

И. А. Пушкарев, В. А. Бызов

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДОНАХЬЮ: ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДХОД

§1. ВВЕДЕНИЕ

Преобразование плоских деревьев, рассматриваемое в данной работе, по-видимому, впервые было введено Р. Донахью (R. Donaghey) в [1]. Кроме определения в этой работе были обозначены основные естественные задачи, а общая задача о вычислении длин орбит этого преобразования сведена к рассмотрению орбит частного класса, так называемых *примитивных деревьев*. Последние были связаны автором с числами Моцкина. Насколько нам известно, более к этой теме Р. Донахью не возвращался. Позднее это преобразование изучал А. Карттунен (A. Karttunen), который получил большой объем эмпирической информации, представленной в энциклопедии целочисленных последовательностей (см. [5]), и сформулировал несколько гипотез. В 2006 году это преобразование упоминал в своей работе [2] Д. Каллан (D. Callan). Однако он лишь констатировал его сложность и сразу перешел к исследованию более простого преобразования. Другие исследования этого преобразования авторам данной работы неизвестны.

Первый из авторов данной работы (независимо от Донахью) дал определение этого преобразования в [3] под названием “фрактальный поворот плоских деревьев” (название предложено К. П. Кохасем). В этой работе были приведены первое и второе определения преобразования Донахью (в обратном порядке) и обсуждались карусельный эффект и альтернирующий инвариант (теоремы 4.1, 4.3 и следствие 4.5).

Позднее в работе [4] первым из авторов были опубликованы теоремы 6.1 и 6.2 настоящей работы (без соответствующей им оценки количества орбит).

Данная работа является своего рода “промежуточным итогом” и посвящена систематическому обсуждению свойств рассматриваемого

Ключевые слова: плоское кубическое дерево с висячим корнем, преобразование Донахью, орбита преобразования, карусельный эффект, окаймление.

преобразования (которое мы будем называть “преобразованием Донахью” или “фрактальным поворотом плоских деревьев”), доказательство которых не требует применения развитых теорий.

§2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Преобразование Донахью действует на множестве плоских кубических деревьев с висячим корнем (для краткости будем использовать аббревиатуру ПКДВК; в качестве стандартного источника информации о ПКДВК можно указать, например, [6] или [7]) и может быть естественным образом перенесено на все остальные комбинаторные интерпретации чисел Каталана.

Напомним основные элементы структуры ПКДВК.

- (1) У любого ПКДВК есть выделенная вершина – (висячий) корень – имеющая ровно одного сына.
- (2) Все остальные вершины ПКДВК делятся на два непересекающихся класса: листья и нелистья. Каждый нелист имеет ровно двух сыновей – левого и правого. Лист не имеет сыновей и вообще потомков.

Пусть α_0 – сын корня ПКДВК T , α_1 – правый сын вершины α_0 , α_2 – правый сын вершины α_1 и т. д., α_n – правый сын вершины α_{n-1} и при этом лист. Последовательность вершин $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ назовем *старшей правой цепью*. Все вершины этой цепи кроме α_n являются, в свою очередь, корнями дочерних деревьев (сыном корня дочернего дерева, корнем которого является α_j , является левый сын этой вершины). Дерево с корнем α_i обозначим $T_i = T_i(\alpha_i)$, а данную ситуацию в целом запишем формулой

$$T = |T_0(\alpha_0), T_1(\alpha_1), \dots, T_{n-1}(\alpha_{n-1}), \alpha_n|, \quad (1)$$

которую назовем *правым разложением* дерева T .

Аналогично определяется *левое разложение* дерева T :

$$T = \langle \beta_0, T_1(\beta_1), \dots, T_m(\beta_m) \rangle, \quad (2)$$

где β_0 – лист, β_m – сын корня.

Определение 2.1 (индуктивное).

- (1) База индукции. Если T – тривиальное дерево, состоящее только из корня и сына корня, то $T' = T$.

- (2) Индукционный переход. Пусть T – ПКДВК и для всех ПКДВК S с меньшим количеством вершин их образ S' уже определен. Далее, пусть $T = [T_0(\alpha_0), T_1(\alpha_1), \dots, T_{n-1}(\alpha_{n-1}), \alpha_n]$ – правое разложение дерева T . Тогда образом T назовем дерево T' , левое разложение которого есть $T' = \langle \alpha_0, T'_0(\alpha_1), \dots, T'_{n-1}(\alpha_n) \rangle$.

В данном виде преобразование Донахью определено как преобразование помеченного ПКДВК (т.е. дерева, все вершины и ребра которого различны).

На рис. 1 показано, как под действием преобразования Донахью преобразуется помеченное ПКДВК.

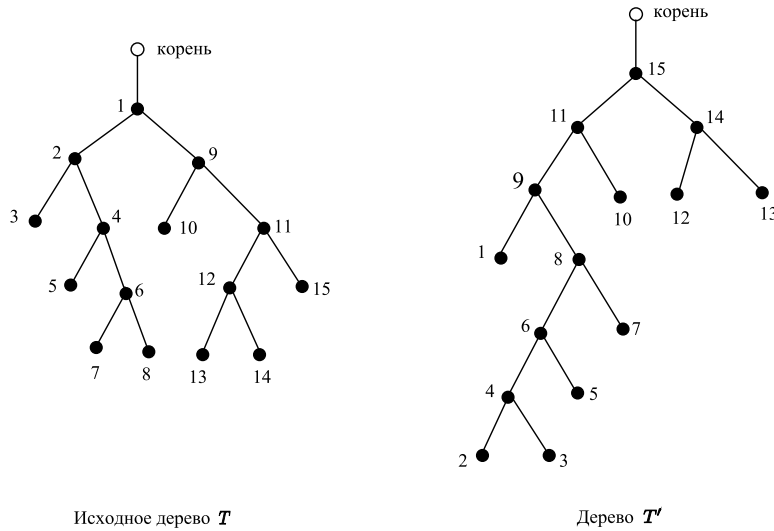


Рис. 1. Пример преобразования Донахью.

Другое определение преобразования Донахью естественным образом возникает из рассмотрения биекции между ПКДВК и плоскими (не обязательно кубическими) деревьями с висячим корнем (ПДВК). ПДВК отличается от ПКДВК тем, что его нелист может иметь любое натуральное количество упорядоченных сыновей (например, упорядоченных слева направо, так что, рассматривая ПКДВК как ПДВК, мы считаем левого сына первым, а правого последним).

Известно, что количество ПКДВК с n листьями равно количеству ПКДВК с n некорневыми вершинами; фактически это два из многочисленных определений чисел Каталана. Также хорошо известна биекция, доказывающая это равенство. При ней вершинам кубического дерева соответствуют *уголки* (между ребрами) некубического. Эта биекция проиллюстрирована на рис. 2.

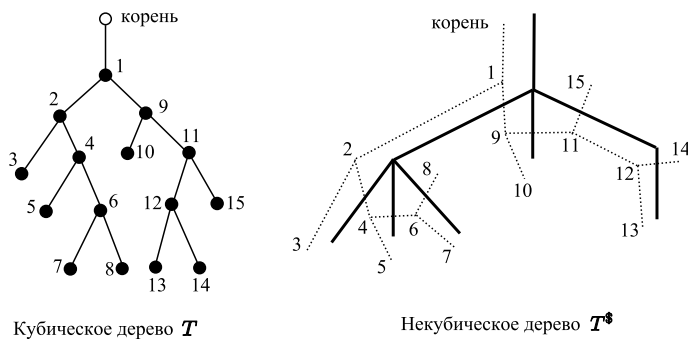


Рис. 2. Правая биекция между ПКДВК и ПДВК.

Указанная биекция имеет не только приведенный (назовем его *правым*), но и симметричный ему (*левым*) вариант, превращающий дерево T в дерево sT (рис. 3).

