Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 411, 2013 г.

А. М. Левин

О СПЕКТРЕ ВОЗМУЩЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО АВТОМОРФИЗМА ТОРА

§1. Марковские операторы и полиморфизмы

Определение 1 (см. [2]). *Пусть (X_0, μ_0) – пространство Лебега. Марковским оператором из $L^2(X_0)$ в себя называется положительный (т.е. переводящий неотрицательные функции в неотрицательные) линейный непрерывный оператор U, для которого $U\mathbb{1} = \mathbb{1}$ и $\|U\| \leqslant 1$.*

Определение 2 (см. [1]). *Полиморфизмом Π пространства Лебега (X_0, μ_0) в себя называется диаграмма, состоящая из упорядоченной тройки пространств Лебега*

$$(X_0, \mu_0) \xleftarrow{\pi_1} (X_0 \times X_0, \mu) \xrightarrow{\pi_2} (X_0, \mu_0),$$

где π_1 и π_2 – проекции на первую и вторую компоненту произведения $(X_0 \times X_0, \mu)$, а мера μ такова, что $\pi_1\mu = \pi_2\mu = \mu_0$. Очевидно, что мера μ при фиксированных проекциях определяет полиморфизм однозначно.

Пусть Π – полиморфизм пространства (X_0, μ_0) в себя. Определим изометричные вложения

$$T_1\colon L^2_{\mu_0}(X_0) \to L^2_{\mu}(X_0 \times X_0) \quad \text{и} \quad T_2\colon L^2_{\mu_0}(X_0) \to L^2_{\mu}(X_0 \times X_0)$$

по формулам $(T_1 f)(x) = f(\pi_1 x)$ и $(T_2 f)(x) = f(\pi_2 x)$. Тогда оператор $U_\Pi\colon L^2(X_0) \to L^2(X_0)$, задаваемый формулой $U_\Pi = T_1^* T_2$, является марковским. Обратно, любой марковский оператор $U\colon L^2(X_0) \to L^2(X_0)$ задаёт единственным образом такой полиморфизм Π, что $U = U_\Pi$ (см. [2]). Тем самым, полиморфизмы находятся во взаимно однозначном соответствии с марковскими операторами, а инварианты марковских операторов представляют интерес при изучении полиморфизмов и наоборот.

Ключевые слова: марковский оператор, спектр.

Обозначим через P_1 и P_2 операторы ортогонального проектирования в $L^2_\mu(X_0 \times X_0)$ на подпространства функций от первой и второй координаты соответственно. Тогда очевидно, что $T_1^* = T_1^{-1}P_1$, а $U_\Pi = T_1^{-1}P_1T_2$. Аналогично, $U_\Pi^* = T_2^{-1}P_2T_1$.

Спектр оператора U будем обозначать $\sigma(U)$.

В разделе 9 работы [2] показано, что задача классификации полиморфизмов по отношению к однотипности может сводиться к изучению спектральных инвариантов оператора $P_1P_2P_1$. Нахождение спектра данного оператора для некоторых классов полиморфизмов также является целью данной работы. В этом нам поможет следующее утверждение.

Утверждение. *Если хотя бы один из проекторов P_1 или P_2 не тождествен, то $\sigma(P_1P_2P_1) = \sigma((P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1}) \bigcup 0 = \sigma(U_\Pi U_\Pi^*) \bigcup 0$, где $\operatorname{Im} P_1$ – образ проектора P_1, то есть подпространство функций, зависящих только от первой координаты.*

Доказательство. Так как или проектор P_1, или проектор P_2 не тождествен, $0 \in \sigma(P_1P_2P_1)$. Возьмём $\lambda \notin \sigma(P_1P_2P_1)$; тогда оператор $R(\lambda) = (P_1P_2P_1 - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1}$ ограничен, а значит, оператор

$$R(\lambda)|_{\operatorname{Im} P_1} = ((P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1} - \lambda\,\mathrm{Id}|_{\operatorname{Im} P_1})^{-1}$$

также ограничен, то есть $\lambda \notin \sigma((P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1})$. Следовательно,

$$\sigma(P_1P_2P_1) \supset \sigma((P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1}) \bigcup 0.$$

