

А. В. Шанин

ДИФРАКЦИЯ ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ ВОЛНЫ НА РЕШЕТКЕ СО СЛОЖНЫМ ПЕРИОДОМ ПРИ СКОЛЬЗЯЩЕМ ПАДЕНИИ

§1. Постановка задачи для уравнения Гельмгольца на РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В работе [1] показано, что оценка добротности двумерных резонаторов прямоугольной геометрии с окнами требует решения специфических задач, принадлежащих к т.н. “вайнштейновскому” классу. Это двумерные задачи дифракции плоской волны на бесконечной решетке, состоящей из точек ветвления разветвленной поверхности, расположенных в ряд вдоль одной прямой. Разветвленные поверхности естественным образом возникают в задачах о резонаторах при применении метода отражений. Волна предполагается высокочастотной (длина волны мала по сравнению с расстоянием между точками ветвления), а угол падения волны на решетку точек ветвления предполагается малым (скользящим).

В настоящей работе рассматривается следующая задача. Разветвленная поверхность состоит из “основного” листа и бесконечного числа “вспомогательных” листов. Основной лист представляет собой плоскость (x, y) , разрезанную по полупрямым $y < 0, x = x_n$,

$$x_n = \begin{cases} (a+b)l, & n = 2l \\ (a+b)l + a, & n = 2l + 1 \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z},$$

где a и b есть геометрические параметры задачи. Вспомогательные листы нумеруются индексом n . Каждый из них разрезан по полупрямой $y < 0, x = x_n$. Разветвленная поверхность получается путем приклеивания вспомогательных листов к основному. При этом берега разреза вспомогательного листа с индексом n приклеиваются к берегам разреза основного листа, выходящего из точки $(x_n, 0)$. Правый берег

Ключевые слова: задача Вайнштейна, дифракция на решетке, формула расщепления.

Работа частично поддержана грантами Правительства РФ 11.G34.31.0066, “Научные школы” 2631.2012.2, РФФИ 12-02-00114.

основного листа приклеивается к левому берегу вспомогательного и наоборот. Таким образом, точки $(x_n, 0)$ представляют собой точки ветвления поверхности. Каждая точка ветвления имеет второй порядок.

Решетка точек ветвления имеет период $a + b$ вдоль оси x . Схема поверхности показана на рис. 1.

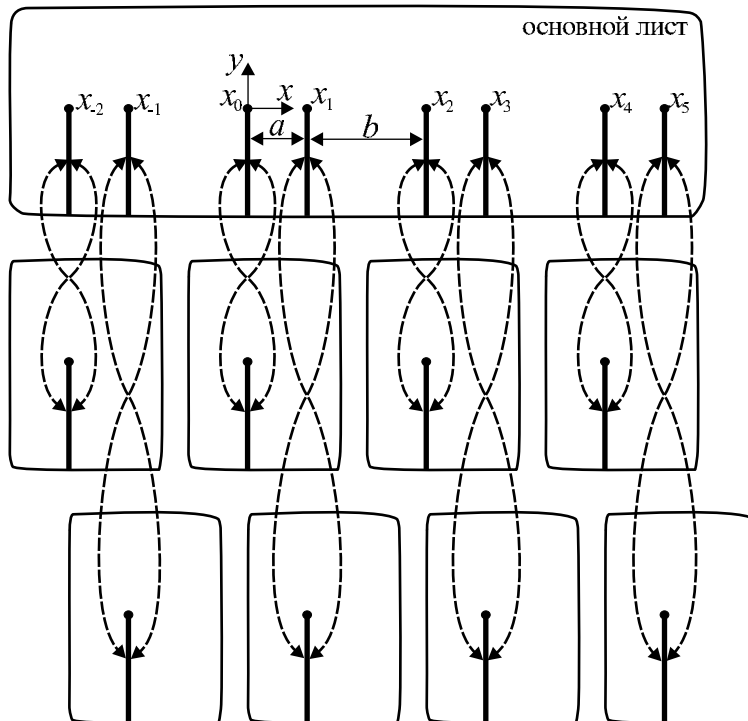


Рис. 1. Структура разветвленной поверхности.

На разветвленной поверхности выполняется уравнение Гельмгольца

$$\Delta u_H + k^2 u_H = 0. \quad (1)$$

По основному листу из бесконечности приходит падающая волна

$$u_{H_{in}} = \exp\{ik(x \cos \theta_{in} - y \sin \theta_{in})\}. \quad (2)$$

Угол падения θ_{in} предполагается малым.

Зависимость u_n от времени предполагается имеющей форму $e^{-i\omega t}$, где ω – круговая частота. Отношение ω/k представляет собой скорость волн в среде.

Полное поле должно быть непрерывным на всей поверхности и удовлетворять условиям Мейкснера в точках ветвления. Рассеянная волна должна удовлетворять условию излучения на бесконечности на каждом листе. Математическая постановка задачи на описанной поверхности не отличается от постановки задачи, например, на двулистной поверхности с одной точкой ветвления, построенной для классической задачи Зоммерфельда.

Наличие дополнительных листов приводит к тому, что полупрямые $y < 0$, $x = x_n$ на основном листе могут рассматриваться как идеально поглощающие экраны.

Рассматриваемая задача в терминах работы [1] соответствует, например, высокочастотной моде в резонаторе, показанном на рис. 2. Резонатор представляет собой тонкую жесткую стенку в неограниченном пространстве. Стенка выполнена в форме квадрата с отсутствующим углом. Мода формируется семейством замкнутых параллельных лучей. Параметр $a + b$ в данном случае есть полная длина луча $2\sqrt{2}D$. Параметр a равен $\sqrt{2}d$.

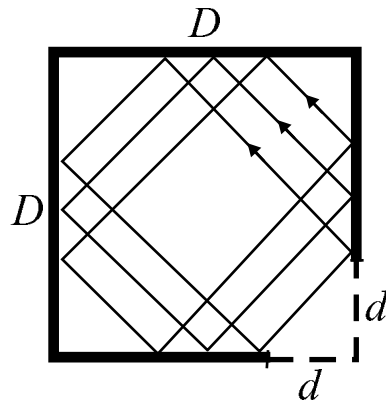


Рис. 2. Мода в резонаторе, соответствующая рассматриваемой задаче.

§2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Малость угла θ_{in} и малость длины волны по сравнению с a и b позволяют рассматривать данную задачу в параболическом приближении теории дифракции. В данном случае переход к такому приближению означает пренебрежение цилиндрическими волнами, рассеянными точками ветвления под большими углами, и учет только полей, рассеянных вперед и имеющих преимущественно полутеневого характер.