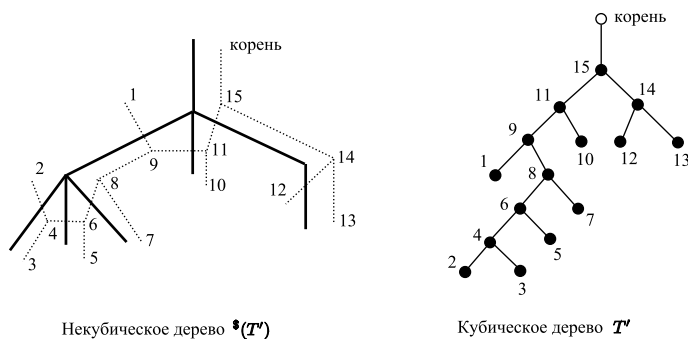


Рис. 3. Левая биекция между ПКДВК и ПДВК.

Совпадение правых деревьев на рис. 1 и 3 не случайно.

Определение 2.2. Пусть T – ПКДВК. Применим к нему правую биекцию, получим ПДВК T^{\S} . Применим к нему биекцию, обратную к левому варианту, получим новое ПКДВК T' . Назовем его образом дерева T .

Равносильность двух приведенных определений почти очевидна. Вершины некубического дерева при правой обратной биекции превращаются в правые пути в кубическом дереве, а при левой обратной – в левые пути, поэтому их длины равны, а деревья потомков располагаются в одном и том же порядке и подвергаются аналогичным преобразованиям. Это обстоятельство иллюстрирует рис. 4.

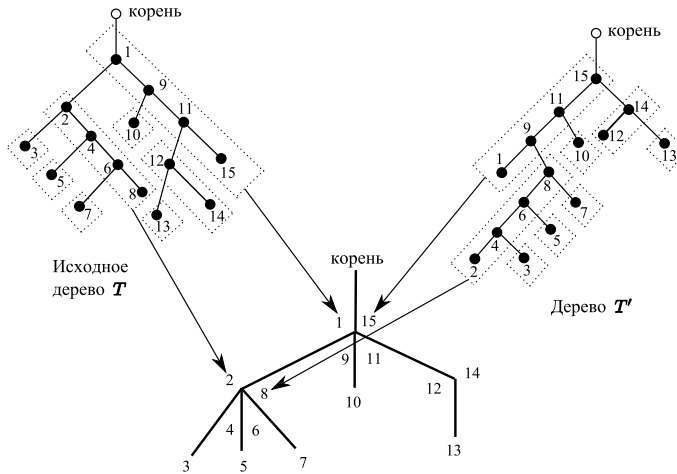


Рис. 4. Второе определение преобразования Донахью.

Заметим, что второе определение позволяет следить за перемещением под действием преобразования не только вершин, но и ребер кубического дерева. На рис. 2 и 3 хорошо видно, что одному ребру некубического дерева соответствуют по два ребра каждого кубического (как T , так и T') – “параллельное” и “перпендикулярное”. Естественно считать, что ребра дерева T переходят в соответствующие ребра дерева T' .

Третье определение разлагает преобразование Донахью в произведение двух инволюций и увязывает его еще с одной известной интерпретацией чисел Каталана, так называемыми *путями Дика*.

Именно, на множестве всех ПКДВК есть очень естественная инволюция σ (назовем ее транспонированием), делающая всех левых сыновей правыми и наоборот. На множестве путей Дика тоже есть естественная инволюция θ (назовем ее осевым отражением), соответствующая прохождению пути в обратном направлении (рис. 5). Кроме того, есть каноническая биекция φ , превращающая ПКДВК с n листьями в положительный путь, состоящий из $2(n - 1)$ шагов.

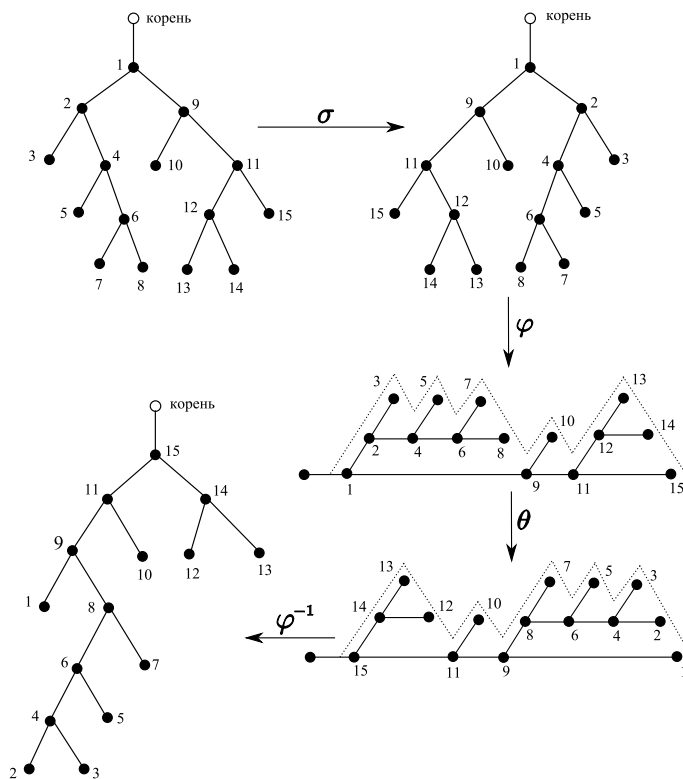


Рис. 5. Третье определение преобразования Донахью.

Определение 2.3. Преобразованием Донахью назовем композицию (преобразования выполняются справа налево) $\varphi^{-1} \circ \theta \circ \varphi \circ \sigma$.

Равносильность третьего определения второму следует из вида прямой биекции между положительными путями и некубическими деревьями, которую иллюстрирует рис. 6.

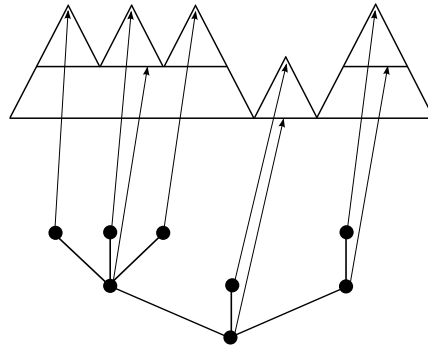


Рис. 6. Биекция между положительными путями и ПДВК.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Три вышеприведенных определения равносильны.*

§3. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ДОНАХЬЮ В ТЕРМИНАХ ДРУГИХ КОМБИНАТОРНЫХ ИНТЕРПРЕТАЦИЙ ЧИСЕЛ КАТАЛАНА

Преобразование Донахью в терминах плоских деревьев выглядит сравнительно сложным. Однако можно представить себе другую комбинаторную интерпретацию чисел Каталана, в терминах которой его свойства были бы более прозрачны.

Категорически утверждать, что такой интерпретации не существует, строго говоря, *нельзя*. Формально в качестве таковой можно рассмотреть, например, множество орбит преобразования Донахью деревьев фиксированного размера – как многоугольников, вершины которых помечены (деревьями, которым они соответствуют). При этом в каждом многоугольнике выделена одна вершина (соответствующая текущему дереву). Однако эта интерпретация, делающая прозрачными свойства рассматриваемого преобразования, сама оказывается крайне неестественной и непрозрачной. Например, неясно, сколько в ней (при известном размере деревьев) содержится многоугольников и каких именно.

Приведем описание преобразования Донахью в терминах двух важнейших (помимо деревьев) комбинаторных интерпретаций чисел Каталана: путей Дика и триангуляций многоугольников (с выделенной стороной, соответствующей корню ПКДВК).

На языке путей Дика (в силу третьего определения) достаточно описать транспонирование σ ПКДВК (см. рис. 7 и 8).

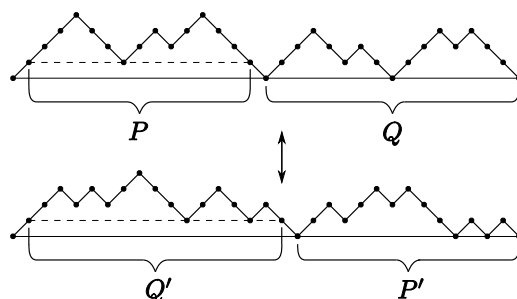


Рис. 7. Транспонирование ПКДВК на языке путей Дика: регулярный случай.

