Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 410, 2013 г.

А. И. Назаров, С. В. Поборчий

ОБ УСЛОВИЯХ СПРАВЕДЛИВОСТИ НЕРАВЕНСТВА ПУАНКАРЕ

Пусть G – область в $\mathbb{R}^n$. Определим $L^l_p(G)$ как пространство функций $u \in L_{p,loc}(G)$, имеющих обобщенные соболевские производные $D^\alpha u \in L_p(G)$, $|\alpha| = l$. Напомним, что при $p \geqslant 1$ и $l \in \mathbb{N}$ это пространство является банаховым с нормой

$$\|u\|_{L_p(g)} + \||\nabla_l u|\|_{L_p(G)},$$

где $g \Subset G$ – внутренняя подобласть G (т.е. замыкание g – компакт в G), а

$$|\nabla_l u| = \Big(\sum_{|\alpha|=l} (D^\alpha u)^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Различные внутренние подобласти $g \Subset G$ индуцируют эквивалентные нормы.

Хорошо известно (см., напр. [1, 1.1.10], [2, §9]), что если пространство Соболева $L^l_p(G)$ непрерывно вложено в $L_q(G)$, то в области G выполнено обобщенное неравенство Пуанкаре

$$\inf\{\|u - P\|_{L_q(G)} : P \in \mathcal{P}_l\} \leqslant \mathrm{const}\, \||\nabla_l u|\|_{L_p(G)}, \quad u \in L^l_p(G) \qquad (1)$$

(здесь и далее $\mathcal{P}_l$ означает множество полиномов в $\mathbb{R}^n$ степени меньше l).

Очевидно, что вложение $L^l_p(G) \subset L_q(G)$ влечет $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$ и, следовательно, $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$. Мы покажем, что эти условия необходимы для справедливости неравенства (1) в случае $q \neq q^*$, где $q^* = np(n-lp)^{-1}$ – предельный показатель в теореме вложения Соболева при $lp < n$. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$ имеет место неравенство* (1). *При $lp < n$ предположим дополнительно, что $q < q^*$. Тогда пространство $L^l_p(G)$ непрерывно вложено в $L_q(G)$. В частности, $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$ и $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$.*

Ключевые слова: неравенство Пуанкаре, теоремы вложения.
Работа первого автора частично поддержана грантом РФФИ N12–01–00439.

Доказательство. Для начала отметим, что в силу $\dim(\mathcal{P}_l) < \infty$ для любой $u \in L_p^l(G)$ инфимум в (1) достигается на некотором полиноме Q.

Предположим, что $\mathrm{mes}_n(G) = \infty$. Введем срезающую функцию

$$\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n), \quad 0 \leqslant \eta \leqslant 1, \quad \eta(x) \equiv 1 \text{ в } B_1, \quad \eta(x) \equiv 0 \text{ в } \mathbb{R}^n \setminus B_2 \quad (2)$$

(здесь B_r – шар в $\mathbb{R}^n$ радиуса r) и положим $u_r(x) = \eta(x/r)$.

Обозначим $G_r = G \cap B_r$. Тогда, очевидно, $u_r|_{G_r} \equiv 1$, $u_r|_{G\setminus G_{2r}} \equiv 0$. Далее, $u_r \in L_p^l(G)$, поэтому в силу (1) существует полином $P_r \in \mathcal{P}_l$, для которого

$$\|\mathbf{1} - P_r\|_{L_q(G_r)} + \|P_r\|_{L_q(G\setminus G_{2r})} \leqslant c\,\||\nabla_l u_r|\|_{L_p(G)} \quad (3)$$

с константой, не зависящей от u. Отсюда $\|P_r\|_{L_q(G\setminus G_{2r})} < \infty$, и значит, $\|P_r\|_{L_q(G)} < \infty$.

Для оценки первого слагаемого в левой части (3) нам потребуется такая лемма.

Лемма 1. *Пусть в конечномерном линейном пространстве $\mathcal{L}$ задана последовательность норм $\|\cdot\|_r$, причем $\|x\|_r$ – неубывающая функция r для всех $x \in \mathcal{L}$. Обозначим*

$$\mathcal{L}_0 = \{x \in \mathcal{L} : \lim_{r\to\infty} \|x\|_r < \infty\}$$

и предположим, что $x_0 \notin \mathcal{L}_0$. Тогда

$$\inf\{\|x_0 - P\|_r : P \in \mathcal{L}_0\} \geqslant \delta \|x_0\|_r, \quad (4)$$

где δ – константа, не зависящая от r.

Доказательство леммы 1. Обозначим P_r элемент $\mathcal{L}_0$, на котором достигается инфимум в (4), и заметим, что $\|P_r\|_r \leqslant 2\|x_0\|_r$ (иначе нуль давал бы лучшее приближение для x_0). Обозначим $Q_r = \frac{1}{\|x_0\|_r} P_r$. Ввиду определения подпространства $\mathcal{L}_0$ все нормы $\|\cdot\|_r$ равномерно эквивалентны на нем. Поэтому последовательность Q_r ограничена, и из нее можно извлечь сходящуюся подпоследовательность. Обозначим $Q = \lim\limits_{r\to\infty} Q_r$.

