Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 411, 2013 г.

А. Р. Минабутдинов, И. Е. Манаев

ФУНКЦИЯ КРУСКАЛА–КАТОНЫ, ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЬ КОНВЕЯ, КРИВАЯ ТАКАГИ И АВТОМОРФИЗМ ПАСКАЛЯ

§1. Введение

Рассмотрим единичный n-мерный куб $\{0;1\}^n$. Соседями вектора $v \in \{0;1\}^n$ назовем все векторы, которые могут быть получены из v заменой одной из 1 на 0. Тенью (shadow) множества векторов $\mathcal{A} \subset \{0;1\}^n$ называется множество $\partial(\mathcal{A})$ всех их соседей. Будем говорить, что множество $\mathcal{A}$ k-регулярно, если всякий его вектор содержит ровно k единиц.

Классической задачей комбинаторики является задача об m-элементном множестве $\mathcal{A}^*$ с наименьшей тенью. Эта задача была независимо решена Дж. Крускалом (J. B. Kruskal) [1] в 1963 г. и Д. Катоной (G. O. H. Katona) в [2] 1968 г. Теорема Крускала–Катоны [3] утверждает, что множество $\mathcal{A}^*$ состоит из первых m векторов наибольшего k-регулярного подмножества куба $\{0;1\}^n$, записанного в обратном лексикографическом порядке[1]. При этом связь мощности тени $|\partial(\mathcal{A}^*)|$ с мощностью множества $\mathcal{A}^*$ описывается с помощью функции $\partial_k(\cdot)$. Эта функция строится следующим образом. Пусть $k \in \mathbb{N}$; для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют и единственны числа $a_k > a_{k-1} > \dots > a_{k-s} \geq 0$, такие, что $n = \binom{a_k}{k} + \binom{a_{k-1}}{k-1} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s}$; тогда значение $\partial_k(n)$ равно $\binom{a_k}{k-1} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s-1} \in \mathbb{N}$. Функцию $\partial_k^l(n) - n$ называют функцией Крускала–Катоны[2].

Теорема Крускала–Катоны, записанная в виде неравенства $|\partial(\mathcal{A})| \geqslant \partial_k(|A|)$, оказывается полезной при оценке мощностей семейств пересекающихся множеств. Приведем *пример* из статьи [4]. Рассмотрим множества $\mathcal{A} \subset \binom{[n]}{a}$ и $\mathcal{B} \subset \binom{[n]}{b}$, такие, что $A \cap B \neq \varnothing$ для всех

Ключевые слова: автоморфизм Паскаля, функция Крускала–Катоны, последовательность Конвея, кривая Такаги.

[1]Или, что то же самое, из первых (в обратном лексикографическом порядке) m векторов сечения куба по вершинам с k единицами.

[2]Где $\partial_k^l(n) = \binom{a_k}{k-l} + \dots + \binom{a_{k-s}}{k-s-l}$.

$A \in \mathcal{A}$, $B \in \mathcal{B}$. Тогда по теореме Крускала–Катоны

$$|\mathcal{A}| + |\mathcal{B}| \leqslant |\mathcal{A}| + \binom{n}{b} - |\underbrace{\partial(\partial\ldots}_{b \text{ раз}}(\{A^c : A^c \in \mathcal{A}\})\ldots)| \leqslant \binom{n}{b} + |\mathcal{A}| - \partial^b_{n-a}(|\mathcal{A}|).$$

Функция Крускала–Катоны изучалась во многих работах. В статье [4] П. Франкля (P. Frankl) и др. доказана сходимость функции Крускала–Катоны к кривой Такаги (см. п. 3.3 настоящей работы). В статье [7] С. Л. Безрукова дан подробный обзор применения теоремы Крускала–Катоны к дискретным изопериметрическим задачам. В работе [5] Р. О'Доннелла (R. O'Donnell) и К. Виммера (K. Wimmer) доказана усиленная версия теоремы Крускала–Катоны для сечений постоянной плотности единичного куба. В работе [6] А. Фромадера (A. Frohmader) доказан ослабленный вариант теоремы Крускала–Катоны, который имеет преимущества при вычислениях.

