Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 409, 2012 г.

В. Г. Фарафонов, М. В. Соколовская

ПОСТРОЕНИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ РЕЛЕЯ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНЫХ ОСЕСИММЕТРИЧНЫХ ЧАСТИЦ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРА ЛАПЛАСА

§1. Введение

Рассеяние электромагнитного излучения неоднородными несферическими телами необходимо рассматривать при решении многих прикладных задач в самых разных областях науки и техники [1–7]. Достаточно часто неоднородность частицы можно трактовать как ее многослойность. С учетом этого предположения наиболее простой и интересной моделью неоднородной несферической частицы служит осесимметричная частица, в частности, многослойный сфероид. В настоящий момент для задач рассеяния электромагнитного излучения однородными и многослойными конфокальными сфероидами, в частности сильно вытянутыми или сильно сплюснутыми, следует применять решение Фарафонова и Вощинникова [8–11], использующее сфероидальный базис, который в максимальной степени учитывает геометрию задачи. Многослойные неконфокальные сфероиды, у которых оболочки имеют разные фокусы, рассматриваются в статье [12]. Во многих случаях, например, в нанооптике размеры рассеивателей много меньше длины волны излучения. Здесь следует рассматривать задачу рассеяния в приближении Релея, которое базируется на решении соответствующей электростатической задачи. Подобные задачи проще волновых, в частности, известны решения классических задач для однородного [3, 4] и двухслойного [2] эллипсоидов, а также частного случая – аналогичных сфероидов. Однако, для частиц других форм явных решений не существует [13].

Ключевые слова: рассеяние света, несферические частицы, приближение Релея.

Часть исследований, представленных выше, выполнена при поддержке гранта РФФИ 10-02-00593а.

Недавняя работа [14] была посвящена исследованию электростатической задачи и приближения Релея для однородных осесимметричных частиц, включая чебышевские сфероидальные частицы. Последние получаются в результате возмущения поверхности сфероидов, причем отклонения описываются с помощью полиномов Чебышева. В настоящей статье рассматривается приближение Релея для многослойных осесимметричных частиц. Сначала формулируется постановка задачи в виде интегральных уравнений относительно скалярных потенциалов аналогичных уравнениям, возникающим в рамках метода расширенных граничных условий (EBCM) для волновых задач (п. 2). Затем потенциалы, удовлетворяющие уравнению Лапласа, представляются в виде разложений по собственным функциям в сфероидальной и сферической системах координат (п. 3). Неизвестные коэффициенты разложений определяются из бесконечных систем линейных алгебраических уравнений (п. 4). Для многослойных конфокальных сфероидов эти системы удается решить в явном виде в едином сфероидальном базисе (п. 5). Для однородных и двухслойных сфероидов это решение совпадает с ранее известными. В последнем параграфе по решению электростатической задачи строится приближение Релея. Завершают работу выводы.

§2. Постановка задачи

Электростатическая задача решается с помощью скалярных потенциалов Φ, которые удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\Delta\Phi = 0 \tag{1}$$

и связаны с напряженностью электрического поля $\vec{E}$ следующим образом [2–4]:

$$\vec{E} = \nabla\Phi. \tag{2}$$

Нетрудно увидеть, что в этом случае поля удовлетворяют уравнениям Максвелла.

Рассмотрим неоднородную частицу, имеющую J слоев. Поверхности слоев частицы обозначим как S_j (D_j – область внутри этой поверхности), при этом значение индекса $j = 1$ соответствует внешней границе частицы, а $j = J$ – границе ее ядра. Потенциал поля в j -ом слое (т.е. в области $\bar{D}_j \setminus D_{j+1}$) представим в виде суммы двух слагаемых $\Phi_1^j + \Phi_2^j$, причем первое слагаемое регулярно (т.е. конечно) в начале координат, а второе – иррегулярно, т.е. имеет в начале координат особую точку. На бесконечности первое слагаемое постоянно или неограниченно растет, а второе – убывает, а именно, стремится к нулю. Внешнее поле вне частицы (т.е. в $R^3 \backslash D_1$) постоянно и описывается потенциалом Φ_1^1, а поле во внешности частицы, возникающее из-за ее наличия, описывается потенциалом Φ_2^1. Следует отметить, что иррегулярная часть внутреннего поля в ядре должна отсутствовать, т.е. $\Phi_2^{J+1} = 0$, в силу физических соображений. Таким образом, потенциалы с нижним индексом 1 регулярны (т.е. конечны) в начале координат, а потенциалы с нижним индексом 2 убывают к нулю на бесконечности, при этом они имеют особенность в начале координат. Верхний индекс потенциала указывает на номер слоя, в котором он описывает поле (1 – внешность частицы, 2 – первая оболочка, ..., $(J+1)$ – ядро частицы).