Если $\lim\limits_{r\to\infty} \|Q\|_r \leqslant \frac{1}{2}$, то

$$\|x_0 - P_r\|_r = \|x_0\|_r \cdot \Big\| \frac{1}{\|x_0\|_r}\, x_0 - Q_r \Big\|_r \geqslant \|x_0\|_r \cdot \big(1 - \|Q\|_r - o(1)\big), \quad r \to \infty,$$

что дает (4). Если же $\|Q\|_{r_0} > \frac{1}{2}$ для некоторого r_0, то

$$\|x_0 - P_r\|_r \geqslant \|x_0\|_r \cdot \left\| \frac{1}{\|x_0\|_r}\, x_0 - Q_r \right\|_{r_0}$$
$$\geqslant \|x_0\|_r \cdot \left(\|Q\|_{r_0} - o(1) - \frac{\|x_0\|_{r_0}}{\|x_0\|_r} \right), \quad r \to \infty,$$

что также приводит к (4). Таким образом, из любой последовательности P_r можно извлечь подпоследовательность, для которой выполнено (4), а потому этому условию удовлетворяет и вся последовательность. □

Продолжим доказательство теоремы 1. Ввиду предположения $\mathrm{mes}_n(G) = \infty$ имеем $\|\mathbf{1}\|_{L_q(G_r)} \to \infty$ при $r \to \infty$. Согласно лемме,

$$\|\mathbf{1} - P_r\|_{L_q(G_r)} \geqslant \delta \|\mathbf{1}\|_{L_q(G_r)} = \delta \cdot \mathrm{mes}_n(G)^{\frac{1}{q}},$$

и потому (2) влечет

$$\mathrm{mes}_n(G_r)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\, r^{-l} \mathrm{mes}_n(G_{2r})^{\frac{1}{p}}.$$

Так как $\mathrm{mes}_n(G_{2r}) \leqslant c\, r^n$, отсюда следует, что

$$\mathrm{mes}_n(G_r)^{\frac{1}{q}} \leqslant C\, \mathrm{mes}_n(G_{2r})^{\frac{1}{p} - \frac{l}{n}} = o\big(\mathrm{mes}_n(G_{2r})^{\frac{1}{q}}\big), \quad r \to \infty \tag{5}$$

(при $lp < n$ здесь использовано условие $q < q^*$).

Но соотношение (5) очевидно влечет сверхстепенной рост $\mathrm{mes}_n(G_r)$, что невозможно. Таким образом, $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$.

Предположим теперь, что $\mathcal{P}_l \not\subset L_q(G)$. Рассмотрим $u_r(x) = Q(x) \cdot \eta(|x|/r)$, где $Q \in \mathcal{P}_l \backslash L_q(G)$, а η – срезающая функция из (2). Подставляя функцию u_r в (1), получим для некоторого $P_r \in \mathcal{P}_l$ оценку

$$\|Q - P_r\|_{L_q(G_r)} + \|P_r\|_{L_q(G \backslash G_{2r})} \leqslant c\, \||\nabla_l u_r|\|_{L_p(G)}. \tag{6}$$

Отсюда следует, что $P_r \in L_q(G)$. Поэтому, согласно лемме,

$$\|Q - P_r\|_{L_q(G_r)} \geqslant \delta \|Q\|_{L_q(G_r)} \to \infty, \quad r \to \infty.$$

Однако из определения u_r легко видеть, что $|\nabla_l u_r|$ имеет мажоранту $c\, r^{-1}$. Поскольку $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$, такую же мажоранту имеет и правая часть (6), что невозможно. Таким образом, $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$.

Осталось заметить, что для каждой функции $u \in L^l_p(G)$ полином $Q \in \mathcal{P}_l$, дающий инфимум в (1), удовлетворяет условиям $Q \in L_q(G)$ и $u - Q \in L_q(G)$, т.е. имеет место теоретико-множественное включение

$L_p^l(G) \subset L_q(G)$. Непрерывность оператора вложения $L_p^l(G) \to L_q(G)$ следует теперь из замкнутости этого оператора. □

Отметим, что при $lp < n$ и $q = q^*$ неравенство (1) может быть выполнено и для областей бесконечного объема. Например, для $G = \mathbb{R}^n$ имеет место

Предложение 1 ([3]). *Пусть $lp < n$. Тогда для каждой функции $u \in L_p^l(\mathbb{R}^n)$ найдется такой полином $P \in \mathcal{P}_l$, что*

$$\|u - P\|_{L_{q^*}(\mathbb{R}^n)} \leqslant \mathrm{const}\, \||\nabla_l u|\|_{L_p(\mathbb{R}^n)}.$$

Отсюда очевидно следует, что при $lp < n$ и $q = q^*$ теорема 1 не выполняется.