В данной статье продемонстрирована неожиданная взаимосвязь функции Крускала–Катоны и последовательности Конвея (J. H. Conway), которая, насколько известно авторам, не замечалась ранее. Она дает возможность обобщить результат работы [4], используя результаты Э. Жанвресс (E. Janvresse) и др. [8], и может быть применена для рекурсивного вычисления значений функции Крускала–Катоны, а также для построения опорных слов сдвиговой реализации автоморфизма Паскаля.

Авторы выражают благодарность А. М. Вершику и А. А. Лодкину за советы и поддержку.

§2. Основной результат

Введем необходимые обозначения. Через $O_{n,k}$ обозначим последовательность первых координат векторов наибольшего k-регулярного

подмножества куба $\{0;1\}^n$, записанного в обратном лексикографическом порядке, $|O_{n,k}| = \binom{n}{k}$. Приведем пример наибольшего 2-регулярного подмножества куба $\{0;1\}^4$, записанного в обратном лексикографическом порядке:

$$\begin{array}{c} 1100 \\ 1010 \\ 0110 \\ 1001 \\ 0101 \\ 0011 \end{array}$$

Соответственно, $O_{4,2} = 110100$.

Последовательность “Hofstadter–Conway 10,000” задается рекуррентно:

$$\begin{aligned} &a(1) = 1, \quad a(2) = 1, \\ &a(n) = a(a(n-1)) + a(n - a(n-1)). \end{aligned}$$

В 1988 г. Дж. Х. Конвей предложил задачу о скорости сходимости последовательности $\frac{a(n)}{n}$ к $\frac{1}{2}$, которую решил К. Л. Меллоуз (C. L. Mallows) в [9].

Через $a'(n)$ обозначим разность $a(n+1) - a(n)$. Как показано в [9], последовательность $\{a'(n)\}_{n=2}^{\infty}$ совпадает с последовательностью

$$O_{1,0}O_{1,1}O_{2,0}O_{2,1}O_{2,2}\dots.$$

Как и в работе [8], мы будем рассматривать функции $F_{n,k} : [0, \binom{n}{k}] \to \mathbb{R}$ (график функции $F_{8,4}$ приведен на рис. 1):

$$\begin{aligned} &F_{n,k}(0) = 0; \\ &\text{при натуральных } l,\ 1 \leqslant l \leqslant \binom{n}{k}, \\ &F_{n,k}(l) = \begin{cases} F_{n,k}(l-1) + 1, & \text{если} \quad O_{n,k}(l) = 1, \\ F_{n,k}(l-1) - 1, & \text{если} \quad O_{n,k}(l) = 0; \end{cases} \end{aligned}$$

функция $F_{n,k}$ линейно интерполирована между соседними натуральными числами.

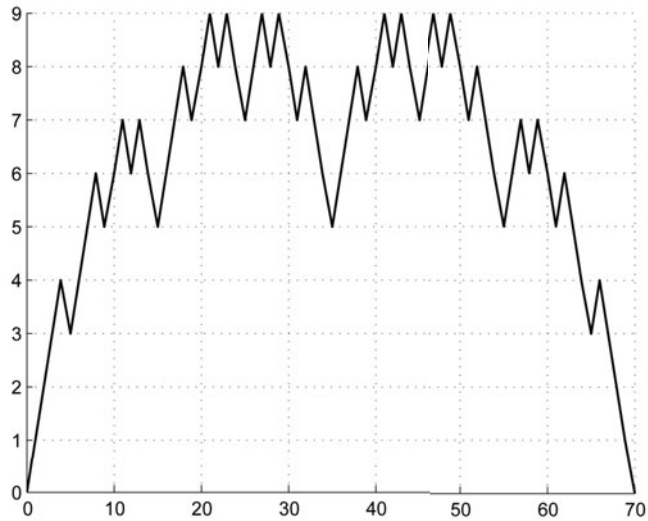

Рис. 1. График функции $F_{8,4}$.