В качестве основного направления распространения волны выбирается направление оси x , т.е. волновое поле представляется в виде

$$u_{\text{H}} = \exp\{ikx\}u(x, y). \quad (3)$$

Функция u имеет более медленную зависимость от x , чем u_{H} . Подставляя (3) в (1) и пренебрегая членом, содержащим вторую производную u по x (см. [2]), получим, что u приближенно удовлетворяет параболическому уравнению

$$(\partial_y^2 + 2ki\partial_x)u = 0. \quad (4)$$

Основным мотивом перехода к параболическому приближению является существенное упрощение описания распространения волн в направлении оси x . Действительно, в любой области $x' < x < x''$, не содержащей препятствий или точек ветвления, значения поля $u(x', y)$ являются начальными данными, позволяющими вычислить поле во всей области по формуле

$$u(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x', y')g(x - x', y - y')dy', \quad (5)$$

где g — функция Грина параболического уравнения на неограниченной плоскости

$$g(x, y) = \begin{cases} k^{1/2}(2\pi x)^{-1/2} \exp\{iky^2/(2x) - i\pi/4\}, & x > 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases} \quad (6)$$

В частности, поле на дополнительном листе левее точки ветвления, единственной на этом листе, тождественно равно нулю, поскольку в этой области падающей волны нет по постановке задачи, а рассеянные волны не могут распространяться в отрицательном направлении оси x в силу параболичности уравнения.

Параболическое уравнение может рассматриваться на разветвленной поверхности, построенной в предыдущем разделе, однако можно

упростить рассмотрение, воспользовавшись отсутствием волн, распространяющихся справа налево. Рассмотрим главный лист разветвленной поверхности, разрезанный по полупрямым $y < 0$, $x = x_n$. В силу непрерывности поля на разветвленной поверхности, поле на правом берегу некоторого разреза совпадает с полем на левом берегу разреза, проведенного на соответствующем дополнительном листе, т.е. оно равно нулю:

$$u(x_n + 0, y < 0) = 0. \quad (7)$$

Ставить какие-либо условия на левых берегах разрезов главного листа нет необходимости. С каждого из левых берегов поле гладко продолжается на соответствующий дополнительный лист.

В дальнейшем изложении будет рассматриваться функция u только на главном листе с разрезами $y < 0$, $x = x_n$, на которых выполнены условия (7).

Полное поле u представляет собой сумму падающей волны u_{in} и рассеянной волны u_{sc}

$$u = u_{\text{in}} + u_{\text{sc}}. \quad (8)$$

Падающая волна в параболическом приближении имеет вид

$$u_{\text{in}}(x, y) = \exp \left\{ -ikx\theta_{\text{in}}^2/2 - ik\theta_{\text{in}}y \right\}, \quad (9)$$

где θ_{in} – угол падения. Данный вид гарантирует, что падающая волна удовлетворяет уравнению (4). Полное поле непрерывно везде вне разрезов. Рассеянное поле удовлетворяет граничным условиям, следующим из (7).

$$u_{\text{sc}}(x_m + 0, y) = -u_{\text{in}}(x_m, y), \quad y < 0. \quad (10)$$

Постановку задачи необходимо дополнить условиями в конечных точках разрезов, а также условиями излучения. Условия в конечных точках заключаются в том, что полное поле предполагается ограниченным вблизи конечных точек (это гарантирует отсутствие источников вблизи точек ветвления). Условия излучения заключаются в том, что рассеянное поле не содержит компонент, приходящих из области больших положительных или отрицательных y . Эти условия будут учтены при рассмотрении соответствующих Фурье-компонент.

Отметим, что применимость параболического приближения для задачи на разветвленной поверхности нарушается вблизи точек ветвления (на практике – на расстоянии нескольких длин волн от точки ветвления). Поведение решения параболического уравнения вблизи точки ветвления имеет достаточно сложный характер и качественно отличается от поведения решения уравнения Гельмгольца. На это указывает, например, вид функции g или вид решения (78) в Приложении. Поле при $x < x_m$ в окрестности точки ветвления $(x_m, 0)$ является непрерывным и гладким. Поле в точке $(x_m, 0)$ не определено, а в области $x > x_m$ оно быстро осциллирует в окрестности точки ветвления. Концевые значения $u(x_m, 0)$ играют большую роль в дальнейшем изложении. Всегда будут иметься в виду корректно определенные предельные значения

$$u(x_m - 0, 0) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x_m - \epsilon, 0).$$

Постановка задачи выглядит несколько неожиданно, поскольку граничные условия ставятся только на правых берегах разрезов. В Приложении показано, что в простейшем случае (когда имеется всего одна точка ветвления) такая постановка приводит к физически осмысленным результатам.

Более простая задача описываемого класса возникает, если решетка имеет один разрез на период (или если положить $a = b$ в описанной выше постановке). Данная задача была решена Л. А. Вайнштейном [3]. Наиболее ценный (и удивительный) результат состоит в том, что коэффициент рассеяния в основной дифракционный максимум стремится к -1 при стремлении угла падения θ_{in} к скользящему. Решение было построено с помощью метода Винера–Хопфа [4]. Задача, рассматриваемая в настоящей работе, также может быть рассмотрена методом Винера–Хопфа, однако в этом случае рассмотрение приводит к матричной задаче факторизации, общее решение которой неизвестно.

Для классической задачи Вайнштейна автором был предложен альтернативный (по отношению к методу Винера–Хопфа) метод, основанный на формуле расщепления и спектральном уравнении [5]. В настоящей работе данный метод обобщается на случай поставленной выше задачи.

Среди работ, посвященных вайнштейновским задачам, необходимо отметить работы [6–8], где дифракционные задачи сводятся к интегральным уравнениям типа Винера–Хопфа, а также работы [9, 10], где

обсуждаются важные технические вопросы, связанные с вайнштейновскими задачами.

§3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДЛЯ РАССЕЯННОГО ПОЛЯ В РАМКАХ ТЕОРИИ ФЛОКЕ

Рассматриваемая задача имеет геометрию, периодическую вдоль оси x , поэтому появляется возможность использовать теорию Флоке. Падающее поле при сдвиге на один период умножается на константу

$$\gamma \equiv \frac{u_{\text{in}}(x+a+b)}{u_{\text{in}}(x)} = \exp\{-ik(a+b)\theta_{\text{in}}^2/2\}. \quad (11)$$

Очевидно, рассеянное поле обладает тем же свойством, т.е. при сдвиге на период умножается на ту же константу.

В верхней полуплоскости рассеянное поле может быть представлено в виде суперпозиции плоских волн, распространяющихся в положительном направлении y или убывающих при росте y (неоднородные волны). Очевидно, в суперпозиции участвуют только волны, обладающие свойством Флоке, сформулированным выше. Таким образом, рассеянное поле в области $y > 0$ может быть представлено в виде

$$u_{\text{sc}} = \sum_n R_n \exp\{-ikx\theta_n^2/2 + ik\theta_n y\}, \quad (12)$$

где θ_n представляет собой угол распространения n -ой моды:

$$\theta_n = \left(\theta_{\text{in}}^2 + \frac{4\pi n}{k(a+b)}\right)^{1/2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (13)$$

Нумерация мод выбрана таким образом, что

$$\theta_0 = \theta_{\text{in}}. \quad (14)$$

Ветвь квадратного корня в (13) выбирается таким образом что его значение является положительным действительным или положительным мнимым. Первый случай соответствует распространяющимся волнам (дифракционным порядкам), второй случай соответствует быстро затухающим с ростом y компонентам ближнего поля.

Основная задача настоящей статьи – отыскание коэффициентов генерации дифракционных порядков R_n в представлении (12). При малых θ_{in} ожидается, что все коэффициенты, кроме R_0 , окажутся малы, т.е. рассеяние будет близко к зеркальному.