Пусть теперь $\lambda \notin \sigma((P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1})$ и $\lambda \neq 0$, то есть оператор

$$R(\lambda) = ((P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1} - \lambda\,\mathrm{Id}|_{\operatorname{Im} P_1})^{-1},$$

определённый на $\operatorname{Im} P_1$, ограничен. Тогда оператор $RP_1 - \lambda^{-1}(\mathrm{Id} - P_1)$ также ограничен, а в силу того, что

$$\begin{aligned}(RP_1 - \lambda^{-1}(\mathrm{Id} - P_1))&(P_1P_2P_1 - \lambda\,\mathrm{Id})\\ &= R(P_1P_2 - \lambda\,\mathrm{Id})P_1 + (\mathrm{Id} - P_1) = P_1 + (\mathrm{Id} - P_1) = \mathrm{Id}\end{aligned}$$

и аналогично $(P_1P_2P_1 - \lambda\,\mathrm{Id})(RP_1 - \lambda^{-1}(\mathrm{Id} - P_1)) = \mathrm{Id}$, мы получаем, что $\lambda \notin \sigma(P_1P_2P_1)$ и доказано включение в обратную сторону в первом равенстве.

Второе равенство мгновенно следует из тождества $(P_1P_2)|_{\operatorname{Im} P_1} = (T_1T_1^{-1}P_1T_2T_2^{-1}P_2T_1T_1^{-1})|_{\operatorname{Im} P_1} = (T_1U_\Pi U_\Pi^*T_1^{-1})|_{\operatorname{Im} P_1}$. $\square$

§2. Вычисление спектра

Пусть n – натуральное число, $\mathbb{T}^n$ – n-мерный тор. Рассмотрим линейный гиперболический автоморфизм $T\colon \mathbb{T}^n \to \mathbb{T}^n$. Известно, что T определяется целочисленной матрицей размера $n \times n$ с определителем ± 1, все собственные числа которой отличны по модулю от 1. Обозначим матрицу, получающуюся её транспонированием, через A. Пусть d – естественная метрика на торе, а $N \subset \mathbb{T}^n$ – множество гомоклинических для 0 точек отображения T, то есть таких точек ξ, что $\lim\limits_{|k|\to\infty} d(T^k\xi, 0) = 0$. Известно, что множество N счётно и совпадает с пересечением сжимающегося и расширяющегося слоёв отображения T, проходящих через 0. Пусть ν – вероятностная мера на N.

Рассмотрим оператор $U_\nu^T\colon L^2(\mathbb{T}^n) \to L^2(\mathbb{T}^n)$, заданный формулой

$$U_\nu^T f(x) = \int\limits_N f(Tx + \xi)\ d\nu(\xi).$$

Очевидно, что этот оператор является марковским; тем самым, ему соответствует некоторый полиморфизм Π, для которого $U_\Pi = U_\nu^T$. Для краткости индекс T мы будем в дальнейшем опускать и обозначать данный оператор через U_ν.

Впервые данный оператор возник в работе [3] как пример случайного возмущения алгебраической гиперболической системы, обладающего рядом нетривиальных свойств. Впоследствии этот пример был обобщён в работе [1].

Пусть $c \in \mathbb{Z}^n$. Обозначим через $f_c \in L^2(\mathbb{T}^n)$ характер тора, заданный формулой

$$f_c(x) = e^{2\pi i\langle c, x\rangle},$$

где $\langle c, x\rangle$ – скалярное произведение векторов c и x. Ясно, что множество функций $\{f_c \mid c \in \mathbb{Z}^n\}$ образует полное ортонормированное семейство в $L^2(\mathbb{T}^n)$. Обозначим через

$$\widehat{\nu}(c) = \int\limits_N e^{2\pi i\langle c, \xi\rangle}\, d\nu(\xi)$$

коэффициенты преобразования Фурье меры ν, и пусть $C_\nu = \inf\limits_{c\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{\nu}(c)|$. Очевидно, что для любого $c \in \mathbb{Z}^n$ выполняется неравенство $|\widehat{\nu}(c)| \leqslant 1$ и $0 \leqslant C_\nu \leqslant 1$.