Несложно видеть, что отрезки последовательности $2a(n) - n$ – это значения функции $F_{n,k}(n)$ после соответствующей замены координат:

$$F_{n,k}(n) = 2a\Big(n + 2^n + \sum_{j<k} \binom{n}{j}\Big) - n - 2^n - \sum_{j<k} \binom{n}{j}. \qquad (1)$$

Как уже отмечалось в работе [11], последовательности $O_{n,k}$ соответствует последовательность натуральных чисел с k-й линии уровня функции[3] $s_2(n)$, где четным числам соответствует ноль, а нечетным – единица. Обозначим через $\mathrm{Odd}(k,x)$ количество нечетных натуральных чисел, меньших x, с k-й линии уровня функции $s_2(n)$, а через $\mathrm{Even}(k,x)$ количество четных чисел. Таким образом, $F_{n,k}(l) = \mathrm{Odd}\,(k,x) - \mathrm{Even}\,(k,x)$.

Следующая теорема показывает связь функций $F_{n,k}(l)$ и $\partial_k(t)$.

[3]Значение $s_2(n)$ есть сумма знаков в двоичном разложении натурального числа n.

Теорема 1. *Для любых $n, k \in \mathbb{N}$ определим пару точек $(y, m)^T$ следующим образом:*

$$\begin{bmatrix} y \\ m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \partial_k(n) - n \\ \partial_k(n) + n \end{bmatrix} \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N};$$

положим $x = \sum\limits_{i=1}^{k} 2^{a_i}$, где $a_i - 1$ – верхние индексы в биномиальном разложении числа m:

$$m = \binom{a_k - 1}{k} + \cdots + \binom{a_1 - 1}{1}.$$

Тогда $y = \mathrm{Odd}(k, x) - \mathrm{Even}(k, x)$, где $\mathrm{Odd}(k, x)$ – количество нечетных натуральных чисел, меньших x, с k единицами в двоичном разложении, а $\mathrm{Even}(k, x)$ – количество таких четных чисел.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \partial_k(n) + n &= \underbrace{\binom{a_k - 2}{k} + \cdots + \binom{a_1 - 2}{1}}_{n} + \underbrace{\binom{a_k - 2}{k - 1} + \cdots + \binom{a_1 - 2}{0}}_{\partial_k(n)} \\ &= \binom{a_k - 1}{k} + \cdots + \binom{a_1 - 1}{1} = m. \end{aligned}$$

Через $\mathrm{All}(k, x)$ обозначим сумму $\mathrm{Odd}(k, x) + \mathrm{Even}(k, x)$. Из очевидной формулы $s_2(2\,n) = s_2(n)$ следует, что

$$\mathrm{Odd}\,(k, x) - \mathrm{Even}\,(k, x) = \mathrm{All}\left(k - 1, \frac{x}{2}\right) - \mathrm{All}\left(k, \frac{x}{2}\right).$$

В свою очередь,

$$\begin{aligned} &\mathrm{All}\left(k - 1, \frac{x}{2}\right) - \mathrm{All}\left(k, \frac{x}{2}\right) \\ &\quad = \left[\binom{a_k - 2}{k - 1} + \cdots + \binom{a_1 - 2}{0}\right] - \left[\binom{a_k - 2}{k} + \cdots + \binom{a_1 - 2}{1}\right] \\ &\quad = \partial_k(n) - n. \end{aligned}$$

□

Наглядный смысл теоремы 1 состоит в том, что график $\begin{bmatrix} -t + \partial_k(t) \\ t \end{bmatrix}$ функции $-t + \partial_k(t)$ после применения аффинного отображения $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

является нижней огибающей для кривой $F_{n,k}$ при подходящем выборе параметров[4], см. рис. 2.