§4. КРАЕВЫЕ ФУНКЦИИ ГРИНА И ИХ ДИАГРАММЫ НАПРАВЛЕННОСТИ

Определим краевые функции Грина $v_m(x, y)$ следующим образом. Рассмотрим плоскость (x, y) с разрезами, т.е. основной лист разветвленной поверхности, изображенный в верхней части рис. 1. Функции v_m удовлетворяют неоднородным параболическим уравнениям

$$\left(\partial_x + \frac{1}{2ik}\partial_y^2\right)v_m = \delta(x - x_m - 0)\delta(y). \quad (15)$$

Аргумент $x - x_m - 0$ означает, что для достаточно малых положительных ϵ ищется решение задачи с источником в точке $x_m + \epsilon$ (т.е. источник расположен правее точки x_m), после чего берется предел $\epsilon \rightarrow 0$. При любом ненулевом ϵ решения удовлетворяют граничным условиям (7), условиям в краевых точках и условиям излучения.

Функции v_m нетрудно построить в явном виде. В области $x_m < x < x_{m+1}$ функция v_m есть

$$v_m(x, y) = g(x - x_m, y). \quad (16)$$

Это следует из того, что функция g , определенная как (6), удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению вида

$$\left(\partial_x + \frac{1}{2ik}\partial_y^2\right)g = \delta(x)\delta(y).$$

Разумеется, о выполнении неоднородного уравнения с сингулярной правой частью можно говорить только в слабом смысле. Разрез, расположенный при $x = x_m$, не оказывает влияния на поле источника, расположенного при $x = x_m + \epsilon$, потому предельная процедура $\epsilon \rightarrow 0$ не вызывает сложностей.

Далее, в соответствии с формулой (5) и граничным условием (7), поле в области $x_{m+1} < x < x_{m+2}$ записывается как

$$v_m(x, y) = \int_0^\infty g(x_{m+1} - x_m, y')g(x - x_{m+1}, y - y')dy', \quad (17)$$

поле в области $x_{m+2} < x < x_{m+3}$ записывается как

$$v_m(x, y) = \int_0^\infty \int_0^\infty g(x_{m+1} - x_m, y')g(x_{m+2} - x_{m+1}, y'' - y')g(x - x_{m+2}, y - y'')dy'dy'' \quad (18)$$

и т.д. На каждом шаге получают явные формулы, однако пользоваться ими не очень удобно, поскольку они содержат вложенные интегралы.

Очевидно,

$$v_m(x, y) = 0 \quad \text{при } x < x_m.$$

Вследствие периодичности, все функции v_m могут быть получены из v_0 и v_1 с помощью сдвигов вдоль оси x :

$$v_{m+2}(x, y) = v_m(x - (a + b), y).$$

Сделаем важное замечание. Процедура размещения точечного источника вблизи точки ветвления в случае параболического уравнения качественно отличается от случая уравнения Гельмгольца. Неверно утверждать, что функция v_m является асимптотическим представлением решения уравнения Гельмгольца для источника единичной силы, размещенного вблизи точки ветвления. В классических работах Леонтовича и Фока, посвященных параболическому уравнению, отмечается, что параболическое приближение перестает действовать вблизи источника, поэтому математически корректной процедурой внесения источника в параболическое уравнение является сращивание дальней асимптотики функции Грина уравнения Гельмгольца с функцией g . Этого в данной работе не делается. Логика автора здесь иная. Функция v_m выступает только как некоторая вспомогательная функция в параболическом приближении, помогающая решить исходную задачу.

Диаграммами направленности $V_m(\theta)$ краевых функций Грина $v_m(x, y)$ будем называть коэффициенты в асимптотических представлениях

$$v_m(x, y) = g(x - x_m, y)V_m\left(\frac{y}{x - x_m}\right) + o(x^{-1/2}), \quad (19)$$

где в предельной процедуре y и $x - x_m$ предполагаются большими положительными, а их отношение – постоянным. По аналогии с уравнением Гельмгольца главный член поля v_m представляется функцией Грина g , умноженной на зависящую только от угла диаграмму направленности. Очевидно, диаграммы $V_m(\theta)$ определены только при $\theta > 0$. Более того, асимптотики (19) могут быть равномерными только при θ большем некоторой ненулевой положительной величины.

В более широком смысле будем называть диаграммой направленности некоторого поля $w(x, y)$, вычисленной относительно точки X ,

коэффициент $W^X(\theta)$ в представлении

$$w(x, y) = g(x - X, y)W^X\left(\frac{y}{x - X}\right) + o(x^{-1/2}),$$

если такое представление справедливо для поля. Очевидно, переход между различными значениями “центральной точки” X осуществляется по формуле

$$W^{X'}(\theta) = \exp\{ik(X - X')\theta^2/2\}W^X(\theta). \quad (20)$$

В силу периодичности,

$$V_{m+2}(\theta) = V_m(\theta). \quad (21)$$

§5. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПОЛЕЙ И ИХ ДИАГРАММ НАПРАВЛЕННОСТИ В ПАРАБОЛИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Как известно, диаграммы направленности для уравнения Гельмгольца выражаются через преобразования Фурье поля на рассеивателях или на промежуточных поверхностях. Ключом к построению соответствующих представлений является формула Грина. Нам понадобятся аналогичные представления для параболического уравнения. Первым шагом станет вывод формулы Грина для рассматриваемого случая.

Теорема 1. Пусть функции $v(x, y)$ и $w(x, y)$ удовлетворяют в некоторой области Ω неоднородным уравнениям

$$\left(\partial_x + \frac{1}{2ik}\partial_y^2\right)v = f(x, y), \quad \left(-\partial_x + \frac{1}{2ik}\partial_y^2\right)w = h(x, y). \quad (22)$$

Тогда выполняется равенство

$$\int_{\partial\Omega} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{n})w - (\mathbf{w} \cdot \mathbf{n})v] dl = 2ik \int_{\Omega} [fw - hv] ds. \quad (23)$$

где \mathbf{n} — внешняя единичная нормаль к границе $\partial\Omega$, а векторные потоки \mathbf{v} , \mathbf{w} задаются как

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} ikv \\ \partial_y v \end{pmatrix}, \quad \mathbf{w} = \begin{pmatrix} -ikw \\ \partial_y w \end{pmatrix}, \quad (24)$$

В справедливости теоремы можно убедиться непосредственно, применяя теорему Гаусса–Остроградского.

Сформулируем ряд утверждений, касающихся диаграмм направленности волновых полей и коэффициентов генерации дифракционных порядков R_n .

Утверждение 1. Коэффициенты R_n в представлении (12) выражаются по формуле

$$R_n = \frac{\exp\{-ik\theta_n y_*\}}{a+b} \int_0^{a+b} u_{sc}(x, y_*) \exp\left\{i\frac{k\theta_n^2}{2}x\right\} dx \quad (25)$$

для любого $y_* > 0$.

Доказательство данного утверждения элементарно. Для этого строится разложение (периодической) функции

$$u_{sc}(x, y_*) \exp\left\{i\frac{k\theta_n^2}{2}x\right\}$$

в ряд Фурье на своем периоде.

