Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 411, 2013 г.

И. А. Крепкий

СКЛЕИВАНИЕ ГРАФОВ И ПЕСОЧНЫЕ ГРУППЫ

§1. Обозначения

Пусть M – произвольная квадратная целочисленная матрица. Мультимножество чисел, расположенных на диагонали нормальной формы Смита ([3]) этой матрицы, обозначим через $\overline{M}$.

Как и в [2], здесь мы будем использовать следующее определение песочной группы графа через нормальную форму Смита матрицы Лапласа этого графа.

Определение 1. *Песочной группой графа G называется группа*

$$S(G) \cong \bigoplus_{a \in (\overline{M} \setminus \{0\})} C_a,$$

где M – матрица Лапласа этого графа. (Здесь и далее C_n обозначает циклическую группу порядка n.)

Более подробно с двумя классическими определениями песочной группы графа можно ознакомиться в [1].

В силу свойств матрицы Лапласа мы могли бы записать $S(G) \cong \bigoplus_{a \in \overline{M'}} C_a$, где M' – матрица, полученная из M удалением строки и столбца, содержащих произвольный диагональный элемент.

Определение 2. *Пусть G и F – графы, не имеющие петель (но допускающие наличие мультирёбер). Пусть каждый из графов имеет ровно одну помеченную вершину. Обозначим через E_G мультимножество вершин графа G, соответствующее множеству рёбер, исходящих из помеченной вершины. Аналогичным образом определим E_F для графа F. Построим новый граф, удалив помеченные вершины обоих графов, построив новую вершину и проведя из неё рёбра таким образом, чтобы множеству этих рёбер соответствовало мультимножество вершин $E_G \cup E_F$. Эту процедуру будем называть процедурой*

Ключевые слова: песочные группы, склеивание графов, нормальная форма Смита.

склеивания графов G и F, а полученный в результате граф обозначим через $X(G,F)$.

Менее формально операцию склеивания графов можно описать как процедуру слияния помеченных вершин двух различных графов в одну вершину.

§2. Основная теорема

Теорема 1. *Для произвольных мультиграфов F и G, каждый из которых не имеет петель и снабжён помеченной вершиной, справедливо тождество $S(X(G,F)) \cong S(G) \times S(F)$.*

Доказательство. Считаем, что граф G состоит из n вершин. Для удобства занумеруем вершины графа $X(G,F)$ таким образом, что вершины с 1 по n соответствуют вершинам графа G (т.е. подграф, образованный первыми n вершинами изоморфен графу G) и при этом n-я вершина соответствует помеченной вершине графа G. Считаем также, что все вершины, соответствующие вершинам, смежным помеченной вершине графа G, занумерованы числами от $n-i$ до $n-1$, причём $(n-k)$-я вершина (где $1 < k < i$) соединена с n-й вершиной a_{n-i} рёбрами.

Рассмотрим матрицу Лапласа графа $X(G,F)$:

$$\left(\begin{array}{cccccc|c}
 & & & & & & 0 \\
 & & & & & & \vdots \\
 & G' & & & & & 0 \\
 & & & & & & a_{n-k} \\
 & & & & & & \vdots \\
 & & & & & & a_{n-1} \\ \hline
0 & \cdots & 0 & a_{n-k} & \cdots & a_{n-1} & \\
 & & & & & & F^* \\
 & & & & & &
\end{array}\right).$$

Здесь матрица F^* получена из матрицы Лапласа графа F вычитанием из диагонального элемента, соответствующего помеченной вершине (т.е. элемента, находящегося на пересечении n-х столбца и строки), числа $s = \sum_{i=1}^{k} a_{n-i}$, а G' – матрица, полученная из матрицы Лапласа графа G удалением n-х столбца и строки.

Для удобства матрицы Лапласа графов G, F и $X(G,F)$ будем обозначать точно так же, как и сами графы. В таких обозначениях уже из одного определения матрицы G' следует равенство

$$\overline{G'} = \overline{G} \setminus \{0\}. \tag{1}$$

Теперь построим матрицу $X'(G,F)$, удалив из $X(G,F)$ n-ю строку и n-й столбец:

$$\left(\begin{array}{c|c} G' & \\ \hline & F' \end{array}\right).$$

Как и в случае с G', конструкции матриц F' и $X'(G,F)$ влекут за собой равенства

$$\overline{F'} = \overline{F} \setminus \{0\}, \tag{2}$$

$$\overline{X'(G,F)} = \overline{X(G,F)} \setminus \{0\}. \tag{3}$$

Матрица $X'(G,F)$ блочно-диагональна, что в сочетании со свойствами нормальной формы Смита влечёт за собой равенство

$$\overline{X'(G,F)} = \overline{G'} \cup \overline{F'}.$$

С учётом равенств (1), (2) и (3) получаем

$$\overline{X(G,F)} \setminus \{0\} = (\overline{G} \setminus \{0\}) \cup (\overline{F} \setminus \{0\}).$$

Для песочной группы нашего графа это в точности означает, что $S(X(G,F)) \cong S(G) \times S(F)$. □

§3. Следствия

Интересно заметить, что ход доказательства не меняется при изменении выбора помеченных вершин склеиваемых графов и песочная группа графа, полученного склеиванием, зависит только от того, какие именно графы мы склеиваем, но не от того, как мы это делаем. Стало быть, в вопросах, связанных с вычислением песочных групп, мы можем свободно говорить о склеивании графов, пропуская этап выбора помеченных вершин.