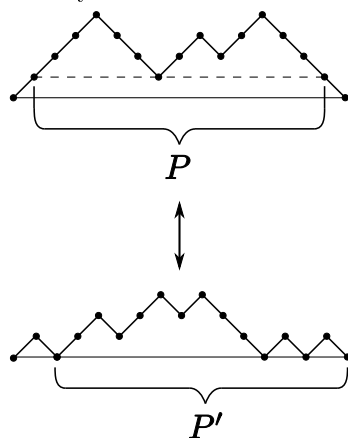


Рис. 8. Транспонирование ПКДВК на языке путей Дика: особый случай.

Приведем индуктивное описание транспонирования на языке путей Дика. База (для путей длины 2) очевидна.

Далее, всякий путь Дика единственным образом разбивается на *неприводимые подпути* вершинами нулевого уровня.

Если таковых подпутей несколько, выберем первый из них. (Случай, когда такой подпуть ровно один, пока исключим из рассмотрения.) Удалив из него первый и последний шаги, снова получим путь Дика, который обозначим символом P . Случай, когда получившийся путь P тривиален, тоже пока отложим. Оставшуюся часть рассматриваемого пути Дика обозначим символом Q . Преобразование путей, соответствующее транспонированию ПКДВК, состоит в том, чтобы, подвергнув (более простые) пути P и Q преобразованию *по отдельности* и получив соответственно пути P' и Q' , после этого поменять их местами (см. рис. 7).

В том случае, когда неприводимый подпуть единствен (будем называть этот случай *особым*), путь Q является тривиальным. Такие пути соответствуют кубическим деревьям, у которых тривиально поддерево левых потомков сына корня. Деревьям, у которых тривиально поддерево правых потомков сына корня, соответствуют пути Дика, начинающиеся с пика высоты 1, для которых тривиален подпуть P . Поэтому в особом случае аналог транспонирования деревьев выглядит так, как изображено на рис. 8, который как раз описывает два ранее отложенных случая.

Применяя после этого к полученным путям осевое отражение θ , получаем индуктивное описание преобразования Донахью в терминах путей Дика. Отметим, что сам Донахью рассматривал (помимо деревьев) преобразование в терминах *правильных расстановок скобок*, очень близких к путям Дика. Однако это рассмотрение носило служебный характер (при переходе к примитивным деревьям) и описанием преобразования в этих терминах не закончилось.

В терминах вершинных триангуляций многоугольников правым (и левым) последовательностям потомков соответствуют *гусеницы* – триангуляции, в которых все треугольники имеют общую вершину, расположенную справа (соответственно слева) от выделенной стороны n -угольника. Соответственно, триангуляцию следует разбить на гусеницы, после чего в каждой гусенице нужно перенести выделенную сторону на следующую (по часовой стрелке). На рис. 9 показан пример разбиения на гусеницы и последующего их поворота. На этом рисунке вместо некубического дерева для большей наглядности изображен “кактус” – еще одна комбинаторная интерпретация чисел Каталана

(почти тождественная некубическим деревьям). Гусеницы триангуляции в точности соответствуют нижним сторонам треугольников кактуса.

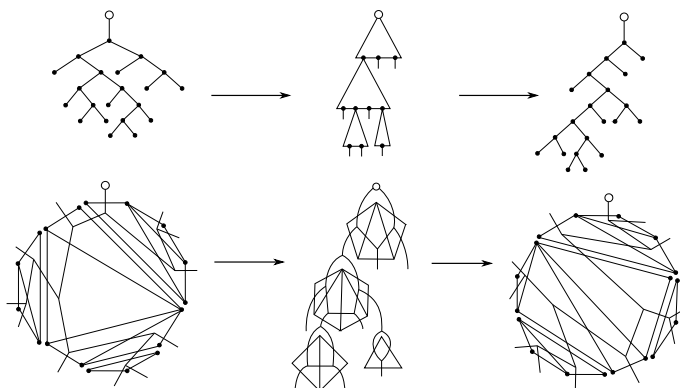


Рис. 9. Перенос преобразования Донахью на триангуляции многоугольников.

Абстрагируясь от деревьев и кактусов, приходим к следующему описанию преобразования Донахью в терминах триангуляций с выделенной стороной (см. рис 10).

- (1) Выделяем гусеницу, соответствующую правой вершине выделенной стороны триангуляции.
- (2) Отделяем ее от остальной триангуляции; оставшаяся часть триангуляции – дизъюнктное объединение нескольких меньших триангуляций, выделенными сторонами которых назначаются стороны, граничившие с отделенной гусеницей.
- (3) Применяем к полученным триангуляциям предыдущие два пункта – и повторяем эту процедуру, пока триангуляция окончательно не разложится на гусеницы.
- (4) В каждой получившейся гусенице переносим выделенную сторону на следующую по часовой стрелке.
- (5) Собираем получившуюся триангуляцию.

Полный перебор всех известных комбинаторных интерпретаций в рамках данной работы невозможен – и не нужен, потому что, при всей их многочисленности, они, как правило, очень близки либо к одному

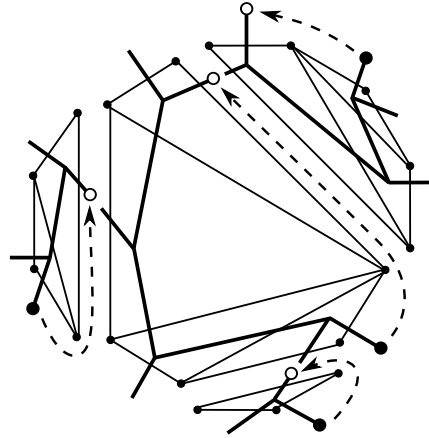


Рис. 10. Преобразование Донахью в терминах триангуляций многоугольников.

из двух рассмотренных видов деревьев (например, бинарные деревья, кактусы, неассоциативные произведения), либо к путям Дика (правильные расстановки скобок, арочные диаграммы, разнообразные варианты путей, параллелограммные полимино), либо к триангуляциям многоугольников (положительно определенные трехдиагональные матрицы из натуральных чисел с определителем 1 и единицами вне главной диагонали). Остается добавить, что прекрасная коллекция комбинаторных интерпретаций чисел Каталана приведена в [7].

Основной вывод этого раздела состоит в том, что во всех основных комбинаторных интерпретациях чисел Каталана преобразование Донахью демонстрирует примерно одинаковое поведение: оно относительно естественно, но имеет отчетливо “фрактальную” природу и поэтому непрозрачно.

§4. КАРУСЕЛЬНЫЙ ЭФФЕКТ

Некорневые вершины ПКДВК можно классифицировать более детально, разбив их на пять типов: одноэлементный тип, в который входит только сын корня (далее – СК), левые листья (ЛЛ) – листья, являющиеся левыми сыновьями, правые листья (ПЛ), левые и правые нелистья (соответственно ЛН и ПН). Например, на рис. 1 у дерева T

вершина 1 – типа СК, вершины 3, 5, 7, 10, 13 – ЛЛ, 8, 14, 15 – ПЛ, 2 и 12 – ЛН, 9, 4, 6 и 11 – ПН. Аналогично, уголки ПДВК согласно их виду естественно разделить на четыре класса: левые, правые, нижние и развёрнутые. Например, на рис. 2 у дерева T^s уголки 1, 2, 12 – левые, 8, 14, 15 – правые, 9, 4, 6, 11 – нижние, а 3, 5, 7, 10, 13 – развёрнутые.

Хорошо заметно, что при переходе от T к T^s вершины типов СК и ЛН становятся левыми уголками, ПН – нижними уголками, ЛЛ – развёрнутыми уголками, ПЛ – правыми уголками соответственно. Равным образом, очевидно, что при левом обратном переходе от ПДВК к ПКДВК (см. рис. 3) правые уголки становятся СК или ПН (СК становится правый уголок, прилегающий к сыну корня ПДВК), нижние уголки – ЛН, левые уголки – ЛЛ, развёрнутые уголки – ПЛ. Мы получаем следующий результат.

Теорема 4.1 (Карусельный эффект).