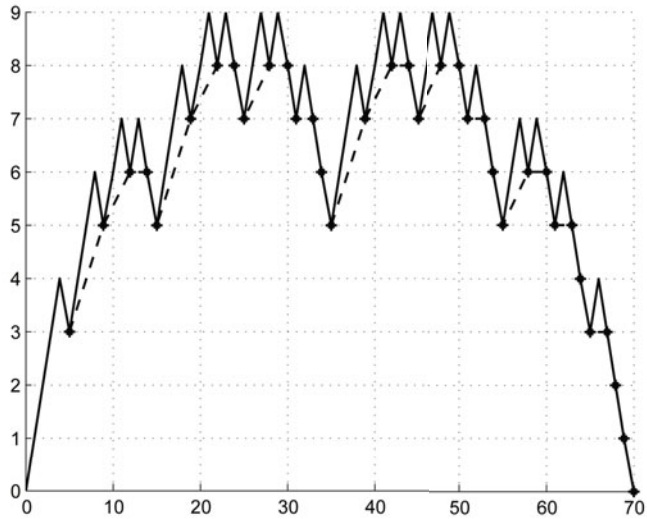

Рис. 2. Функции $F_{8,4}$ и $-n+\partial_4(n)$ после аффинного отображения.

§3. Следствия

3.1. О вычислении функции Крускала–Катоны. Жесткая связь функции Крускала–Катоны и опорных слов автоморфизма Паскаля позволяет задать подстановку, порождающую последовательность приращений функции Крускала–Катоны. Аналогичный результат для последовательности Конвея впервые отмечен в [9], подробнее рассмотрен в работе [15] и позднее, но независимо в работе [11].

Зафиксируем $k \in \mathbb{N}$. Через w_k обозначим слово $(k-1, k-2, \ldots, 1, 0)$. Через σ обозначим подстановку, для любого $b \geqslant 0$,

$$b \mapsto (b, b-1, \ldots, 1, 0).$$

На словах $w = (a, b)$ она действует по обычному правилу

$$\sigma(a, b) = (\sigma(a), \sigma(b)).$$

[4]Авторы выражают благодарность А. А. Лодкину за это наблюдение.

Тогда последовательность приращений $\{\partial_k(n+1)-\partial_k(n)\}_{n=1}^{\infty}$ совпадает с последовательностью $\omega = w_k\sigma(w_k)\sigma^2(w_k)\sigma^3(w_k)\dots$. Тем самым,

$$\partial_k(n) = k + \sum_{i=1}^{n-1}\omega(i).$$

Например, пусть $k = 4$. Тогда $w_4 = (3210)$, $\sigma(w_4) = (3210210100)$ и $\{\partial_4(n+1)-\partial_4(n)\}_{n=1}^{14} = w_4\sigma(w_4) = (3,2,1,0,3,2,1,0,2,1,0,1,0,0)$.

При вычислении функции $\partial_k^l(\cdot)$ с параметром $l \geq 2$ подстановка уже не будет иметь столь простого вида, однако, пользуясь рекуррентной формулой $\partial_k^l(n) = \partial_k^{l-1}(n+\partial_k(n)) - \partial_k^{l-1}(n)$, можно свести задачу к случаю $l = 1$.

3.2. Функция Крускала–Катоны и автоморфизм Паскаля. Следуя А. М. Вершику [10], зададим автоморфизм Паскаля на вершинах n-мерного куба переходом к следующей вершине в обратном лексикографическом порядке. Таким образом, наибольшее k-регулярное подмножество куба $\{0;1\}^n$, записанное в обратном лексикографическом порядке, соответствует траектории наибольшей длины $\binom{n}{k}$ вершины 1^k0^{n-k} под действием автоморфизма Паскаля. Отсюда следует, что $O_{n,k}$ – это опорные слова представления автоморфизма Паскаля как левого сдвига. Подробнее об этой реализации автоморфизма Паскаля см. [10–13].