Лемма. *Зафиксируем $c \in \mathbb{Z}^n$; тогда $\widehat{\nu}(A^k c) \to 1$ при $|k| \to \infty$.*

Доказательство. Действительно,

$$\begin{aligned}\left|\widehat{\nu}(A^k c)-1\right| &= \left|\int\limits_N e^{2\pi i\left\langle A^k c,\,\xi\right\rangle}\,d\nu(\xi)-1\right| = \left|\int\limits_N e^{2\pi i\left\langle c,\,T^k\xi\right\rangle}\,d\nu(\xi)-1\right| \\ &= \left|\int\limits_N \left(e^{2\pi i\left\langle c,\,T^k\xi\right\rangle}-e^{2\pi i\langle c,\,0\rangle}\right)\,d\nu(\xi)\right| \\ &\leqslant 4\pi\|c\|_2\int\limits_N d(T^k\xi,0)\,d\nu(\xi) = 4\pi\|c\|_2\int\limits_N d(\xi,0)dT^k\nu(\xi).\end{aligned}$$

Мы воспользовались теоремой Лагранжа отдельно для вещественной и мнимой частей и неравенством Коши–Буняковского. Так как $T^k\nu\xrightarrow{w}\delta_0$ при $|k|\to\infty$ (см. лемму 2 в [3]), имеем $\widehat{\nu}(A^k c)\to 1$. $\square$

Пусть D – открытый единичный круг комплексной плоскости, $\overline{D}$ – его замыкание, а ∂D – его граница. Так как $\|U_\nu\|=1$, спектр $\sigma(U_\nu)$ лежит в $\overline{D}$.

Теорема 1. *Пусть $\widehat{\nu}(c)\neq 0$ для любого $c\in\mathbb{Z}^n$.*

- *Имеют место включения*

$$\partial D\subset\sigma(U_\nu)\subset\{\lambda\in\overline{D}\mid C_\nu\leqslant|\lambda|\leqslant 1\}.$$

  Если $C_\nu=0$, то $\sigma(U_\nu)=\overline{D}$.
- *Ортогональное дополнение к константам в пространстве $L^2(\mathbb{T}^n)$ представимо в виде прямой суммы попарно ортогональных инвариантных относительно U_ν циклических подпространств, спектр сужения оператора U_ν на каждое из которых совпадает с ∂D; любая собственная функция оператора U_ν постоянна.*

Доказательство. Заметим, что

$$U_\nu f_c(x)=\int\limits_N e^{2\pi i\langle c,Tx+\xi\rangle}\,d\nu(\xi)=\widehat{\nu}(c)f_{Ac}(x). \tag{1}$$

Рассмотрим для каждого $c\neq 0$ подпространство $T_c=\overline{\langle f_{A^n c}\mid n\in\mathbb{Z}\rangle}$. Очевидно, что для разных c эти подпространства либо совпадают, либо ортогональны друг другу, а из (1) следует, что каждое из них является инвариантным подпространством для U_ν. Также из формулы (1)

следует, что сужение оператора U_ν на каждое из этих подпространств является оператором взвешенного сдвига (см., например, [4]), свойства которого нас и будут интересовать.

Пусть $\lambda \in D$. Зафиксируем λ_0, такое, что $|\lambda| < \lambda_0 < 1$. Для $c \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим функцию

$$g_c = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^j}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} f_{A^{-j}c}.$$

Так как среди собственных чисел матрицы A нет корней из 1, функции $f_{A^{-j}c}$ попарно ортогональны в $L^2(\mathbb{T}^n)$. Поэтому

$$\|g_c\|_2^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda^j}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} \right|^2 \geqslant \sum_{j=0}^{0} \left| \frac{\lambda^j}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} \right|^2 = 1.$$

С другой стороны, так как по лемме $\widehat{\nu}(A^{-k}c) \to 1$ при $k \to \infty$, по признаку Даламбера имеем $\|g_c\|_2^2 < \infty$; тем самым, функция g_c определена корректно, и $g_c \in L^2(\mathbb{T}^n)$.