Утверждение 2. Для больших положительных X, Y

$$v_m(X, Y) = \sqrt{\frac{k}{2\pi X}} \exp\left\{i\frac{kY^2}{2X} - i\frac{\pi}{4}\right\} \times \frac{Y}{X} \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y_*) \exp\left\{ik\left(\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x - \frac{Y}{X}y_*\right)\right\} dx + o(X^{-1/2}) \quad (26)$$

для произвольного фиксированного $y_* > 0$.

Для доказательства этого утверждения воспользуемся формулой (23), подставив в качестве v функцию v_m , а в качестве w функцию

$$w(x, y) = g(X - x, y - Y).$$

Область Ω есть множество точек $y > y_*$.

При больших X, Y и небольших x, y_* можно построить приближение

$$w(x, y_*) \approx \sqrt{\frac{k}{2\pi X}} \exp\left\{i\frac{kY^2}{2X} - i\frac{\pi}{4}\right\} \exp\left\{ik\left(\frac{1}{2}\frac{Y^2}{X^2}x - \frac{Y}{X}y_*\right)\right\}.$$

Возможность считать x и y_* небольшими (по сравнению с X и Y) связана с тем, что рассматриваются краевые функции Грина, поле в

которых убывает с ростом x и равно нулю при больших отрицательных x .

Для успешного использования (23) необходимо преобразовать комбинацию

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y v_m(x, y_*) \exp \left\{ ik \frac{1}{2} \frac{Y^2}{X^2} x \right\} dx.$$

Для этого воспользуемся условием излучения, т.е. заметим, что в верхней полуплоскости поле представляется линейной комбинацией только уходящих или убывающих волн. Преобразование Фурье выделяет в v_m единственную плоскую волну, и появляется возможность вычислить ее вертикальную производную:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \partial_y v_m(x, y_*) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \frac{Y^2}{X^2} x \right\} dx = ik \frac{Y}{X} \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y_*) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \frac{Y^2}{X^2} x \right\} dx.$$

Подстановка полученных представлений в (23) дает (26).

Утверждение 3. *Диаграммы направленности $V_m(\theta)$ вычисляются по формуле*

$$V_m(\theta) = \exp \left\{ -i \frac{k\theta^2}{2} x_m \right\} \theta \int_{-\infty}^{\infty} v_m(x, y_*) \exp \left\{ ik \left(\frac{\theta^2}{2} x - \theta y_* \right) \right\} dx. \quad (27)$$

для произвольного $y_* > 0$.

Выражение (27) следует из (26) если учесть, что

$$g(X, Y) \approx \exp \left\{ -\frac{ik}{2} \frac{Y^2}{X^2} x_m \right\} g(X - x_m, Y)$$

и

$$\theta = \frac{Y}{X - x_m} \approx \frac{Y}{X}.$$

Утверждение 4. *Для величин $V_m(\theta)$ верны представления*

$$V_m(\theta) = 1 - \sum_{n=m+1}^{\infty} \exp \left\{ ik \frac{\theta^2}{2} (x_n - x_m) \right\} \int_{-\infty}^0 v_m(x_n - 0, y) e^{-ik\theta y} dy. \quad (28)$$

Доказательство этого утверждения можно получить, применяя (23) к функциям v_m и

$$w = \exp \{ ik (\theta^2 x / 2 - \theta y) \}$$

с $\theta > 0$ в области, показанной на рис. 3. Нижние горизонтальные участки соответствуют $y = -L$ при достаточно большом L . Условия излучения гарантируют, что интеграл по этим участкам обращается в ноль в пределе $L \rightarrow \infty$.

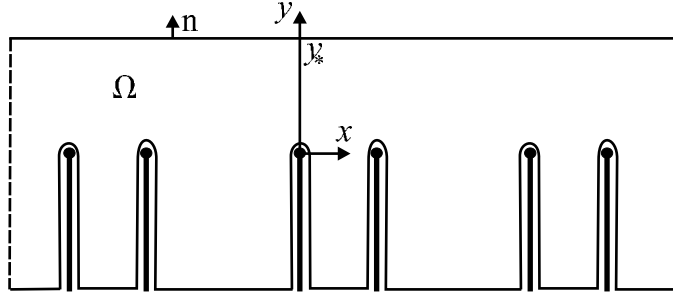


Рис. 3. Область Ω для вывода формулы (28).

Обозначим символом c_m значения полного поля $u(x, y)$ (для задачи о падающей плоской волне) на краях экранов, домноженные на коэффициент, подобранный для удобства:

$$c_m \equiv u(x_m - 0, 0) \exp \{ ik x_m \theta_{\text{in}}^2 / 2 \}. \quad (29)$$

Очевидно, в силу условия Флоке,

$$c_{n+2} = c_n,$$

и для определения всех c_m достаточно знать только c_0 и c_1 .

Утверждение 5. Для величин $c_{0,1}$ верно представление

$$c_{1-m} = V_m(\theta_{\text{in}}). \quad (30)$$

Введем функцию $v(x, y; x', y')$ как функцию Грина следующей задачи. Функция задана на плоскости с разрезами $x = x_m$, $y < 0$ и удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\left(\partial_x + \frac{1}{2ik} \partial_y^2 \right) v = \delta(x - x') \delta(y - y').$$

На правых берегах разрезов функция удовлетворяет граничным условиям (7). Кроме того, функция удовлетворяет условиям излучения и условиям в конечных точках разрезов.

Очевидно, краевые функции Грина представляют собой частный случай v :

$$v_m(x, y) = v(x, y; x_m + 0, 0).$$

Диаграммы направленности V_m могут быть определены как

$$V_m(\theta) = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{v_m(x' + x_m, x'\theta)}{g(x', x'\theta)}. \quad (31)$$

Также очевидно, что полное поле для падающей плоской волны может (по крайней мере в какой-то области, содержащей начало координат) быть представлено как предельный случай функции Грина с удаленным источником:

$$u(x, y) = \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{v(x, y; -x', x'\theta_{\text{in}})}{g(x', -x'\theta_{\text{in}})} \quad (32)$$

и, следовательно,

$$c_m = \exp\{ikx_m\theta_{\text{in}}^2/2\} \lim_{x' \rightarrow \infty} \frac{v(x_m, y; -x', x'\theta)}{g(x', -x'\theta)}. \quad (33)$$

Заметим, что функция

$$w(x, y) = v(a - x, y; a - x'', y'')$$

(рассматриваемая как функция переменных x, y) удовлетворяет второму уравнению (22) с правой частью

$$h(x, y) = \delta(x - x'', y - y'')$$

и с граничными условиями $w = 0$ заданными на левых берегах разрезов $x = x_m, y < 0$. Применим теорему (23) к функциям $v(x, y; x', y')$ и $v(a - x, y; a - x'', y'')$. В качестве области Ω возьмем всю плоскость с разрезами. Интеграл по берегам разрезов обращается в нуль в силу граничных условий. Интегралы по удаленным горизонтальным участкам обращаются в нуль в силу условий излучения. Таким образом, получаем равенство

$$v(x'', y''; x', y') = v(a - x', y'; a - x'', y'')$$

и, следовательно,

$$v(x_{1-m}, 0; -x', y') = v_m(x' + a, y').$$

Подставим последнее равенство в (31) и (33) и рассмотрим предел $x' \rightarrow \infty$, $y' = \theta_{\text{in}} x'$. В результате получим равенство (30).