- (1) Если вершина α ПКДВК T есть вершина типа СК или ЛН, то в T' она является вершиной типа ЛЛ.
- (2) Если вершина α ПКДВК T есть вершина типа ПН, то в T' она является вершиной типа ЛН.
- (3) Если вершина α ПКДВК T есть вершина типа ЛЛ, то в T' она является вершиной типа ПЛ.
- (4) Если вершина α ПКДВК T есть вершина типа ПЛ, то в T' она является вершиной типа СК или ПН.

Замечание. Теорема 4.1 ничего не говорит о том, в какую именно из, возможно, многочисленных вершин типа ЛЛ ПКДВК T' обращается данный ЛН α ПКДВК T . Ниже этот недостаток устраняется.

На множестве некорневых вершин ПКДВК T есть несколько естественных обходов. Наиболее естественными являются левый и правый стандартные обходы. Процедуру левого стандартного обхода можно описать рекурсивно: начиная с СК (или, равным образом, с самого корня), мы, попав в вершину α , сначала обходим ее, затем дерево ее левых потомков и, наконец, дерево ее правых потомков. Фактически на рис. 1 вершины дерева T пронумерованы именно в соответствии с левым стандартным обходом. Правый стандартный обход осуществляется симметрично.

Аналогично можно рассмотреть правый и левый обратные обходы, то есть те же самые обходы, осуществляемые в обратном порядке.

С другой стороны, на ПДВК (которое удобно рассматривать как *одногранник*) T^S также есть два стандартных обхода: по “периметру” против часовой стрелки и, наоборот, по часовой стрелке. Можно считать, что обходы начинаются с корня. Назовём обход вершин ПКДВК T *левым естественным*, если он синхронен с обходом ПДВК T^S против часовой стрелки, и *правым естественным*, если он синхронен с обходом T^S против часовой стрелки.

Теорема 4.2 (О согласовании обходов). *Левый естественный обход есть стандартный левый обход; правый естественный обход есть правый обратный обход.*

Этот результат сразу вытекает из рекурсивных определений обходов и их наглядного смысла.

Далее, зафиксируем на множестве вершин дерева T порядок, соответствующий стандартному левому обходу, а на том же самом множестве, рассматриваемом как множество вершин дерева T' , — порядок, соответствующий правому обратному обходу. Занумеруем в соответствии с этими порядками вершины каждого типа по отдельности.

Теорема 4.3 (Уточнённый карусельный эффект). *Пусть α — вершина деревьев T и T' . Тогда*

- (1) *Если в T α — СК, то в T' α — ЛЛ №1.*
- (2) *Если в T α — ЛЛ № k , то в T' α — ПЛ № k .*
- (3) *Если в T α — ПЛ № k , не последний, то в T' α — ПН № k .*
- (4) *Если в T α — последний ПЛ, то в T' α — СК.*
- (5) *Если в T α — ПН № k , то в T' α — ЛН № k .*
- (6) *Если в T α — ЛН № k , то в T' α — ЛЛ № $(k + 1)$.*

Замечание. Ситуация не столь проста, как может показаться. Напомним, что речь идёт о *существенно различных* порядках. Поэтому вершина не просто сменяет друг за другом все возможные положения внутри дерева. В действительности рассматриваемые обходы совпадают на множествах листьев по той причине, что листья всегда несравнимы, то есть ни один лист не является потомком другого. С другой стороны, правые нелистья образуют правые цепи, а левые нелистья левые цепи, порядок вершин в которых при каждом преобразовании, как легко убедиться, инвертируется. Вдобавок, при этом цепи нелистьев *не сохраняются* при итерациях основного преобразования,

так что предсказать на несколько шагов вперёд, каким именно правым нелистом окажется данная вершина, на первый взгляд, невозможно.

Для данного дерева T пусть $k(T)$ – количество его левых листьев, $l(T)$ – количество его правых листьев, $m(T)$ – количество его правых нелистьев, $n(T)$ – количество его левых нелистьев.

Следствие 4.4. $k(T') = n(T) + 1$, $l(T') = k(T)$, $m(T') = l(T) - 1$, $n(T') = m(T)$.

Заметим, что в любом ПКДВК T , очевидно, справедливы следующие равенства: $k(T) = m(T) + 1$, $l(T) = n(T) + 1$.

Соответственно, для задания всей четверки $(k(T), l(T), m(T), n(T))$ достаточно указать *тип дерева* – пару $(k(T), l(T))$.

Определение 4.1. Скажем, что два ПКДВК T_1 и T_2 эквивалентны, если каждое из них можно получить из другого несколькими итерациями основного преобразования; в этом случае будем писать $T_1 \approx T_2$.

Следствие 4.5 (Альтернирующий инвариант). *Если $T_1 \approx T_2$, то $(k(T_1), l(T_1)) = (k(T_2), l(T_2))$ или $(k(T_1), l(T_1)) = (l(T_2), k(T_2))$.*

Замечание. Простейшие примеры показывают, что этот инвариант не является полным, то есть существуют неэквивалентные ПКДВК с равными подтипами.

Обозначим символом $T(k, m)$ множество всевозможных ПКДВК, имеющих k левых листьев и m правых. Согласно следствию 4.5, орбита преобразования Донахью любого представителя множества $T(k, m)$ содержится в $T(k, m) \cup T(m, k)$. Очевидно, что все эти классы непусты, поэтому каждое такое объединение содержит по крайней мере одну орбиту. Следовательно, при нечетном n множество $T(n)$ деревьев с n листьями разбивается не менее чем на $\frac{n-1}{2}$ орбит, а при четном n – не менее чем на $\frac{n}{2}$ орбит, поскольку симметричный класс $T(\frac{n}{2}, \frac{n}{2})$ тоже содержит по крайней мере одну орбиту. С другой стороны, для нечетного n длины всех орбит являются четными числами, а для четных n орбиты нечетной длины могут содержаться только в симметричном классе.

§5. ГИПЕРБОЛИЧНОСТЬ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ДОНАХЬЮ

Свойство гиперболичности преобразования состоит в том, что небольшое смещение начальной точки приводит к радикальному изменению результата через несколько итераций преобразования. В рассматриваемом случае это означает немонотонность преобразования по отношению к стандартному решеточному упорядочению всех деревьев (напомним, что ПКДВК образуют дистрибутивную решетку, неприводимые элементы которой упорядочены как вершины бесконечного кубического дерева). Сам по себе этот факт сравнительно очевиден, но очень важен, поскольку является главной причиной для рассмотрения преобразования Донахью.

Определение 5.1.

- (1) Пусть α – правое ребро ПКДВК T , идущее от отца a к его правому сыну b . Рассмотрим новое ПКДВК $T(\alpha)$, отличающееся от исходного только тем, что
 - (а) в дереве $T(\alpha)$ на две вершины (назовем их c и d) и на два ребра (назовем их β и γ) больше;
 - (б) ребро α ведет от отца a к правому сыну c ;
 - (с) ребро β ведет от отца c к правому сыну b ;
 - (д) ребро γ ведет от отца c к левому сыну d , который является листом.
- (2) Переход от дерева T к дереву $T(\alpha)$ назовем операцией разбиения ребра α (рис. 11).
- (3) Совершенно аналогично определяется операция разбиения левого ребра.
- (4) Возможность разбиения ребра есть функция этого ребра, которую мы будем называть *ростком*, соответствующим этому ребру.
- (5) Возможно, что для дерева T и его ребра α существует ребро β дерева T' , такое, что $(T(\alpha))' = T'(\beta)$. В этом случае будем говорить, что при преобразовании Донахью росток перешел с ребра α на ребро β . В частности, если $\alpha = \beta$, будем говорить, что росток остался на ребре α .
- (6) В ситуации, отличающейся от пункта 5, будем говорить о *разрушении ростка*. Разрушение ростка – простейший частный случай гиперболичности преобразования Донахью.

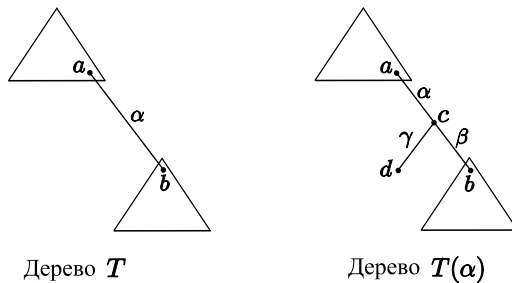


Рис. 11. Операция разбиения ребра.

