, *Cuisenaire rods go to college.* — PRIMUS: Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies **2**, no. 2 (1992), 118–130.
5. У. Татт, *Теория графов.* М., Мир, 1988.
6. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика.* М., Мир, 2005.
7. И. А. Пушкарёв, В. А. Бызов, *Преобразование Донахью: элементарный подход.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **411** (2013).

Pushkarev I. A., Byzov V. A. First-level rotations on the set of plane planted trees.

In this paper, we consider a family of transformations of plane planted trees including as a special case the transformation introduced by R. Donaghey and studied by the authors earlier.

Вятский государственный университет,
ул. Московская, д. 36,
610000 Киров, Россия
E-mail: god_sha@mail.ru

Поступило 19 декабря 2012 г.