§6. ФОРМУЛА РАСЩЕПЛЕНИЯ

Докажем еще одно утверждение.

Утверждение 6. Пусть $u(x, y)$ – функция, удовлетворяющая однородному параболическому уравнению (4) везде вне разрезов, граничным условиям (7) на правых берегах разрезов, и ограниченная у концевых точек разрезов. Тогда функция $w(x, y) = \partial_y u$ удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\left(\partial_x + \frac{1}{2ik}\partial_y^2\right)w = \sum_{m=-\infty}^{\infty} u(x_m - 0, 0)\delta(x - x_m - 0)\delta(y) \quad (34)$$

и граничным условиям (7).

Очевидно, что везде, кроме окрестности разрезов, поле удовлетворяет параболическому уравнению. Это следует из того, что оператор ∂_y коммутирует с оператором уравнения. Граничные условия также проверяются непосредственно. Утверждение устанавливает, что оператор ∂_y приводит к появлению монопольных источников в концевых точках разрезов. Проверим это непосредственно.

Рассмотрим узкую полосу $x_m < x < x_m + \epsilon$, $-\infty < y < \infty$. В соответствии с (5), поле в данной полосе может быть записано в виде:

$$u(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} u(x_m, y')g(x - x_m, y - y')dy'. \quad (35)$$

Интегрирование проводится по положительной полуоси, поскольку на отрицательной полуоси поле $u(x_m + 0, y')$ равно нулю в силу граничного условия (7). Интеграл сходится вблизи $y = 0$ в силу условия в концевой точке. Применим оператор ∂_y и выполним интегрирование по частям:

$$w(x, y) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\epsilon}^{\infty} w(x_m, y')g(x - x_m, y - y')dy' + \lim_{\epsilon \rightarrow 0} u(x_m, \epsilon)g(x - x_m, y - \epsilon).$$

В силу формулы (5), в первом члене $w(x_m, \epsilon)$ стремится к конечному пределу при $\epsilon \rightarrow 0$ (этот предел равен $w(x_m - 0, 0)$). Во втором члене также $u(x_m, +0) = u(x_m - 0, 0)$. Таким образом,

$$w(x, y) = \int_0^{\infty} w(x_m - 0, y')g(x - x_m, y - y')dy' + u(x_m - 0, 0)g(x - x_m, y).$$

Первый член в правой части соответствует полю без источников, а второй – полю точечного монополюсного источника с амплитудой $u(x_m - 0, 0)$, расположенного в точке $(x_m + 0, 0)$. Аналогичная процедура может быть проделана с каждой из вершин.

Формула расщепления связывает коэффициенты генерации дифракционных порядков R_n , которые надо найти, с диаграммами направленности краевых функций Грина, определенных в предыдущем разделе. Эта формула дается следующей теоремой.

Теорема 2.

$$R_m = \frac{1}{ik(a+b)\theta_m(\theta_m + \theta_{in})} \sum_{n=0}^1 \exp\left\{\frac{2\pi imx_n}{a+b}\right\} V_{1-n}(\theta_{in})V_n(\theta_m). \quad (36)$$

Доказательство. Применим к полному полю $u(x, y)$ (т.е. к решению задачи о падающей плоской волне) оператор

$$H[u](x, y) = (\partial_y + ik\theta_{in})u.$$

Этот оператор обращает в нуль падающую волну, сохраняет параболическое уравнение во внутренних точках области и сохраняет граничные условия. Очевидно, поле $H[u]$ удовлетворяет условиям излучения. При этом в соответствии с утверждением 6 поле w имеет источники, расположенные в вершинах рассеивателя $(x_m, 0)$. Амплитуды этих источников равны $u(x_m - 0, 0)$. В силу единственности решения дифракционной задачи,

$$\begin{aligned} H[u](x, y) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} u(x_n - 0, 0)v_n(x, y) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \exp\{-ikx_n\theta_{in}^2/2\}c_nv_n(x, y). \end{aligned} \quad (37)$$

Домножим формулу (37) на

$$\exp\{ikx\theta_m^2/2 - ik\theta_m y\}.$$

Зафиксируем некоторое положительное значение $y = y_*$ и выполним в формуле (37) интегрирование по отрезку $0 < x < (a + b)$. При этом учтем, что оператор \mathcal{H} в левой части обращает в нуль падающую волну, а для каждой из Фурье-компонент рассеянной волны есть возможность явно вычислить производную по y . Для преобразования правой части используем (25).

$$ik(\theta_m + \theta_{\text{in}})(a + b)R_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\{-ikx_n\theta_{\text{in}}^2/2\} \int_0^{a+b} v_n(x, y_*) \exp\{ikx\theta_m^2/2 - ik\theta_m y_*\} dx. \quad (38)$$

В силу периодичности

$$v_n(x, y_*)c_n \exp\{ik(x\theta_m^2 - x_n\theta_{\text{in}}^2)/2\} = v_{n'}(x', y_*)c_{n'} \exp\{ik(x'\theta_m^2 - x_n'\theta_{\text{in}}^2)/2\},$$

$$x' = x + (a + b)l, \quad n' = n + 2l, \quad l \in \mathbb{Z}.$$

Последняя формула позволяет заменить суммирование и интегрирование по отрезку интегрированием по прямой:

$$ik(\theta_m + \theta_{\text{in}})(a + b)R_m = \sum_{n=0}^1 c_n \exp\{-ikx_n\theta_{\text{in}}^2/2\} \int_{-\infty}^{\infty} v_n(x, y_*) \exp\{ikx\theta_m^2/2 - ik\theta_m y_*\} dx. \quad (39)$$

Применяя формулы (27) и (30), получаем

$$ik(\theta_m + \theta_{\text{in}})(a + b)R_m = \sum_{n=0}^1 \exp\left\{ikx_n \frac{\theta_m^2 - \theta_{\text{in}}^2}{2}\right\} \frac{V_{1-n}(\theta_{\text{in}})V_n(\theta_m)}{\theta_m}. \quad (40)$$

Наконец, применяя (13), получаем (36). \square

Таким образом, коэффициенты отражения оказываются выраженными через диаграммы направленности краевых функций Грина. Наши дальнейшие усилия будут направлены на вычисление этих диаграмм направленности.