А. М. Вершик в [14] предлагал построить функцию на натуральных числах, которая задавала бы опорные слова $O_{n,k}$. Следующая теорема утверждает, что функция Крускала–Катоны "достаточно точно" отвечает на этот вопрос.

Теорема 2. *Пусть $k \in \mathbb{N}$ и $l \in \{-k+1,\dots,k-1\}$. Через $f_{k,l}(t)$ обозначим функцию, полученную линейной интерполяцией*[5] *точек:*

$$\begin{bmatrix}\partial_{k-l}(n)-n\\ \partial_{k-l}(n)+n\end{bmatrix} \in \mathbb{Z}\times\mathbb{N}, \quad n \in \left\{1,\dots,\binom{2k-1}{k-l}\right\}.$$

Построим последовательность $\widehat{O_{2k,k-l}}$:

$$\widehat{O_{2k,k-l}}(i) = \begin{cases}1, & \text{если } f_{k,l}(i+1)-f_{k,l}(i) > 0,\\ 0, & \text{если } f_{k,l}(i+1)-f_{k,l}(i) \leqslant 0.\end{cases}$$

[5]На рис. 2 представлен случай $k = 4$; результат интерполяции изображен пунктирной линией.

Тогда

$$d(\widehat{O_{2k,k-l}}, O_{2k,k-l}) = \frac{k+l-1+\frac{3}{2}\cdot\binom{2k-3}{k-l-1}}{\binom{2k}{k-l}},$$

где $d(\cdot,\cdot)$ *– метрика Хэмминга.*

Доказательство. Следует непосредственно из п. 3.2. Достаточно подсчитать количество вхождений чисел $k-l$ и 1 в последовательность

$$w_{k-l}\sigma(w_{k-l})\sigma^2(w_{k-l})\sigma^3(w_{k-l})\dots,$$

рассматриваемую до элемента с номером $\binom{2k-1}{k-l}$. Несложно видеть, что при фиксированном l

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k+l-1+\frac{3}{2}\cdot\binom{2k-3}{k-l-1}}{\binom{2k}{k-l}} = \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{8} = 0.1875. \qquad \square$$

Если вместо линейной интерполяции точек $\begin{bmatrix}\partial_{k-l}(n)-n\\ \partial_{k-l}(n)+n\end{bmatrix}\in\mathbb{Z}\times\mathbb{N}$, $n\in\{1,\dots,\binom{2k-1}{k-l}\}$, строить интерполяцию с помощью функций вида $\psi_{c,a}(x) = -|x+c|+a$, а потом продифференцировать полученную функцию $\widetilde{f_{n,k}}$, то расстояние по метрике Хэмминга между $O_{2k,k-l}$ и полученной последовательностью будет равно нулю, а графики функций $\widetilde{f_{n,k}}$ и $F_{n,k}$ совпадут.

3.3. Кривая Такаги. Т. Такаги (T. Takagi) в [16] опубликовал простой пример нигде не дифференцируемой кривой. После этого кривую Такаги не раз переоткрывали. Подробные обзоры свойств кривой Такаги приведены в [17, 18].

Мы будем рассматривать обобщенную кривую Такаги. Зададим два аффинных отображения из $[0,1]$ в $\mathbb{R}$:

$$\alpha_p^L(x,y) := (px, py+x),$$
$$\alpha_p^R(x,y) := ((1-p)x+p, (1-p)y-x+1).$$

Существует единственное компактное множество T_p, такое, что $T_p = \alpha_p^L(T_p)\cup\alpha_p^R(T_p)$. График пары кривых дан на рис. 3.