Граничные условия на поверхностях раздела сред заключаются в непрерывности тангенциальных составляющих напряженностей электрических полей и нормальных составляющих векторов электрической индукции $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ и их можно записать, используя скалярные потенциалы, следующим образом [2–4]:

$$\left.\begin{aligned} &\Phi_1^j + \Phi_2^j = \Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1}, \\ &\tfrac{\partial(\Phi_1^j + \Phi_1^j)}{\partial n_j} = \varepsilon_{j+1} \tfrac{\partial(\Phi_1^{j+1} + \Phi_2^{j+1})}{\partial n_j}, \end{aligned}\right\}_{\vec{r} \in S_j} \tag{3}$$

где $j = 1, 2, \ldots, J$, при этом $\frac{\partial}{\partial n_j}$ – производная вдоль внешней нормали к поверхности S_j. Кроме того, ε_{j+1} - относительная диэлектрическая проницаемость для среды в $(j+1)$ -ой оболочке по сравнению со средой в j-й оболочке.

В соответствии с своими свойствами потенциалы, являясь решениями уравнения Лапласа, удовлетворяют интегральным соотношениям [15]

$$\int\limits_{S_j} \left\{ \Phi_1^{j+1}(\vec{r}\,') \frac{\partial G(\vec{r}, \vec{r}\,')}{\partial n\,'} - \frac{\partial \Phi_1^{j+1}(\vec{r}\,')}{\partial n\,'} G(\vec{r}, \vec{r}\,') \right\} \mathrm{d}s'$$

$$= \left\{ \begin{array}{ll} -\Phi_1^j(\vec{r}), & \vec{r} \in D_j, \\ 0, & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_j, \end{array} \right. \tag{4}$$

$$\int\limits_{S_j} \left\{ \Phi_2^{j+1}(\vec{r}\,') \frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}\,')}{\partial n\,'} - \frac{\partial \Phi_2^{j+1}(\vec{r}\,')}{\partial n\,'} G(\vec{r},\vec{r}\,') \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} 0, & \vec{r} \in D_j, \\ \Phi_2^j(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_j, \end{cases} \tag{5}$$

где используется одна и та же функция Грина скалярного уравнения Лапласа для свободного пространства

$$G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{4\pi|\vec{r}-\vec{r}\,'|}, \tag{6}$$

$\vec{r}$, $\vec{r}\,'$ – радиус-векторы точек наблюдения и интегрирования.

Суммируя уравнения (4)–(5) и учитывая граничные условия (3), получим

$$\int\limits_{S_j} \left\{ (\Phi_1^{j+1}(\vec{r}\,') + \Phi_2^{j+1}(\vec{r}\,')) \frac{\partial G}{\partial n\,'} - \varepsilon_{j+1} \frac{\partial (\Phi_1^{j+1}(\vec{r}\,') + \Phi_2^{j+1}(\vec{r}\,'))}{\partial n\,'} G \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} -\Phi_1^j(\vec{r}), \vec{r} \in D_j, \\ \Phi_2^j(\vec{r}), \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_j. \end{cases} \tag{7}$$

Теперь, принимая во внимание соотношения (4)–(5) для области D_j с поверхностью S_j, имеем

$$(\varepsilon_{j+1} - 1) \int\limits_{S_j} \left\{ \frac{\partial (\Phi_1^{j+1}(\vec{r}\,') + \Phi_2^{j+1}(\vec{r}\,'))}{\partial n\,'} G(\vec{r},\vec{r}\,') \right\} \mathrm{d}s' = \begin{cases} \Phi_1^j(\vec{r}) - \Phi_1^j(\vec{r}), & \vec{r} \in D_j, \\ -\Phi_2^j(\vec{r}) + \Phi_2^{j+1}(\vec{r}), & \vec{r} \in R^3 \setminus \bar{D}_j. \end{cases} \tag{8}$$

Напомним, что потенциал в ядре $\Phi_2^{J+1} = 0$. Заметим, что уравнения (8) являются аналогами интегральных поверхностных уравнений, возникающих при применении метода расширенных граничных условий (EBCM) для волновых задач (см., например, [16]). Здесь дополнительные упрощения имеют место из-за отсутствия в качестве параметра волнового числа среды и, как следствие, появление единой функции Грина (6) для всех сред – в ядре, оболочках и внешности частицы.