Ребра ПКДВК, не смежные с его корнем (далее – некорневые), так же, как и вершины, естественно разделить на листья и нелистья. Далее, для ребра α – правого нелиста, ведущего от вершины a к ее правому сыну b , который, соответственно, также является нелистом, следующим ребром назовем ребро, ведущее от b к его правому сыну c .

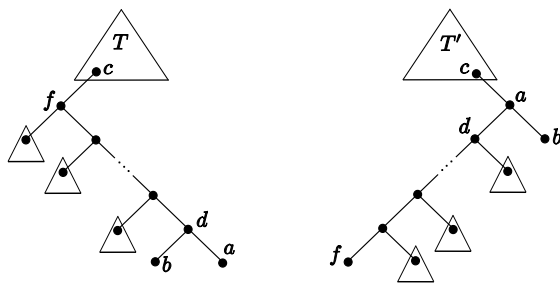


Рис. 12. Разрушение ростка с правого листа.

Теорема 5.1 (Правило перемещения ростков). *При преобразовании Донахью*

- (1) *ростки, инцидентные левым ребрам, остаются на них (ребра при этом становятся правыми);*
- (2) *ростки с правых нелистьев перемещаются на следующие ребра;*
- (3) *ростки с правых листьев разрушаются.*

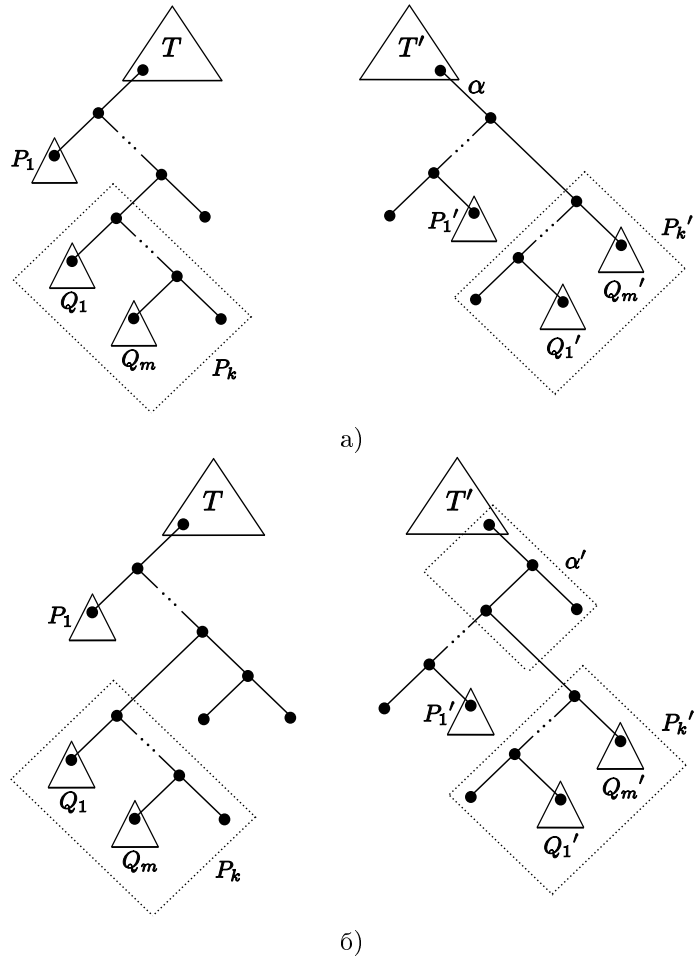


Рис. 13. Первое преобразование Донахью: а) дерева T ,
 б) дерева $T(\alpha)$.

Утверждения теоремы практически очевидно вытекают из первого определения преобразования Донахью. Пункт 3 проиллюстрирован на рис. 12. Однако ситуацию, изображенную на правой части рис. 12,

можно (при желании) трактовать как “правый росток на правом ребре”. Для более убедительной иллюстрации проделаем еще одно преобразование.

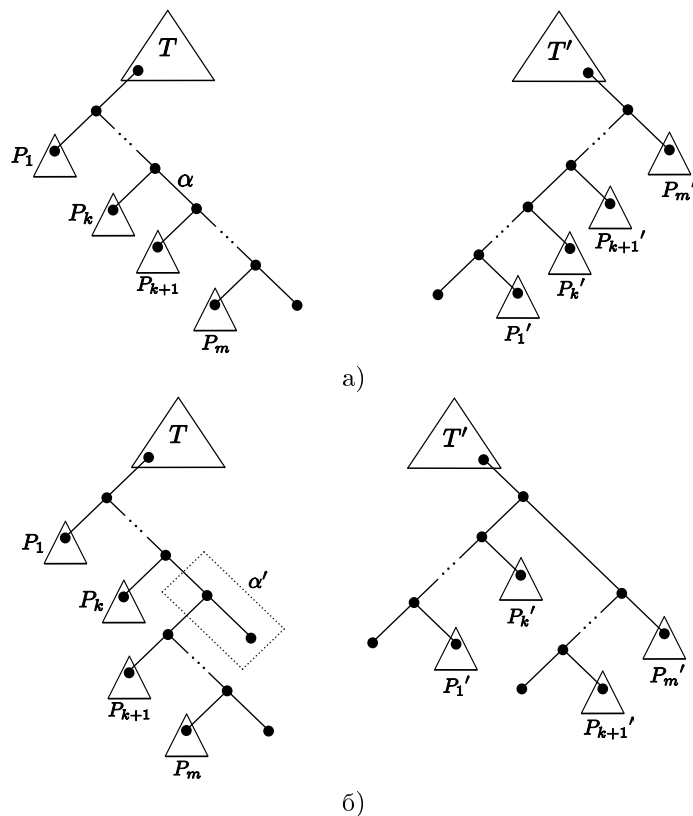


Рис. 14. Второе преобразование Донахью: а) дерева T , б) дерева $T(\alpha)$.

Согласно тому же первому определению, при преобразовании левые поддеревья изменяются *автономно*, то есть наличие в дереве прочих вершин и ребер никак не влияет на результат их преобразования.

Поэтому достаточно рассмотреть только преобразование “ближайшей окрестности” рассматриваемого ростка. Сравнение правых частей рис. 13 а) и 13 б) показывает, что единственное отличие первого преобразования дерева T от преобразования дерева $T(\alpha)$ – замена ребра α на фрагмент α' . Поэтому можно полагать, что к моменту второго преобразования имеет место ситуация, изображенная на рис. 14 а) и 14 б) слева соответственно. Сравнение же правых частей рис. 14 а) и 14 б) показывает, что произошло *радикальное* изменение структуры дерева.

Замечание. Может показаться, что авторы проявили недостаточно упорства: правый росток на правом ребре разрушился, превратившись в какой-то другой элемент структуры дерева, за эволюцией которого тоже можно проследить, в итоге рассмотрений придя обратно к ростку. При этом росток не превращается в процессе этой эволюции во что-то чрезмерно сложное.

У авторов работы создалось впечатление (которое трудно сформулировать в виде точной гипотезы), что это *вообще не так*. Напротив, с увеличением размера дерева и количества итераций преобразования росток может превращаться в сколь угодно сложные элементы структуры дерева. Именно это интригующее обстоятельство не дает возможности построить “ручную” теорию преобразования Донахью.

§6. ТЕОРЕМА ОБ ОКАЙМЛЕНИИ

Рассмотрим еще одну операцию над ПКДВК, которую будем называть *окаймлением*.

Определение 6.1.

- (1) Пусть T – ПКДВК, a – его лист (*вершина*). Добавим к T две новые вершины a_1 и a_2 , сделав первую новую вершину левым сыном вершины a , а вторую правым. Прделаав это преобразование над каждым листом дерева T , получим новое дерево $Q(T)$, которое будем называть окаймлением исходного дерева.
- (2) Дерево T , являющееся окаймлением другого дерева, будем называть *окаймленным* (рис. 15).