Очевидным образом, мы получаем такое следствие из теоремы.

Следствие 1. *Если H – граф, полученный последовательным склеиванием n копий графа G, то $S(H) \cong (S(G))^n$.*

Далее приведём несколько примеров приложения этого следствия.

На рис. 1–3 изображены графы, сильно различные по своей структуре, но имеющие одну и ту же песочную группу – $(C_3)^7$ (каждый из графов получен последовательным склеиванием семи 3-циклов, а песочная группа 3-цикла есть C_3).

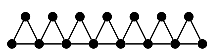

Рис. 1

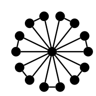

Рис. 2

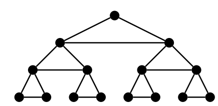

Рис. 3

В статье [2] была определена серия $\{\mathrm{Tr}_n\}$ треугольных бинарных деревьев и были вычислены песочные группы графов этой серии (на рис. 4–6 изображены ее первые 3 графа). Этот результат легко получается применением указанного выше следствия. Действительно, из определения серии следует, что Tr_n получен последовательным склеиванием одного 3-цикла и двух копий графа Tr_{n-1}, при этом Tr_1 является 3-циклом. Иначе говоря, Tr_n получен последовательным склеиванием $(2^n - 1)$ 3-циклов. Песочная группа 3-цикла есть C_3. В таком случае $S(\mathrm{Tr}_n) \cong (C_3)^{2^n-1}$.

На рис. 7–9 и рис. 10–12 изображены первые элементы серий графов $\{\mathrm{Sq}_n\}$ и $\{\mathrm{Sq}'_n\}$ соответственно. Алгоритм их построения совпадает с алгоритмом построения графов $\{\mathrm{Tr}_n\}$, но вместо 3-циклов используются 4-циклы для $\{\mathrm{Sq}_n\}$ и полные графы на 4 вершинах для

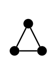

Рис. 4. Tr_1.

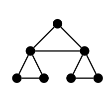

Рис. 5. Tr_2.

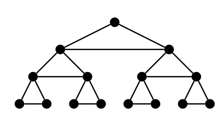

Рис. 6. Tr_3.

Рис. 7. Sq_1.

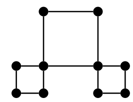

Рис. 8. Sq_2.

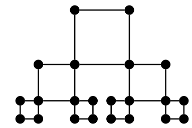

Рис. 9. Sq_3.

Рис. 10. Sq'_1.

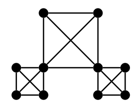

Рис. 11. Sq'_2.

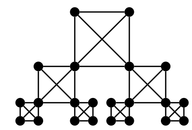

Рис. 12. Sq'_3.

$\{\mathrm{Sq}'_n\}$. С учётом того, что песочная группа 4-цикла есть C_4, а песочная группа полного графа на 4 вершинах есть $(C_4)^2$, очевидно, что $S(\mathrm{Sq}_n) \cong (C_4)^{2^n-1}$ и $S(\mathrm{Sq}'_n) \cong (C_4)^{2^{(n+1)}-2}$.

По самой своей конструкции песочная группа графа всегда является конечной и абелевой. Известно, что песочная группа n-цикла есть C_n, стало быть, в свете доказанной теоремы становится ясно, что, правильно выбирая циклические графы для склеивания, мы можем построить граф, песочная группа которого изоморфна произвольной конечной абелевой группе. Это и сформулировано в следствии ниже.

Следствие 2. *Для любой конечной абелевой группы G существует такой граф H, что $S(H) \cong G$.*

§4. Благодарности

Автор благодарит Сергея Васильевича Дужина за научное руководство, помощь в работе с системой TEX при написании данной статьи и ценные рекомендации по оформлению работы.

Литература

1. A. E. Holroyd, L. Levine, K. Meszaros, Yu. Peres, J. Propp, D. B. Wilson, *Chip-firing and rotor-routing on directed graphs.* arXiv:0801.3306.
2. И. А. Крепкий, *Песочные группы треугольных бинарных деревьев.* Препринт ПОМИ (2012); http://www.pdmi.ras.ru/preprint/2012/12-21.html.

3. K. R. Matthews, *Smith normal form.* MP274: Linear Algebra, Lecture Notes, University of Queensland, 1991; http://www.numbertheory.org/courses/MP274/smith.pdf.

Krepkiy I. A. Sandpile groups and the join of graphs.

We introduce the procedure of joining two graphs by identifying an arbitrary pair of their vertices. The main result is that the sandpile group of the join of several finite graphs is the direct product of the sandpile groups of the components. Some consequences are derived.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., д. 28,
Старый Петергоф,
198504 С.-Петербург,
Россия
E-mail: feb418@gmail.com

Поступило 12 февраля 2013 г.