Используя равенство (1), получаем

$$\begin{aligned} U_\nu g_c - \lambda g_c &= \sum_{j=0}^{\infty} \widehat{\nu}(A^{-j}c) \frac{\lambda^j}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} f_{A^{-j+1}c} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} f_{A^{-j}c} \\ &= \widehat{\nu}(c) f_{Ac} + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} f_{A^{-j}c} \\ &\quad - \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\lambda^{j+1}}{\prod\limits_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} f_{A^{-j}c} = \widehat{\nu}(c) f_{Ac}. \end{aligned} \tag{2}$$

Тем самым, $\dfrac{g_c}{\widehat{\nu}(c)} = (U_\nu - \lambda \operatorname{Id})^{-1} f_{Ac}$.

Обозначим $S_c = \{k \in \mathbb{N} \mid |\widehat{\nu}(A^{-k}c)| < \lambda_0\}$. Так как по лемме $\widehat{\nu}(A^{-k}c) \to 1$ при $k \to \infty$, множество S_c конечно. Тогда мы имеем оценку

$$
\begin{aligned}
\|g_c\|_2^2 &= \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda^j}{\prod_{k=1}^{j} \widehat{\nu}(A^{-k}c)} \right|^2 \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{\substack{k=1\\ k\in S_c}}^{j} \left| \frac{\lambda}{\widehat{\nu}(A^{-k}c)} \right|^2 \prod_{\substack{k=1\\ k\notin S_c}}^{j} \left| \frac{\lambda}{\widehat{\nu}(A^{-k}c)} \right|^2 \\
&\leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{\substack{k=1\\ k\in S_c}}^{j} \left| \frac{1}{\widehat{\nu}(A^{-k}c)} \right|^2 \prod_{\substack{k=1\\ k\notin S_c}}^{j} \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^2 \\
&\leqslant \left(\prod_{k\in S_c} \frac{1}{|\widehat{\nu}(A^{-k}c)|^2} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^{2(j-|[1,j]\cap S_c|)} \\
&\leqslant \left(\prod_{k\in S_c} \frac{1}{|\widehat{\nu}(A^{-k}c)|^2} \right) (|S_c|+1) \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{\lambda}{\lambda_0} \right|^{2j} \\
&= (|S_c|+1) \left(\prod_{k\in S_c} \frac{1}{|\widehat{\nu}(A^{-k}c)|^2} \right) \frac{\lambda_0^2}{\lambda_0^2 - |\lambda|^2}.
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Так как полученная оценка равномерна относительно значений c, порождающих одно и то же пространство T_c, оператор $(U_\nu - \lambda\,\mathrm{Id})|_{T_c}$ непрерывно обратим при $|\lambda| < 1$. С другой стороны, так как оператор $U_\nu|_{T_c}$ является оператором взвешенного сдвига, его спектр обладает круговой симметрией (см. [4, стр. 54]) и непуст, поэтому он совпадает с ∂D. Значит, $\sigma(U_\nu) \supset \partial D$.

С другой стороны,

$$
\|(U_\nu - \lambda\,\mathrm{Id})^{-1} f_{Ac}\|_2 = \left\| \frac{g_c}{\widehat{\nu}(c)} \right\|_2 \geqslant \frac{1}{|\widehat{\nu}(c)|}.
$$

Поэтому если $C_\nu = \inf\limits_{c\in\mathbb{Z}^n} |\widehat{\nu}(c)| = 0$, то резольвента не может быть ограниченным оператором на всём пространстве, т.е. $\lambda \in \sigma(U_\nu)$. Значит, D лежит в спектре, а потому и весь круг $\overline{D}$ лежит в спектре.

Если же $C_\nu > 0$ и $|\lambda| < C_\nu$, то мы можем выбрать λ_0, такое, что $\lambda_0 < C_\nu$. Тогда множество S_c пусто, и из (3) следует, что норма резольвенты равномерно ограничена на ортонормированном базисе числом $\frac{\lambda_0}{C_\nu\sqrt{\lambda_0^2-|\lambda|^2}}$. Значит, $\sigma(U_\nu) \subset \{\lambda \in \overline{D} \mid C_\nu \leqslant |\lambda| \leqslant 1\}$.