Символом $\Delta(T)$ обозначим длину орбиты дерева T . Имеет место следующая теорема.

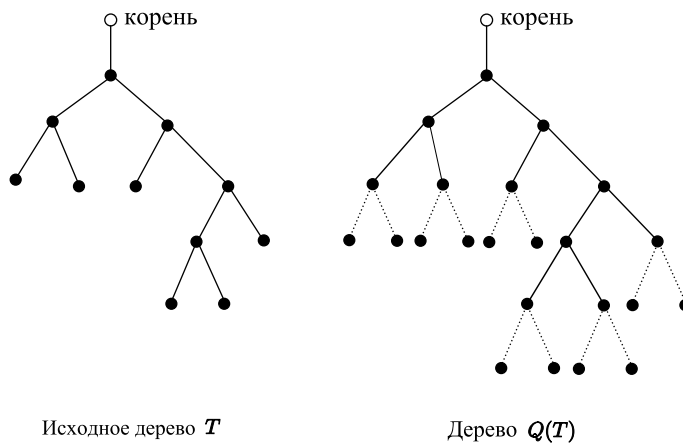


Рис. 15. Окаймление дерева.

Теорема 6.1.

- (1) Если длина орбиты $\Delta(T)$ нечетна, то $\Delta(Q(T)) = 3\Delta(T)$.
- (2) Если длина орбиты $\Delta(T)$ четна, то $\Delta(Q(T)) = \frac{3}{2}\Delta(T)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что

$$Q(T'') = (Q(T))''' \tag{3}$$

Отсюда вытекает также, что если длина орбиты $\Delta(T)$ четна, то длина цикла при окаймлении в некотором смысле утраивается, но при этом цикл распадается на два.

Для доказательства этого равенства нам потребуется еще несколько определений.

Определение 6.2.

- (1) Пусть T – ПКДВК. Символом T° обозначим ПДВК, которое получится из T вставкой между его корнем и сыном корня новой вершины, которая тем самым становится сыном корня, а ее единственным сыном становится старый сын корня (см. рис. 16). Дерево T° уже не является кубическим.

- (2) Левым (правым) *изокубическим* деревом $*T$ (соответственно T^*) назовем ПКДВК, применение к которому правого (соответственно левого) варианта биекции между ПКДВК и ПДВК приводит к ПДВК вида T° для некоторого ПКДВК T .

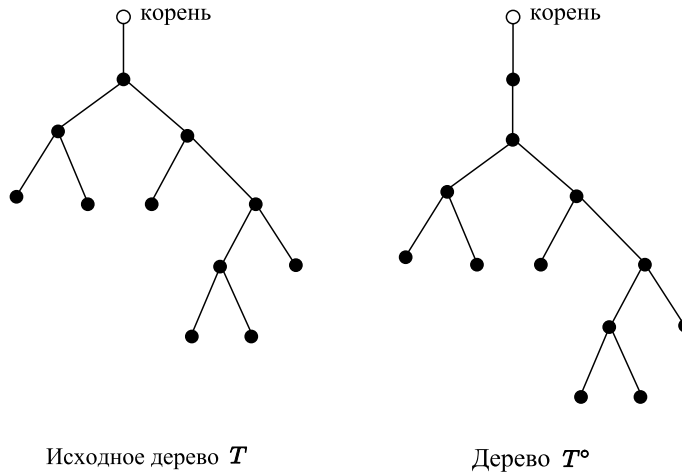


Рис. 16. Преобразование дерева T в дерево T° .

Пример левого изокубического дерева приведен на рис. 17. Характерной особенностью левых (соответственно правых) изокубических деревьев является отсутствие нетривиальных (длины больше 1) цепочек правых (соответственно левых) нелистьев (под нелистьями здесь понимаются ребра).

В силу второго определения преобразования Донахью очевидно, что $(*T)' = T^*$.

Для доказательства равенства (3) достаточно показать, что

$$(Q(T))' =^* (T'). \quad (4)$$

Действительно, тогда, в силу симметрии, при окаймлении цепочка из двух последовательных поворотов $T \rightarrow T' \rightarrow T''$ соответствует цепочке из трех последовательных поворотов $Q(T) \rightarrow^* (T') \rightarrow (T')^* \rightarrow Q(T'')$.

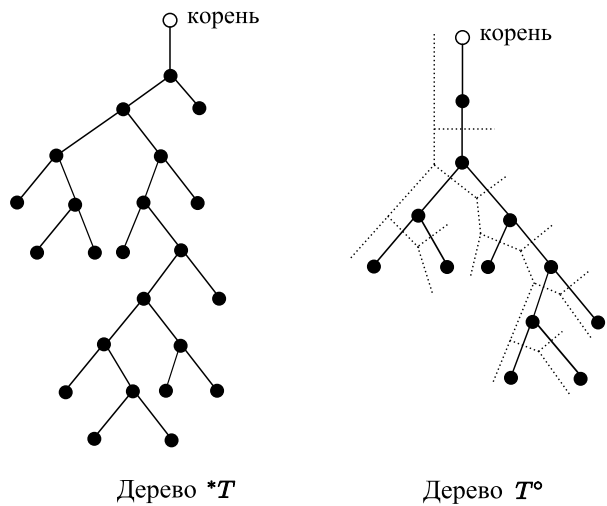


Рис. 17. Пример левого изокубического дерева.

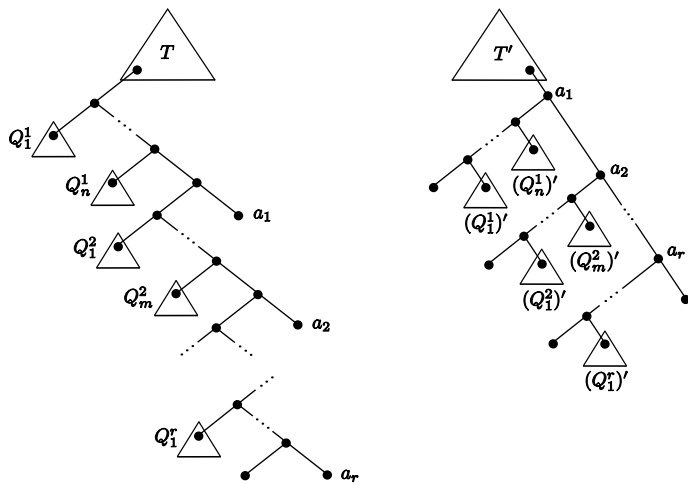


Рис. 18. Преобразование Донахью исходного дерева.

Для доказательства равенства (4) сравним преобразования дерева и его окаймления (см. рис. 18, 19 и 20). На рис. 18 изображено преобразование исходного дерева. Вершины a_1, a_2, \dots, a_r после поворота образуют правую цепь. На рис. 19 изображено преобразование окаймленного дерева. Из-за окаймления правая цепь вершин распадается; хорошо видно, что образуется левое изокубическое дерево. На рис. 20 показано, как при переходе от ПКДВК к ПДВК восстанавливается правая цепь, состоящая на этот раз из вершин D_1, \dots, D_r . \square

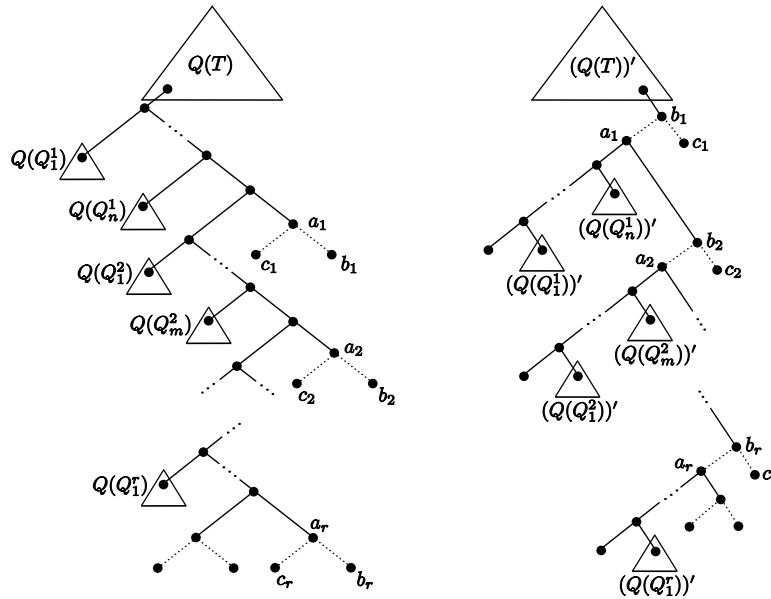


Рис. 19. Преобразование Донахью окаймленного дерева.