Интерес представляют также достаточные условия справедливости неравенства Пуанкаре при $lp < n$ и $q = q^*$ в областях бесконечного объема. Следующая теорема обобщает результат из [4], где она была доказана для $l = 1$. Отметим, что предложение 1 является ее следствием.

Теорема 2. *Пусть $lp < n$, и G – область в $\mathbb{R}^n$, представимая объединением счетного набора ограниченных областей $\{G^i\}_{i=1}^{\infty}$, таких, что $G^i \Subset G^{i+1}$. Предположим, что в каждой области G^i выполнено обобщенное неравенство Пуанкаре*

$$\inf\left\{\|u - P\|_{L_{q^*}(G^i)} : P \in \mathcal{P}_l\right\} \leqslant c_0\, \|\nabla_l u\|_{L_p(G^i)} \tag{7}$$

с константой c_0, не зависящей от i. Тогда в области G выполнено неравенство (1).

Доказательство. Пусть $u \in L_p^l(G)$. Тогда $u \in L_p^l(G^i)$ при всех $i \geqslant 1$. Обозначим через P_i полином в $\mathcal{P}_l$, реализующий инфимум в (7). Мы покажем, что последовательность $\{P_i\}$ имеет подпоследовательность, сходящуюся к полиному $P \in \mathcal{P}_l$, для которого выполнено неравенство (1). Используя неравенство Гёльдера, получим

$$\frac{1}{\mathrm{mes}(G^1)} \int\limits_{G^1} |u - P_i|\, dx \leqslant \frac{\|u - P_i\|_{L_{q^*}(G^1)}}{\mathrm{mes}(G^1)^{\frac{1}{q^*}}}. \tag{8}$$

Так как в G^i выполнено неравенство (7), имеем

$$\|u - P_i\|_{L_{q^*}(G^1)} \leqslant c_0\, \|\nabla_l u\|_{L_p(G^i)} \leqslant c_0\, \|\nabla_l u\|_{L_p(G)}.$$

Итак, левая часть (8) ограничена равномерно относительно i. Отсюда следует ограниченность последовательности $\{P_i\}$. Тем самым существует подпоследовательность $\{P_{i_s}\}$, сходящаяся к некоторому полиному $P \in \mathcal{P}_l$. Пусть χ_E – характеристическая функция множества E. Имеем

$$\chi_{G^{i_s}}(x)|u(x)-P_{i_s}(x)|^{q^*} \to \chi_G(x)|u(x)-P(x)|^{q^*}.$$

В силу леммы Фату и неравенства (7),

$$\int\limits_G |u(x)-P(x)|^{q^*}\,dx \leqslant \lim\inf_{s\to\infty} \int\limits_G \chi_{G^{i_s}}(x)|u(x)-P_{i_s}(x)|^{q^*}\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \lim_{s\to\infty} c_0^{q^*}\|\nabla_l u\|^{q^*}_{L_p(G^{i_s})} = c_0^{q^*}\|\nabla_l u\|^{q^*}_{L_p(G)},$$

и утверждение теоремы доказано. □

Литература

1. В. Г. Мазья, *Пространства С. Л. Соболева.* Л., 1985.
2. С. Л. Соболев, *Некоторые применения функционального анализа в математической физике.* Л., 1950.
3. С. Л. Соболев, *Плотность финитных функций в пространстве L_p^m.* — Сиб. мат. ж. **4**, No. 3 (1963), 673–682.
4. R. Hurri-Syrjänen, *Unbounded Poincaré domains,* — Annals Acad. Sci. Fennicae, Ser. A. I. Mathematica **17** (1992), 409–423.

Nazarov A. I., Poborchi S. V. On conditions of validity of the Poincaré inequality.

Let $l = 1, 2, \ldots$, $p, q \geqslant 1$, let G be a domain in $\mathbb{R}^n$, and let $\mathcal{P}_l$ be the space of polynomials in $\mathbb{R}^n$ of degree less than l. We show that inclusion $\mathcal{P}_l \subset L_q(G)$ (and hence $\mathrm{mes}_n(G) < \infty$) is necessary for validity of the generalized Poincaré inequality

$$\inf\left\{\|u-P\|_{L_q(G)} : P \in \mathcal{P}_l\right\} \leqslant \mathrm{const}\,\|\nabla_l u\|_{L_p(G)}, \quad u \in L_p^l(G).$$

Thus, this inequality is equivalent to continuity of the embedding $L_p^l(G) \to L_q(G)$.

In the case of critical Sobolev exponent $q = np/(n - lp)$ for $lp < n$ this fact is not true. We give some sufficient conditions for validity of the Poincaré inequality in domains of infinite volume.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург,
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: al.il.nazarov@gmail.com

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28,
198504, С.-Петербург, Россия
E-mail: poborchi@mail.ru

Поступило 12 декабря 2012 г.