§7. СПЕКТРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Диаграммы направленности $V_m(\theta)$ вычисляются с помощью обыкновенного дифференциального уравнения, называемого ниже спектральным. Для вывода спектрального уравнения применим оператор

$$K_n = (x - x_n)\partial_y - ik y$$

к краевой функции Грина $v_n(x, y)$. Заметим, что оператор K_n коммутирует с параболическим оператором $2ik\partial_x + \partial_y^2$, поэтому $K_n[v_n]$ удовлетворяет параболическому уравнению во внутренних точках плоскости с разрезами. Оператор K_n аналогичен оператору дифференцирования по углу поворота вокруг точки $(x_n, 0)$. Далее, $K_n[v_n]$ удовлетворяет граничным условиям (7) и условиям излучения. Наконец,

$$K_n[g(x - x_n, y)] \equiv 0.$$

В то же время, $v_n(x, y) = g(x - x_n, y)$ при $x_n < x < x_{n+1}$. Поэтому оператор K_n уничтожает источник поля v_n . Аналогично утверждению 6 можно показать, что функция

$$w(x, y) = K_n[v_n](x, y)$$

удовлетворяет неоднородному параболическому уравнению

$$\left(\partial_x + \frac{1}{2ik}\partial_y^2\right)w = \sum_{m=n+1}^{\infty} (x_m - x_n)v_n(x_m - 0, 0)\delta(x - x_m - 0)\delta(y).$$

В силу единственности решения дифракционной задачи,

$$K_n[v_n](x, y) = \sum_{m=n+1}^{\infty} (x_m - x_n)v_n(x_m - 0, 0)v_m(x, y). \quad (41)$$

Перейдем в (41) от полей к их диаграммам направленности. Легко проверить, что оператор K_n действует на диаграмму направленности, вычисленную относительно точки x_n , как дифференцирование по θ . Принимая во внимание формулу (20), получаем

$$\partial_\theta V_n(\theta) = \sum_{m=n+1}^{\infty} (x_m - x_n)v_n(x_m - 0, 0)\exp\{ik(x_m - x_n)\theta^2/2\}V_m(\theta). \quad (42)$$

Заметим, что $V_m(\theta) = V_{m+2}(\theta)$. Введем матрицу коэффициентов

$$C(\theta) = \begin{pmatrix} C_{0,0} & C_{0,1} \\ C_{1,0} & C_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (43)$$

где

$$C_{0,0}(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (x_{2l} - x_0) v_0(x_{2l} - 0, 0) \exp\{ik(x_{2l} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (44)$$

$$C_{1,0}(\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} (x_{2l+1} - x_0) v_0(x_{2l+1} - 0, 0) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_0)\theta^2/2\}, \quad (45)$$

$$C_{0,1}(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (x_{2l} - x_1) v_1(x_{2l} - 0, 0) \exp\{ik(x_{2l} - x_1)\theta^2/2\}, \quad (46)$$

$$C_{1,1}(\theta) = \sum_{l=1}^{\infty} (x_{2l+1} - x_1) v_1(x_{2l+1} - 0, 0) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_1)\theta^2/2\}. \quad (47)$$

С использованием введенных обозначений получаем, что верна следующая теорема.

Теорема 3. *Диаграммы направленности $V_0(\theta)$, $V_1(\theta)$ удовлетворяют следующему обыкновенному дифференциальному уравнению:*

$$\frac{d}{d\theta} (V_0, V_1) = (V_0, V_1) \cdot C(\theta), \quad (48)$$

где матрица коэффициентов C определяется формулами (43)–(47).

Данное уравнение будем называть *спектральным уравнением*. В его коэффициенты входят неизвестные величины $v_0(x_m - 0, 0)$, $v_1(x_m - 0, 0)$ (краевые значения краевых функций Грина). Определению коэффициентов и граничных условий спектрального уравнения посвящены следующие два раздела.

§8. БОЛЕЕ ОБЩИЙ ВИД СПЕКТРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Введем обозначение

$$\tilde{V}_{m,n}(\theta) = -\exp\{ik(x_m - x_n)\theta^2/2\} \int_{-\infty}^0 v_n(x_m - 0, y) \exp\{-ik\theta y\} dy, \quad m > n. \quad (49)$$

Доопределим

$$\tilde{V}_{n,n}(\theta) = 1, \quad \tilde{V}_{m,n}(\theta) = 0, \quad m < n. \quad (50)$$

Вернемся к соотношению (41). Домножим правую и левую части на

$$-\exp\{ik(x_m - x_n)\theta^2/2 - ik\theta y\}$$

и проинтегрируем по линии $x = x_m - 0$, $-\infty < y < 0$. В результате получим

$$\partial_\theta \tilde{V}_{m,n}(\theta) = \sum_{l=n+1}^m (x_l - x_n)v_n(x_l - 0, 0) \exp\{ik(x_l - x_n)\theta^2/2\} \tilde{V}_{m,l}(\theta). \quad (51)$$

Введем величины

$$a_{l,n}(\theta) = (x_l - x_n)v_n(x_l - 0, 0) \exp\{ik(x_l - x_n)\theta^2/2\}.$$

Уравнение (51) может быть переписано в виде

$$\partial_\theta \tilde{V}_{m,n}(\theta) = \sum_{l=n+1}^m \tilde{V}_{m,l}(\theta) a_{l,n}(\theta). \quad (52)$$

Уравнения (52) представляют собой систему уравнений для всех целых m и n . Заметим, что “неизвестные функции” $\tilde{V}_{m,n}$ и “коэффициенты” $a_{m,n}$ удовлетворяют условиям периодичности

$$\tilde{V}_{m,n}(\theta) = \tilde{V}_{m+2,n+2}(\theta), \quad a_{m,n}(\theta) = a_{m+2,n+2}(\theta).$$

Кроме того, правая часть (52) имеет сверточный характер. Эти два обстоятельства позволяют применить к системе (52) преобразование Фурье. А именно, домножим (52) на $\exp\{ikp(x_m - x_n)\}$ для произвольного p с $\text{Im}[p] \geq 0$, зафиксируем $n = 0$ или 1 и просуммируем по всем m . В правой части воспользуемся тем, что

$$\exp\{ikp(x_m - x_n)\} = \exp\{ikp(x_m - x_l)\} \exp\{ikp(x_l - x_n)\}.$$

В результате получим

$$\partial_\theta \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a}_{0,0} & \bar{a}_{0,1} \\ \bar{a}_{1,0} & \bar{a}_{1,1} \end{pmatrix}, \quad (53)$$

где введены величины

$$\bar{V}_{0,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l,0}(\theta) \exp\{ik(x_{2l} - x_0)p\}, \quad (54)$$

$$\bar{V}_{1,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l+1,0}(\theta) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_0)p\}, \quad (55)$$

$$\bar{V}_{0,1}(\theta, p) = \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{V}_{2l,1}(\theta) \exp\{ik(x_{2l} - x_1)p\}, \quad (56)$$

$$\bar{V}_{1,1}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} \tilde{V}_{2l+1,1}(\theta) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_1)p\}, \quad (57)$$

и

$$\bar{a}_{0,0}(\theta, p) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l,0}(\theta) \exp\{ik(x_{2l} - x_0)p\}, \quad (58)$$

$$\bar{a}_{1,0}(\theta, p) = \sum_{l=0}^{\infty} a_{2l+1,0}(\theta) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_0)p\}, \quad (59)$$

$$\bar{a}_{0,1}(\theta, p) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l,1}(\theta) \exp\{ik(x_{2l} - x_1)p\}, \quad (60)$$

$$\bar{a}_{1,1}(\theta, p) = \sum_{l=1}^{\infty} a_{2l+1,1}(\theta) \exp\{ik(x_{2l+1} - x_1)p\}, \quad (61)$$

Заметим, что в силу (28)

$$V_0(\theta) = \bar{V}_{0,0}(\theta, 0) + \bar{V}_{1,0}(\theta, 0), \quad V_1(\theta) = \bar{V}_{0,1}(\theta, 0) + \bar{V}_{1,1}(\theta, 0). \quad (62)$$

Кроме того, сравнивая (58)–(61) с (44)–(47), получаем

$$\begin{pmatrix} \bar{a}_{0,0} & \bar{a}_{0,1} \\ \bar{a}_{1,0} & \bar{a}_{1,1} \end{pmatrix}(\theta, p) = C(\sqrt{\theta^2 + 2p}) \quad (63)$$

Таким образом, получаем, что для величин $\tilde{V}_{\alpha,\beta}(\theta, p)$ выполняется обыкновенное дифференциальное уравнение вида

$$\partial_{\theta} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} \cdot C(\sqrt{\theta^2 + 2p}). \quad (64)$$

Данное уравнение выполняет вспомогательную функцию. На его основе строится ОЕ-уравнение, с помощью которого можно найти $C(\theta)$. При $p = 0$ из (64) следует спектральное уравнение (48).