Множества T_p будем называть обобщенными кривыми Такаги. Заметим, что значению $p=\frac{1}{2}$ соответствует сама кривая Такаги:

$$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\operatorname{dist}(2^n x, \mathbb{Z}).$$

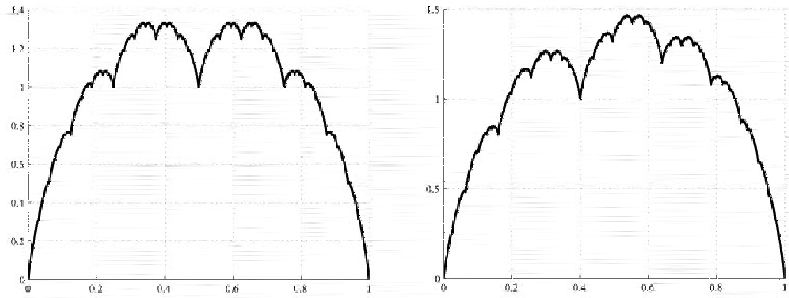

Рис. 3. Кривая Такаги и обобщенная кривая Такаги $T_{0.4}$.

Приведем теорему о сходимости графика функции Крускала–Катоны к кривой Такаги из [4].

Теорема 3.

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{0\leqslant x\leqslant 1}\left|k\binom{2k-1}{k}^{-1}\left[\partial_k\left(\left\lfloor\binom{2k-1}{k}x\right\rfloor\right)-\left\lfloor\binom{2k-1}{k}x\right\rfloor\right]-T(x)\right|=0.$$

Следуя [8], теорему (3) можно уточнить. Определим функцию

$$\phi_{n,k}(x)=\frac{F_{n,k}\left(x\cdot\binom{n}{k}\right)-xF_{n,k}\left(\binom{n}{k}\right)}{F_{n,k}\left(\binom{n-1}{k-1}\right)-\frac{\binom{n-1}{k-1}}{\binom{n}{k}}F_{n,k}\left(\binom{n}{k}\right)},\quad x\in[0,1].$$

Теорема 4 (E. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik [8])**.** *Для любого $p\in(0,1)$ и для любой последовательности $k(n)$, такой, что $\frac{k(n)}{n}\to p$, выполнено соотношение*

$$\phi_{n,k}\xrightarrow[n\to\infty]{L^\infty}T_p.$$

Для того чтобы уточнить теорему о сходимости графика функции Крускала–Катоны к кривой Такаги, нам потребуется следующая лемма.

Лемма 1. *Для любого натурального $k > 3$, $m \in \{-k+1, \dots, k-1\}$ и $x \in [0,1]$ выполнено соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right)}{\binom{2k}{k+m}} = x,$$

где

$$\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right) = \partial_{k-m}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right) + \left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor.$$

Доказательство. По теореме (1) имеем

$$\partial_{k-m}(n) - n = F_{2k,k+m}(\partial_{k-m}(n) + n).$$

Воспользуемся этой формулой, а также формулой (1) и тем, что $|a(n) - \frac{n}{2}| \to 0$:

$$\begin{aligned}
&\lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right)}{\binom{2k}{k+m}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{a\left(\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right) + f(k,m,x)\right)}{\binom{2k}{k+m}} \\
&- \frac{1}{2} \cdot \frac{f(k,m,x)}{\binom{2k}{k+m}} + \frac{\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor}{\binom{2k}{k+m}} \\
&= \lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right)}{2\binom{2k}{k+m}} + \frac{\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor}{\binom{2k}{k+m}},
\end{aligned}$$

где $f(k,m,x)$ – это соответствующий сдвиг. Отсюда получаем, что

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\left(\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor\right)}{\binom{2k}{k+m}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2\left\lfloor x \cdot \binom{2k-1}{k+m}\right\rfloor}{\binom{2k}{k+m}} = x. \qquad \square$$

Утверждение 1. *Для любого $p \in (0,1)$, для любой последовательности $\kappa(k)$, такой, что $\frac{\kappa(k)}{2k} \to p$ и $|\kappa(k)| < 2k$ при всяком k, выполнено соотношение*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{0\leqslant x\leqslant 1} \left|S_{k,\kappa}(x) - T_{1-p}(x)\right| = 0,$$