Важную роль играет коммутативность оператора Т, соответствующего электростатической задаче, и оператора $\mathrm{T}_\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi}$. Если воспользоваться интегральной формулировкой задачи (8), то вместо оператора Т можно рассматривать оператор

$$\widetilde{\mathrm{T}}\,E = \int\limits_S \left\{\frac{\partial\Phi_1^2(\vec{r}\,')}{\partial n\,'} G(\vec{r},\vec{r}\,')\right\} \mathrm{d}s'. \tag{9}$$

Равенство

$$\widetilde{\mathrm{T}}\,\mathrm{T}_\varphi = \mathrm{T}_\varphi\,\widetilde{\mathrm{T}} \tag{10}$$

легко доказывается интегрированием по частям по переменной φ' (в сферической или сфероидальной системах координат) в левой части этого уравнения. При этом следует учесть независимость от азимутального угла функции $r = r(\theta)$, описывающей поверхность осесимметричной частицы, и метрических коэффициентов соответствующих систем координат, а также соотношение $\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial\varphi'} = -\frac{\partial G(\vec{r},\vec{r}')}{\partial\varphi}$. Отметим, что внеинтегральные члены, возникающие при интегрировании по частям, равны нулю в силу 2π-периодичности по переменной φ' всех функций, входящих в интегралы (10).

Коммутативность операторов Т и $\widetilde{\mathrm{T}}$ для осесимметричных частиц означает, что электростатическая задача для них решается независимо для каждого слагаемого разложений потенциалов Φ в ряды Фурье по азимутальному углу φ, т.е. в этом случае имеет место разделение относительно переменной φ.

§3. Разложения скалярных потенциалов

Введем сфероидальную систему координат (ξ, η, φ) таким образом, чтобы ее связь с декартовой системой (x, y, z), ось z которой совпадает с осью симметрии частицы, можно было задать соотношениями [17]

$$\begin{aligned} x &= \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\cos\varphi, \\ y &= \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\sin\varphi, \\ z &= \frac{d}{2}\,\xi\,\eta, \end{aligned} \tag{11}$$

где d – фокусное расстояние сфероидальных координатных поверхностей. Параметр $f = 1$ для вытянутых сфероидальных координат, при этом $\xi \in [1,\infty)$, $\eta \in [-1,1]$ и $\varphi \in [0,2\pi)$ и $f = -1$ для сплюснутых сфероидальных координат, при этом $\xi \in [0,\infty)$, $\eta \in [-1,1]$ и $\varphi \in [0,2\pi)$. Координатными поверхностями в сфероидальной системе являются вытянутые или сплюснутые софокусные сфероиды и двуполостные или однополостные гиперболоиды соответственно. Отметим, что вытянутые сфероидальные координаты возникают при вращении вокруг большой оси софокусных эллипсов и гипербол, а сплюснутые – при вращении вокруг малой оси этих фигур.

Уравнение поверхности S осесимметричной частицы в выбранных сфероидальных координатах запишется как

$$\xi = \xi(\eta), \tag{12}$$

при этом не обязательно частицы должны быть звездными, т.е. радиус-вектор, проведенный в некоторую точку поверхности, может пересекать ее дважды.

Для понимания представленных формул и некоторых переходов между ними необходимо знание ряда соотношений справедливых для любой сфероидальной системы координат. Поскольку некоторые из этих соотношений могут быть найдены в литературе лишь с большим трудом, мы приводим их ниже.