§9. ОЕ-УРАВНЕНИЕ

Пусть для матриц 2×2 решается уравнение

$$\partial_\theta X(\theta) = X(\theta) \cdot A(\theta), \quad (65)$$

где X – неизвестная функция, A – коэффициент. Пусть уравнение решается вдоль контура γ в комплексной плоскости θ . Обозначим начало и конец этого контура как t_1 и t_2 соответственно. Пусть в начале контура задано начальное условие

$$X(t_1) = I,$$

где I – единичная матрица. Введем обозначение

$$\text{ОЕ}_\gamma[A(\theta)] \equiv X(t_2). \quad (66)$$

Обозначение ОЕ связано с понятием *упорядоченной экспоненты* (ordered exponential).

Теорема 4. *Функция $C(\theta)$ удовлетворяет следующему уравнению:*

$$\text{ОЕ}_\gamma[C(\sqrt{\theta^2 + 2p})] = T(p), \quad \text{Im}[p] > 0, \quad (67)$$

где

$$T(p) = \begin{pmatrix} 1 & -\exp\{ikbp\} \\ -\exp\{ikar\} & 1 \end{pmatrix} \quad (68)$$

а контур γ представляет собой действительную ось, проходящую в отрицательном направлении. В левой части (67) θ рассматривается как независимая переменная уравнения, а p как параметр.

Уравнение (67) будем называть ОЕ-уравнением.

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} (\theta, p) = I, \quad (69)$$

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} \bar{V}_{0,0} & \bar{V}_{0,1} \\ \bar{V}_{1,0} & \bar{V}_{1,1} \end{pmatrix} (\theta, p) = T(p). \quad (70)$$

Заметим, что $\tilde{V}_{n,n} = 1$. Непосредственными вычислениями (опираясь на (16)) можно показать, что

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \tilde{V}_{n+1,n}(\theta) = -1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} \tilde{V}_{n+1,n}(\theta) = 0,$$

Члены $\tilde{V}_{n,n}$ и $\tilde{V}_{n+1,n}$ дают пределы (69) и (70) при условии, что все остальные члены (т.е. $\tilde{V}_{m,n}(\theta)$, $m > n + 1$) стремятся к нулю при $|\theta| \rightarrow 0$. Покажем последнее.

Более точно, покажем, что L^2 -норма членов $\tilde{V}_{m,n}(\theta)$, $m > n + 1$ конечна и растет с ростом m не более чем степенным образом. Для достаточно гладких функций $\tilde{V}_{m,n}(\theta)$ и для $\text{Im}[p] > 0$ из этого будет следовать требуемое утверждение.

Рассмотрим в качестве примера члены $\tilde{V}_{m,0}(\theta)$, $m = 2, 3, \dots$. В силу теоремы Парсеваля, вместо нормы функций $\tilde{V}_{m,0}(\theta)$ можно рассматривать L^2 -норму функций $v_0(x_m - 0, y)$, $y < 0$. Рассмотрим операторы распространения

$$\begin{aligned} \Pi_a[w](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(y')g(a, y - y')dy', \\ \Pi_b[w](y) &= \int_{-\infty}^{\infty} w(y')g(b, y - y')dy', \end{aligned} \quad (71)$$

а также проекторы

$$\begin{aligned} P_+[w](y) &= w(y)h(y), \quad P_-[w](y) = w(y)h(-y), \\ h(y) &= \begin{cases} 1, & y \geq 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \end{aligned} \quad (72)$$

Ключевое утверждение доказательства заключается в том, что операторы Π_a, Π_b сохраняют норму L^2 . В этом нетрудно убедиться, рассмотрев эти операторы в Фурье-представлении. Операторы P_+ и P_- , очевидно, не увеличивают норму.

В операторной записи

$$\begin{aligned} v_0(x_1 - 0, y) &= \Pi_a \circ \delta(y), \\ v_0(x_2 - 0, y) &= \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a \circ \delta(y), \\ v_0(x_3 - 0, y) &= \Pi_a \circ P_+ \circ \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a \circ \delta(y), \\ v_0(x_{2l+1} - 0, y) &= \Pi_a \circ (P_+ \circ \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a)^l \circ \delta(y), \end{aligned}$$

$$v_0(x_{2l+2} - 0, y) = \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a \circ (P_+ \circ \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a)^l \circ \delta(y).$$

Для $l \geq 0$ введем функции

$$\begin{aligned} s_{2l+1}(y) &\equiv (P_+ \circ \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a)^l \circ \delta(y), \\ s_{2l+2}(y) &\equiv P_+ \circ \Pi_a \circ (P_+ \circ \Pi_b \circ P_+ \circ \Pi_a)^l \circ \delta(y). \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\begin{aligned} h(-y) v_0(x_{2l+1} - 0, y) &= P_- \circ \Pi_a \circ s_{2l+1}(y), \\ h(-y) v_0(x_{2l+2} - 0, y) &= P_- \circ \Pi_b \circ s_{2l+2}(y). \end{aligned}$$

Покажем, что при $m \geq 2$

$$s_m(y) = P_+ \circ g(x_{m-1}, y) + s'_m(y), \quad (73)$$

где s'_m — функция с конечной L^2 -нормой. Доказательство проведем по индукции. База (при $m = 2$) очевидна. Далее,

$$s_{m+1}(y) = P_+ \circ \Pi \circ s_m(y) - P_+ \circ \Pi \circ P_- \circ g(x_{m-1}, y),$$

где Π есть Π_a или Π_b . Первый член в правой части имеет конечную норму в силу свойств операторов Π и P_+ . Второй член можно вычислить явно и убедиться в конечности нормы. Отсюда же можно взять оценки скорости роста нормы s'_m . Далее,

$$h(-y) v_0(x_m - 0, y) = P_- \circ \Pi \circ s_m(y) + P_- \circ \Pi \circ P_+ \circ g(x_{m-1}, y).$$

Первый член в правой части имеет норму, не превышающую $\|s_m(y)\|_2$, а второй член можно вычислить и непосредственно убедиться в конечности его нормы. \square

На физическом языке отличие членов $\tilde{V}_{m,m}$ и $\tilde{V}_{m+1,m}$ от остальных заключается в том, что все остальные члены представляют собой поля, испытавшие как минимум один акт дифракции, а члены $\tilde{V}_{m,m}$ и $\tilde{V}_{m+1,m}$ содержат лучи, идущие напрямую от источника к точке наблюдения.