Любопытно, что при тройном преобразовании Донахью окаймленных деревьев наблюдается еще один карусельный эффект. Ребра окаймленного дерева оказывается естественно разбить на три класса: внутренние, регулярные окаймляющие и два сингулярных окаймляющих ребра, ведущих к пристроенным сыновьям последнего (при левом обходе) правого листа исходного (неокаймленного) дерева. Соответствующее разбиение показано на рис. 21 а).

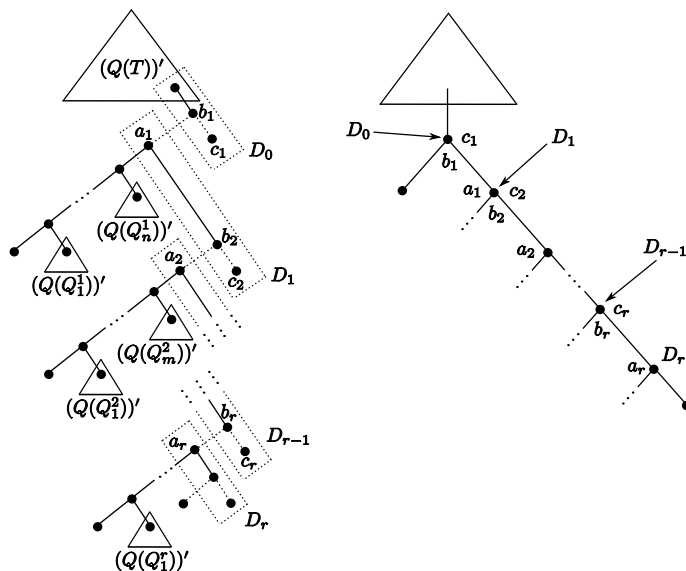


Рис. 20. Восстановление правой цепи D_1, \dots, D_r .

Теорема 6.2 (Карусельный эффект для ребер окаймленных деревьев). *В результате композиции трех преобразований внутренние ребра становятся внешними, регулярные внешние – внутренними, а сингулярные внешние остаются внешними, ведущими к пристроенным сыновьям первого (при левом обходе) левого листа исходного дерева.*

Доказательство. После первого поворота внешние сингулярные ребра перемещаются “под корень”, остальные внешние ребра размещаются справа и снизу в правых цепочках, а внутренние – слева и сверху. После второго поворота внешние и внутренние ребра меняются местами. Дальнейшее следует из симметричности ситуации. Пример показан на рис. 21. \square

Из теоремы 6.1 следует, что длина орбиты полного n -уровневого дерева, то есть дерева, содержащего всех возможных потомков сына корня до n -го уровня, равна 3^{n-1} (при этом сын корня считается вершиной нулевого уровня). Тем самым получен следующий результат.

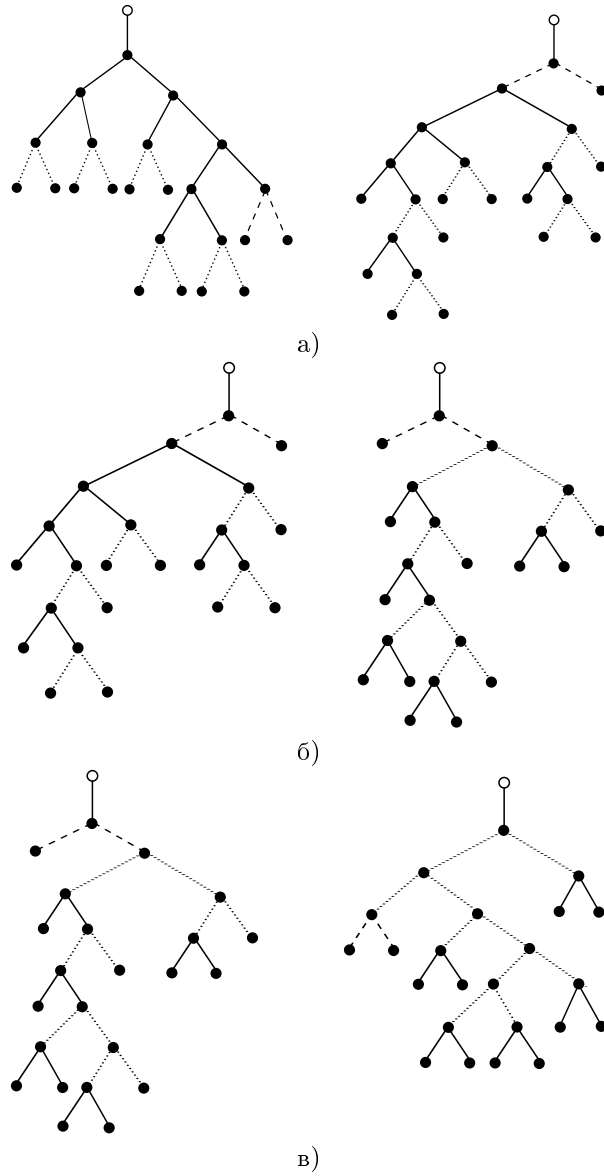


Рис. 21. Карусельный эффект для ребер окаймленного дерева.

Следствие 6.3. *Существует бесконечная последовательность деревьев, длины орбит которых растут как $O(n^{\log_2 3})$ от числа листьев.*

Замечание. В действительности речь идет об относительно массовом явлении: вместо полных n -уровневых деревьев можно рассмотреть последовательные окаймления любого фиксированного дерева.

Эмпирические данные, приведенные в конце работы, показывают, что это следствие можно существенно усилить. Естественной выглядит гипотеза о том, что существуют последовательности деревьев, длина циклов которых растет экспоненциально с ростом размера деревьев.

Кроме того, следствие 6.3 показывает, что существуют деревья со сколь угодно длинными орбитами. Следовательно, на множестве всех деревьев преобразование Донахью действует как свободная циклическая группа.

Напомним, что преобразование Донахью τ есть композиция двух инволюций: транспонирования дерева σ и транспонирования пути θ , $\tau = \theta \circ \sigma$. Это позволяет сформулировать более сильное утверждение.

Теорема 6.4. *Группа, порожденная инволюциями из определения 2.3, есть свободное произведение $Z_2 * Z_2 = \langle \theta \rangle * \langle \sigma \rangle$.*

Доказательство. Поскольку σ и θ – инволюции, все соотношения в рассматриваемой группе могли бы иметь один из четырех видов: $\tau^k = e$, $\tau^{-k} = e$, $\sigma \circ \tau^k = e$ или $\tau^k \circ \theta = e$. Первые два соотношения не могут выполняться для всех деревьев, поскольку, как сказано выше, существуют деревья со сколь угодно длинными орбитами.

Предположим, что для любого ПКДВК T выполняется соотношение $\sigma \circ \tau^k(T) = T$. Тогда $\tau^k(T) = \sigma(T)$, $\tau^{2k}(T) = \sigma^2(T) = T$, что противоречит существованию циклов сколь угодно большой длины. Случай второго соотношения аналогичен. \square

Кроме того, теорема об окаймлении позволяет уточнить оценку количества орбит, полученную в конце раздела 4.