где

$$S_{k,\kappa}(x) = (2pk+1)\cdot \frac{K_\kappa^{\kappa-1}\Big(\Big\lfloor x\cdot \binom{2k-1}{\kappa}\Big\rfloor\Big) - x\cdot K_\kappa^{\kappa-1}\Big(\binom{2k-1}{\kappa}\Big)}{\binom{2k-1}{\kappa}\Big(4(1-p)^2-(1-2p)(1+2k(p-1)^2)\Big)},$$

$$K_\kappa^{\kappa-1}(t) = \partial_\kappa(t) - t.$$

Доказательство. Пусть $k \geqslant 3$ – натуральное число и $m \in \{-k+1,\dots,k-1\}$ – целое число. Положим $m(k) = k-\kappa(k)$. Тогда при $n \in \{1,\dots,\binom{2k-1}{k+m}\}$ по теореме (1) имеем

$$\frac{K_{k-m}^{k-m-1}\Big(\Big\lfloor x\cdot\binom{2k-1}{k+m}\Big\rfloor\Big) - \Big(\frac{\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\Big(\Big\lfloor x\cdot\binom{2k-1}{k+m}\Big\rfloor\Big)}{\binom{2k}{k+m}}\Big)\cdot K_{k-m}^{k-m-1}\Big(\binom{2k-1}{k+m}\Big)}{K_{k-m-3}^{k-m-4}\Big(\binom{2k-3}{k+m-3}\Big) - \frac{\binom{2k-1}{k+m-1}}{\binom{2k}{k+m}}\cdot K_{k-m}^{k-m-1}\Big(\binom{2k-1}{k+m}\Big)}$$

$$= \frac{F_{2k,k+m}\Big(\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\Big(\Big\lfloor x\cdot\binom{2k-1}{k+m}\Big\rfloor\Big)\Big)}{F_{2k,k+m}\Big(\binom{2k-1}{k+m-1}\Big) - \frac{\binom{2k-1}{k+m-1}}{\binom{2k}{k+m}}\cdot F_{2k,k+m}\Big(\binom{2k}{k+m}\Big)}$$

$$- \frac{\frac{\widehat{K}_{k-m}^{k-m-1}\Big(\Big\lfloor x\cdot\binom{2k-1}{k+m}\Big\rfloor\Big)}{\binom{2k}{k+m}}\cdot F_{2k,k+m}\Big(\binom{2k}{k+m}\Big)}{F_{2k,k+m}\Big(\binom{2k-1}{k+m-1}\Big) - \frac{\binom{2k-1}{k+m-1}}{\binom{2k}{k+m}}\cdot F_{2k,k+m}\Big(\binom{2k}{k+m}\Big)}$$

$$\approx \phi_{2k,k+m}(x) \xrightarrow[k\to\infty]{} T_{1-p}(x).$$

Упростим знаменатель:

$$K_{k-m-1}^{k-m-3}\left(\binom{2k-3}{k+m-3}\right) - \frac{\binom{2k-1}{k+m-1}}{\binom{2k}{k+m}}\cdot K_{k-m}^{k-m-1}\left(\binom{2k-1}{k+m}\right)$$
$$= \binom{2k-1}{k-m}\Big(\frac{(k+m-1)(k+m-2)(4-2m)}{(2k-1)(2k-2)(k-m+1)} - \frac{m}{k}\Big).$$

Отсюда, пользуясь леммой (1) и теоремой (4), получаем требуемое. В частности, при $p=\frac{1}{2}$ получаем утверждение теоремы (3). □

В заключение отметим, что в работе [4] также доказана сходимость функции вида $\partial_k^{\lfloor ck\rfloor}(n)-n$, $c\in(0,1)$, к “наклоненным” кривым Такаги $T_c(x) = \frac{1+c}{2(1-c)}\sum\limits_{j\geqslant 0}\frac{c^{2j}-c^{\beta_j}}{c^j(1+c)^{\beta_j}}$, где β_j – коэффициенты в $(1+c)$–ичном

разложении числа x. Авторы, в рамках своего подхода, не занимались этим вопросом. Однако можно предположить, что функция $\partial_k^l(n) - n$ может быть связана с некоторой рекуррентной последовательностью, что позволит получить аналогичные результаты.