Сделаем важное замечание. Продолжим граничное условие (69) по непрерывности в точку $p = 0$. В соответствии с (62) это дает

$$V_0(+\infty) = 1, \quad V_1(+\infty) = 1, \quad (74)$$

что можно рассматривать как начальное условие для спектрального уравнения (48).

§10. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В работе предлагается новый подход к решению задачи дифракции на периодической системе точек ветвления рассматриваемого вида. Для того чтобы воспользоваться этим подходом, выполняются следующие шаги.

1. Каким-либо образом решается ОЕ-уравнение (67) с правой частью (68) относительно матричной функции S . Одна из возможностей заключается в численном решении этого уравнения.

2. Найденный коэффициент $S(\theta)$ подставляется в спектральное уравнение (48). Данное уравнение решается с граничным условием (74). Находятся функции $V_0(\theta)$, $V_1(\theta)$.

3. Функции $V_0(\theta)$, $V_1(\theta)$ подставляются в формулу расщепления (36), в результате чего находятся коэффициенты генерации дифракционных порядков R_n .

Дальнейшие исследования по данной теме могут включать разработки численных методов решения ОЕ-уравнения, исследование асимптотических свойств решений ОЕ-уравнения, а также аналитических свойств ОЕ-уравнения.

Автор благодарит участников Семинара по дифракции и распространению волн в ПОМИ РАН за живое обсуждение работы и ценные замечания, учтенные при подготовке данной статьи.

ПРИЛОЖЕНИЕ. ПРОСТЕЙШАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НА РАЗВЕТВЛЕННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть поверхность имеет структуру, показанную на рис. 4. Поверхность состоит из двух листов, разрезанных по полупрямым $y < 0$, $x = 0$. Берега разрезов склеены, как показано на рисунке. Один из листов будем называть основным, другой – дополнительным. На поверхности везде, кроме точки ветвления $(0, 0)$ выполняется параболическое уравнение (4). По основному листу из бесконечности (слева) падает плоская волна вида (9). На дополнительном листе падающей волны нет, из чего следует, что поле на дополнительном листе тождественно равно нулю при $x < 0$. Таким образом, поле на основном и дополнительном листах (u_m и u_a , соответственно) при $x < 0$ имеет вид

$$u_m = u_{in}, \quad u_a = 0. \quad (75)$$

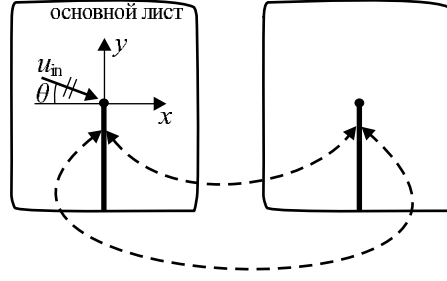


Рис. 4. Двухлистная поверхность для модельной задачи

Вычислим поле справа от точки ветвления, т.е. при $x > 0$. На основном листе на прямой $x = +0$ поле имеет вид

$$u_m(+0, y) = \begin{cases} u_{in}(0, y), & y > 0, \\ 0, & y < 0. \end{cases} \quad (76)$$

Эта формула учитывает, что при $y > 0$ поле является продолжением поля на основном листе, а при $y < 0$ – на дополнительном. Поле на дополнительном листе на прямой $x = +0$ имеет вид

$$u_a(+0, y) = \begin{cases} 0, & y > 0, \\ u_{in}(0, y), & y < 0. \end{cases} \quad (77)$$

Теперь можно воспользоваться формулой (5) для вычисления полей при $x > 0$:

$$u_m(x, y) = \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -ik \left(\frac{\theta_{in}^2}{2} x + \theta_{in} y \right) \right\} F \left(- (y + \theta_{in} x) \sqrt{\frac{k}{2x}} \right), \quad (78)$$

$$u_a(x, y) = \exp \left\{ -ik \left(\frac{\theta_{in}^2}{2} x + \theta_{in} y \right) \right\} \left[1 - \frac{e^{-i\pi/4}}{\sqrt{\pi}} F \left(- (y + \theta_{in} x) \sqrt{\frac{k}{2x}} \right) \right], \quad (79)$$

где

$$F(\xi) = \int_{\xi}^{\infty} e^{i\tau^2} d\tau.$$

Полученные выражения представляют собой стандартные представления волнового поля на разветвленной поверхности для малых углов рассеяния.

Данная задача решалась на двулистной поверхности, однако поле на основном листе может быть найдено без вычисления поля на вспомогательном листе. Для этого достаточно рассмотреть поле на основном листе с разрезом вдоль полупрямой $y < 0$, $x = 0$, задав на правом берегу разреза условие (7).

ЛИТЕРАТУРА

1. E. D. Shabalina, N. V. Shirgina, A. V. Shanin, *High frequency modes in a two dimensional rectangular room with windows*. — Acoust. Phys. **56** (2010), 525–536.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. Наука, М., 1972.
3. Л. А. Вайнштейн, *Теория дифракции и метод факторизации*. Сов.радио, М., 1966.
4. Б. Нобл, *Применение метода Винера–Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных*. Наука, М., 1962.
5. A. V. Shanin, *Weinstein's diffraction problem: embedding formula and spectral equation in parabolic approximation*. — SIAM J. Appl. Math. **70** (2009), 1201–1218.
6. В. В. Залипаев, М. М. Попов, *Коротковолновое скользящее рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. I. Дифракция полутеневого поля на гладком выпуклом контуре*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 59–90.
7. В. В. Залипаев, М. М. Попов, *Коротковолновое скользящее рассеяние плоской волны на гладкой периодической границе. II. Дифракция на бесконечной периодической границе*. — Зап. научн. семин. ЛОМИ **173** (1988), С. 60–86.
8. V. V. Zalipaev *Shortwave scattering by a diffraction echelette-grating*. — J. Math. Sci. **102** (2000), 4203–4219.
9. A. A. Anis, E. H. Lloyd, *On the range of partial sums of a finite number of independent normal variates*. — Biometrika **40** (1953), 35–42.
10. J. Boersma, *On certain multiple integrals occuring in a waveguide scattering problem*. — SIAM J. Math. Anal. **9** (1978), 377–393.

Shanin A. V. Diffraction of a high-frequency wave by a grating with a complicated period in the case of grazing incidence.

A 2D problem of diffraction of a plane wave on a branched surface is studied. The configuration of branch points of the surface is periodic; these branch points play the role of a diffraction grating. The period of the grating is composed of two branch points. The incident wave travels at a grazing incidence angle. The consideration is held in the parabolic approximation; the axis of the parabolic coordinates is the edge of the grating. Edge Green's functions of the problem, i.e. the fields generated by point sources placed near the branch points, are introduced. The embedding formula is proven. It expresses the coefficients of generation of

diffraction orders in terms of the directivities of the edge Green's functions. A spectral equation is derived for the directivities of the edge Green's functions. This is an ordinary differential equation, the coefficient of which is unknown. Finally, for finding of this coefficient, an OE-equation is derived.

МГУ им. М. В. Ломоносова,
Ленинские горы, МГУ,
119992 Москва, Россия
E-mail: a.v.shanin@gmail.com

Поступило 20 ноября 2012 г.