Рассмотрим семейство последовательностей $(a_k^{(m)})_{k=1}^{\infty}$, $(b_k^{(m)})_{k=1}^{\infty}$ и $(d_k^{(m)})_{k=1}^{\infty}$, определенных соотношениями

$$a_k^{(m)} = 2^{k-1}m - 1, \quad (5)$$

$$b_k^{(m)} = 2a_{k-1}^{(m)} + b_{k-1}^{(m)} + 1, \quad (6)$$

$$d_k^{(m)} = a_k^{(m)} + b_k^{(m)}. \quad (7)$$

При этом

- при $m = 1$ элемент $a_0^{(1)}$ не определен, $a_1^{(1)} = 0$, $b_1^{(1)} = 1$, $a_2^{(1)} = 1$, $b_2^{(1)} = 1$ и рекуррентные формулы применяются начиная с $k = 3$;

- при нечетном $m > 1$ имеем $a_0^{(m)} = \frac{m-1}{2}$, $b_0^{(m)} = 0$ и рекуррентные формулы применяются начиная с $k = 2$.

Тривиальной индукцией устанавливаются следующие формулы:

$$b_k^{(1)} = 2^k - k - 1, \quad (8)$$

$$d_k^{(1)} = 2^k + 2^{k-1} - k - 2, \quad (9)$$

$$b_k^{(m)} = (2^k - 1)m - k + 1, \quad (10)$$

$$d_k^{(m)} = (2^k + 2^{k-1} - 1)m - k. \quad (11)$$

Заметим, что число $a_k^{(m)}$ есть количество асимметричных классов $T(i, 2^k m - i) \cup T(2^k m - i, i)$, каждый из которых непуст и поэтому содержит по крайней мере одну орбиту четной длины. При окаймлении каждая такая орбита превращается в две орбиты, входящие в симметричный класс $T(2^k m, 2^k m)$. Кроме того, в симметричном классе $T(2^k m, 2^k m)$ содержатся орбиты, полученные окаймлениями орбит, содержащихся в предыдущем симметричном классе $T(2^{k-1} m, 2^{k-1} m)$, которые могут иметь нечетную длину и превращаться по этой причине не в две орбиты, а в одну. Наконец, заметим, что в симметричном классе $T(2^k m, 2^k m)$ при $k > 1$ содержатся деревья, не являющиеся ни окаймленными, ни изокубическими, которые также образуют не менее одной орбиты. Рекуррентное соотношение (6) для последовательности $(b_k^{(m)})$ описывает в точности вышесказанное. Тем самым доказано следующее утверждение (при $k = 0, 1, 2$ его легко проверить непосредственно).

Следствие 6.5. Пусть $n = 2^k m$, где m нечётно. Количество орбит в классе $T(n)$ не меньше $d_k^{(m)}$.

Полученная оценка улучшает оценку, полученную в конце раздела 4 при четном n : она немного меньше $\frac{3}{2}n$.

§7. ЭМПИРИЧЕСКИЕ ДАННЫЕ

Эмпирические данные о количестве и длинах циклов преобразования Донахью удобно представлять в виде производящей функции, то есть многочлена $M_n(x)$, в котором коэффициент при x^i равен количеству циклов преобразования Донахью длины i на множестве ПКДVK с n листьями. Первые десять многочленов такого типа привел в работе [1] Р. Донахью. Строго говоря, в многочлене $M_8(x)$ у него (вероятно, в результате опечатки) пропущено слагаемое x^{18} .

$$\begin{aligned}
 M_1(x) &= x, \\
 M_2(x) &= x, \\
 M_3(x) &= x^2, \\
 M_4(x) &= x^2 + x^3, \\
 M_5(x) &= x^2 + 2x^6, \\
 M_6(x) &= 2x^2 + 3x^3 + x^5 + 4x^6, \\
 M_7(x) &= 2x^2 + 14x^6 + x^{20} + x^{24}, \\
 M_8(x) &= 2x^2 + 7x^3 + 28x^6 + x^9 + x^{10} + x^{15} + x^{18} + 2x^{20} \\
 &\quad + x^{24} + x^{48} + x^{72}, \\
 M_9(x) &= 3x^2 + x^4 + 66x^6 + 2x^{10} + 3x^{12} + 2x^{14} + 5x^{20} \\
 &\quad + x^{24} + x^{36} + 2x^{42} + x^{48} + x^{54} + 5x^{72} + x^{90} + x^{144}, \\
 M_{10}(x) &= 3x^2 + 15x^3 + x^5 + 127x^6 + x^8 + 4x^9 + x^{10} + 10x^{14} + 4x^{18} \\
 &\quad + 13x^{20} + x^{24} + x^{27} + 2x^{28} + 2x^{30} + x^{33} + 6x^{36} + 10x^{42} \\
 &\quad + x^{45} + 5x^{48} + 4x^{54} + 15x^{72} + 3x^{90} + 2x^{126} + 3x^{144} + x^{147}.
 \end{aligned} \tag{12}$$

Использование альтернирующего инварианта дает возможность рассмотреть более подробную статистику: разбить циклы не только по размеру деревьев, но и по значениям этого инварианта. Ниже приведены соответствующие данные для деревьев с девятью и десятью

листьями. Данные этих таблиц показывают, что нижняя оценка количества орбит является очень грубой и требует радикального уточнения.

Таблица 1. Орбиты деревьев с девятью листьями.

Тип дерева	Производящая функция
(1,8)	$p_1(x) = x^2$
(2,7)	$p_2(x) = x^2 + 9x^6$
(3,6)	$p_3(x) = x^4 + 22x^6 + 2x^{20} + 3x^{72}$
(4,5)	$p_4(x) = x^2 + 35x^6 + 2x^{10} + 3x^{12} + 2x^{14} + 3x^{20} + x^{24}$ $+ x^{36} + 2x^{42} + x^{48} + x^{54} + 2x^{72} + x^{90} + x^{144}$

Таблица 2. Орбиты деревьев с десятью листьями.

Тип дерева	Производящая функция
(1,9)	$p_1(x) = x^2$
(2,8)	$p_2(x) = 12x^6$
(3,7)	$p_3(x) = x^2 + 30x^6 + x^{10} + 3x^{20} + x^{24} + x^{36} + 5x^{72}$
(4,6)	$p_4(x) = x^2 + 57x^6 + x^8 + 6x^{14} + 3x^{18} + 8x^{20} + x^{28}$ $+ x^{36} + 2x^{42} + 5x^{48} + 3x^{54} + 6x^{72} + 2x^{90}$ $+ 2x^{126} + 2x^{144}$
(5,5)	$p_5(x) = 15x^3 + x^5 + 28x^6 + 4x^9 + 4x^{14} + x^{18} + 2x^{20}$ $+ x^{27} + x^{28} + 2x^{30} + x^{33} + 4x^{36} + 8x^{42} + x^{45} + x^{54}$ $+ 4x^{72} + x^{90} + x^{144} + x^{147}$

Работа выполнена в рамках ФЦП “Научные и научно-педагогические кадры инновационной России” на 2009–2013 годы”, соглашение номер 14.В37.21.1641 от 1 октября 2012 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. R. Donaghey, *Automorphisms on Catalan trees and bracketing*. — J. Combin. Theory, Ser. B. **29**, no. 1 (1980), 75–90.

2. D. Callan, *A bijection on Dyck paths and its cycle structure*. — Electron. J. Combin. **14**, Article R28 (2007).
3. И. А. Пушкарёв, *Об одном преобразовании плоских деревьев*. — Мат. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона, вып. 8 (2006), 92–99.
4. И. А. Пушкарёв, *Фрактальный поворот окаймлений плоских кубических деревьев*. — Мат. вестник педвузов и университетов Волго-Вятского региона, вып. 10 (2008), 82–89.
5. <http://oeis.org/A079438/>.
6. Я. Гульден, Д. Джексон, *Перечислительная комбинаторика*. М., Наука, 1990.
7. Р. Стенли, *Перечислительная комбинаторика*. М., Мир, 2005.

Pushkarev I. A., Byzov V. A. Donaghey's transformation: an elementary approach.

In this paper, we study the properties of the orbit of a special transformation of plane planted trees and its remarkable behavior. This transformation was introduced by R. Donaghey. We prove some nontrivial properties of this transformation (the behavior of the transformation of fringed trees, “carousel effect”) and obtain a lower bound on the number of orbits of the transformation.

Вятский государственный университет,
ул. Московская, д. 36,
610000 Киров, Россия
E-mail: god_sha@mail.ru

Поступило 19 декабря 2012 г.