Осталось найти собственные числа оператора U_ν. Пусть λ – собственное число оператора U_ν и f – соответствующая ему собственная функция. Пусть a_c – коэффициенты разложения функции f в ряд Фурье по ортонормированному семейству f_c:

$$f = \sum_c a_c f_c.$$

Так как $U_\nu f = \lambda f$ и имеет место равенство (1), для любого $c \in \mathbb{Z}^n$ получаем, что $\widehat{\nu}(c)a_c = \lambda a_{Ac}$. Так как $\widehat{\nu}(c) \neq 0$, имеем $\lambda \neq 0$. По индукции получаем, что

$$a_{A^n c} = \frac{\prod\limits_{k=0}^{n-1} \widehat{\nu}(A^k c)}{\lambda^n} a_c.$$

Так как при $c \neq 0$ для всех достаточно больших k выполняется неравенство $|\widehat{\nu}(A^k c)| > |\lambda|$, отсюда следует, что если $|a_c| \neq 0$, то $|a_{A^n c}| \not\to 0$, что противоречит равенству Парсеваля. Следовательно, $a_c = 0$ при $c \neq 0$, функция f есть константа, а $\lambda = 1$.[1] □

Пример 1. Пусть ξ – гомоклиническая точка, а ν – дельта-мера, в ней сосредоточенная. В этом случае $\widehat{\nu}(c) = e^{2\pi i\langle c,\xi\rangle}$, $C_\nu = 1$ и $\sigma(U_\nu) = \partial D$.

Теорема 2. *Пусть существует такой вектор $c_0 \in \mathbb{Z}^n$, что $\widehat{\nu}(c_0) = 0$. Тогда*

- $\sigma(U_\nu) = \overline{D}$;

[1]Как заметил рецензент, вторую часть теоремы можно доказать без введения функции g_c, выкладок (2) и (3). Для этого достаточно заметить, что из леммы следует, что $U_\nu|_{T_c}$ является компактным возмущением стандартного двустороннего сдвига на T_c. Поэтому по теореме Вейля (см. [4, стр. 97]) спектры этих двух операторов могут отличаться только множеством собственных значений. Как показано в конце доказательства теоремы 1, у оператора U_ν (и $U_\nu|_{T_c}$) нет собственных чисел, отличных от 1. Значит, в силу круговой симметрии его спектр совпадает со спектром двустороннего сдвига на T_c, то есть с ∂D.

- *существует инвариантное относительно U_ν циклическое подпространство, спектр сужения оператора U_ν на которое равен $\overline{D}$. Круг D состоит из собственных чисел оператора U_ν.*

Доказательство. По аналогии с доказательством предыдущей теоремы рассмотрим подпространство $T_{c_0} = \overline{\langle f_{A^n c_0} \mid n \in \mathbb{Z} \rangle}$ и выберем максимальное целое число $k \geqslant 0$, такое, что $\widehat{\nu}(A^{-k} c_0) = 0$ (оно существует по лемме). Для каждого $\lambda \in D$ из равенства (2) следует, что $g_{A^{-k} c_0}$ является собственной функцией, соответствующей числу λ. Следовательно, в качестве циклического подпространства, доказывающего второе утверждение теоремы, можно взять циклическое подпространство, порождённое функцией $f_{A^{-k} c_0}$. Первая часть теоремы в этом случае является непосредственным следствием второй. □

Следствие. *Если $C_\nu = 0$, то независимо от того, обращаются ли в 0 коэффициенты Фурье меры ν, $\sigma(U_\nu) = \overline{D}$.*

Пример 2. Пусть ξ – ненулевая гомоклиническая точка, а ν – равномерная мера, сосредоточенная на ξ и $-\xi$. Прямое вычисление показывает, что коэффициенты Фурье меры ν вычисляются по формуле $\widehat{\nu}(c) = \cos(2\pi \langle c, \xi \rangle)$. Следовательно, так как у ξ хотя бы одна координата иррациональна, $C_\nu = 0$ и, тем самым, спектр соответствующего оператора U_ν совпадает с $\overline{D}$. При $n = 2$ непосредственной проверкой можно убедиться, что $|\widehat{\nu}(c)| > 0$ при всех c, поэтому пространство $L^2(\mathbb{T}^2)$ представимо в виде прямой суммы попарно ортогональных, инвариантных относительно U_ν циклических подпространств, спектр сужения оператора U_ν на каждое из которых, за исключением подпространства констант, равен ∂D.