Литература

1. J. B. Kruskal, *The number of simplices in a complex.* — Math. Optimization Tech. (1963), 251–278.
2. G. O. H. Katona, *A theorem of finite sets.* In: "Theory of Graphs", Proc. Colloqium Tihany, Hungary, 1968, pp. 187–207.
3. L. Lovász, *Combinatorial Problems and Exercises*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1979, Problem 3.3.
4. P. Frankl, M. Matsumoto, I. Z. Ruzsa, N. Tokushige, *Minimum shadows in uniform hypergraphs and a generalization of the Takagi function.* — J. Combin. Theory, Ser. A **69**, No. 1 (1995), 125–148.
5. R. O'Donnell, K. Wimmer, *KKL, Kruskal–Katona and monotone nets.* In: FOCS '09, Proceedings of the 50th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, 2009, pp. 725–734.
6. A. Frohmader, *Approximations to the Kruskal–Katona theorem*; `arXiv:1010.2288` (2010).
7. S. L. Bezrukov, *Isoperimetric problems in discrete spaces.* — Bolyai Soc. Math. Stud., No. 3 (1994), 59–91.
8. E. Janvresse, T. de la Rue, Y. Velenik, *Self-similar corrections to the ergodic theorem for the Pascal-adic transformation.* — Stoch. Dyn. **5**, No. 1 (2005), 1–25.
9. C. L. Mallows, *Conway's challenge sequence.* — Amer. Math. Monthly **98**, No. 1 (1991), 5–20.
10. А. М. Вершик, *Равномерная алгебраическая аппроксимация операторов сдвига и умножения.* — ДАН СССР **259**, вып. 3 (1981), 526–529.
11. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Асимптотика масштабированной энтропии автоморфизма Паскаля.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **378** (2010), 58–72.
12. А. А. Лодкин, И. Е. Манаев, А. Р. Минабутдинов, *Реализация автоморфизма Паскаля в графе конкатенаций и функция $s_2(n)$.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **403** (2012), 95–102.
13. X. Mela, K. Petersen, *Dynamical properties of the Pascal adic transformation.* — Ergodic Theory Dynam. Systems **25** (2005), 227–256.
14. А. М. Вершик, *личная беседа.*
15. T. Kubo, R. Vakil, *On Conway's recursive sequence.* — Discrete Math. **152**, No. 1–3 (1996), 225–252.
16. T. Takagi, *A simple example of the continuous function without derivative.* — Tokio Math. Ges. **1** (1903), 176–177.
17. P. C. Allaart, K. Kawamura, *The Takagi function: a survey.* — Real Anal. **37**, No. 1 (2011), 1–54.
18. J. C. Lagarias, *The Takagi function and its properties*; `arXiv:1112.4205`.

Minabutdinov A. R., Manaev I. E. The Kruskal–Katona function, Conway sequence, Takagi curve, and Pascal adic.

We study interrelations between the Kruskal–Katona function, Conway sequence, Takagi curve, and Pascal adic. Using the results of the current paper and, in particular, the convergence of the sequence $2a(n) - n$, where $a(n)$ is the Conway sequence, to the family of generalized Takagi curves, we prove a similar result for the Kruskal–Katona function. Moreover, a recursive method of computing the values of the Kruskal–Katona function is suggested.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28,
Старый Петергоф,
198504 С.-Петербург,
Россия

E-mail: aminabutdinov@gmail.com,
manaev.i.e.@gmail.com

Поступило 7 марта 2013 г.