Пример 3. Пусть ξ – ненулевая гомоклиническая точка, $c \in \mathbb{Z}^n$ – такой вектор, что $\cos(2\pi \langle c, \xi \rangle) < 0$ (он всегда существует), а ν – мера, сосредоточенная на ξ, $-\xi$ и 0: $\nu(\xi) = \nu(-\xi) = p/2$, $\nu(0) = 1 - p$, где p является решением линейного уравнения $p \cos(2\pi \langle c, \xi \rangle) + 1 - p = 0$. Тогда $\widehat{\nu}(c) = 0$, и для меры ν справедлива теорема 2.

Теорема 3. *Спектры операторов $U_\nu U_\nu^*$ и $U_\nu^* U_\nu$ являются чисто точечными и совпадают с замыканием множества $\{|\widehat{\nu}(c)|^2 \mid c \in \mathbb{Z}^n\}$.*

Доказательство. Легко проверить, что

$$U_\nu^* f(x) = \int\limits_N f(T^{-1}x - T^{-1}\xi)\, d\nu(\xi).$$

Отсюда следует, что

$$U_\nu U_\nu^* f(x) = \int\limits_N \int\limits_N f(x + T^{-1}\xi_1 - T^{-1}\xi_2)\, d\nu(\xi_1)\ d\nu(\xi_2).$$

Рассмотрим действие оператора $U_\nu U_\nu^*$ на функцию f_c:

$$\begin{aligned} U_\nu U_\nu^* f_c(x) &= \int\limits_N \int\limits_N e^{2\pi i \left\langle c, x + T^{-1}\xi_1 - T^{-1}\xi_2 \right\rangle}\, d\nu(\xi_1)\, d\nu(\xi_2) \\ &= e^{2\pi i \langle c, x\rangle} \int\limits_N e^{2\pi i \left\langle c, T^{-1}\xi_1 \right\rangle}\, d\nu(\xi_1) \int\limits_N e^{-2\pi i \left\langle c, T^{-1}\xi_2 \right\rangle}\, d\nu(\xi_2) \\ &= f_c(x) |\widehat{\nu}(A^{-1}c)|^2. \end{aligned}$$

Аналогично проверяется, что $U_\nu^* U_\nu f_c(x) = f_c(x)|\widehat{\nu}(c)|^2$. Тем самым, $U_\nu U_\nu^*$ и $U_\nu^* U_\nu$ суть операторы умножения, откуда и следует требуемое утверждение. □

Пример 4. Пусть опять ξ – ненулевая гомоклиническая точка, а ν – равномерная мера, сосредоточенная на ξ и $-\xi$. Так как $\widehat{\nu}(c) = \cos(2\pi \langle c, \xi\rangle)$, в данном случае спектр операторов $U_\nu U_\nu^*$ и $U_\nu^* U_\nu$ совпадает с отрезком $[0, 1]$.

§3. Заключение

В работе описан спектр возмущения гиперболического автоморфизма тора в терминах коэффициентов Фурье возмущающей меры. В некоторых важных частных случаях получено полное описание спектра возмущённого автоморфизма.

Автор выражает благодарность А. М. Вершику за постановку задачи и помощь в поиске литературы по данной тематике.

Литература

1. A. M. Vershik, *Polymorphisms, Markov processes, quasi-similarity.* — Discrete Contin. Dyn. Syst. **13**, no. 5 (2005), 1305–1324.
2. А. М. Вершик, *Многозначные отображения с инвариантной мерой (полиморфизмы) и марковские операторы.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **72** (1977), 26–61.

3. А. М. Вершик, *Сверхгрубость гиперболических автоморфизмов и унитарные дилатации марковских операторов.* — Вестник ЛГУ, сер. 1, вып. 3 (1987), 28–33.
4. П. Халмош, *Гильбертово пространство в задачах.* М., Москва, 1970.

Levin A. M. The spectrum of a perturbation of a hyperbolic toral automorphism.

In this paper, we consider a Markov operator (i.e., a contraction preserving the subspace of constants and the nonnegativity of functions) in the L^2 space on the n-dimensional torus that is a special perturbation of the unitary operator corresponding to a hyperbolic toral automorphism. We prove some properties of its spectrum and the spectrum of some related operators.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28,
Старый Петергоф,
198504 С.-Петербург,
Россия
E-mail: levlam@mail.ru

Поступило 4 марта 2013 г.