Единичный вектор нормали к любой поверхности в сфероидальной системе координат можно представить в виде

$$\vec{i}_n = \frac{\nabla(\xi - \xi(\eta))}{|\nabla(\xi - \xi(\eta))|} = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(h_\eta\, \vec{i}_\xi - \xi'_\eta\, h_\xi\, \vec{i}_\eta \right), \tag{13}$$

где $\vec{i}_\xi, \vec{i}_\eta, \vec{i}_\varphi$ – орты сфероидальной системы, а

$$\begin{aligned} h_\xi =& \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2 - f\eta^2}{\xi^2 - f}\right)^{1/2}, \quad h_\eta = \frac{d}{2}\left(\frac{\xi^2 - f\eta^2}{1 - \eta^2}\right)^{1/2}, \\ h_\varphi =& \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1 - \eta^2)\right]^{1/2} \end{aligned} \tag{14}$$

являются ее метрическими коэффициентами, т.е. элемент длины равен

$$(\mathrm{d}l)^2 = h_\xi^2(\mathrm{d}\xi)^2 + h_\eta^2(\mathrm{d}\eta)^2 + h_\varphi^2(\mathrm{d}\varphi)^2. \tag{15}$$

Единичными касательными векторами к поверхности частицы являются орты $\vec{i}_\varphi$ и

$$\vec{i}_\tau = \vec{i}_n \times \vec{i}_\varphi = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\xi'_\eta\, h_\xi\, \vec{i}_\xi + h_\eta\, \vec{i}_\eta\right). \tag{16}$$

Элемент площади в сфероидальных координатах можно представить в виде

$$\vec{n}\,\mathrm{d}s = \left(\frac{\partial(y,z)}{\partial(\eta,\varphi)}\vec{i}_{\mathrm{x}} + \frac{\partial(z,x)}{\partial(\eta,\varphi)}\vec{i}_{\mathrm{y}} + \frac{\partial(x,y)}{\partial(\eta,\varphi)}\vec{i}_{\mathrm{z}}\right)\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\varphi, \tag{17}$$

где $\vec{i}_{\mathrm{x}}, \vec{i}_{\mathrm{y}}, \vec{i}_{\mathrm{y}}$ есть орты соответствующей декартовой системы координат (см. соотношения (11)), поэтому

$$\mathrm{d}s = h_\varphi \sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}\;\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\varphi. \tag{18}$$

Производная по нормали вычисляется по формуле

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \nabla U \cdot \vec{i}_n = \frac{1}{\sqrt{h_\eta^2 + {\xi'_\eta}^2\, h_\xi^2}} \left(\frac{h_\eta}{h_\xi}\frac{\partial U}{\partial \xi} - \xi'_\eta\, \frac{h_\xi}{h_\eta}\frac{\partial U}{\partial \eta}\right). \tag{19}$$

Еще одно соотношение

$$\frac{\partial U}{\partial n}\;\mathrm{d}s = \frac{d}{2}\left((\xi^2 - f)\frac{\partial U}{\partial \xi} - \xi'_\eta\,(1-\eta^2)\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\;\mathrm{d}\eta\,\mathrm{d}\varphi \tag{20}$$

будет полезно при рассмотрении уравнений (8).

Уравнение Лапласа (1) для потенциалов (2) может быть решено разделением переменных в сфероидальных координатах. В этом случае соответствующие решения имеют вид [3]

$$\begin{array}{c} \widetilde{\Psi}^{(1)}_{ml}(\vec{r}) \\ \widetilde{\Psi}^{(3)}_{ml}(\vec{r}) \end{array} = \begin{array}{c} P_l^m(\xi) \\ Q_l^m(\xi) \end{array} \;\psi_{ml}(\eta,\varphi),$$

$$\psi_{ml}(\eta,\varphi) = \bar{P}_l^m(\eta)\;\cdot \frac{2-\delta_m^0}{2\pi} \;\begin{array}{c} \cos m\varphi, \\ \sin m\varphi, \end{array} \tag{21}$$

где $n \geqslant m \geqslant 0$ – неотрицательные целые числа, $\delta_m^0 = 1$ или 0, когда $m=0$ и $m \neq 0$ соответственно, $P_l^m(\eta)$ – присоединенные функции Лежандра 1-го рода, $\bar{P}_l^m(\eta) = \sqrt{\frac{(2l+1)}{2}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\; P_l^m(\eta)$ – соответствующие нормированные функции. Угловые функции ψ_{ml} образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ с квадратичной метрикой:

$$\int\limits_0^{2\pi} \int\limits_{-1}^{1} \psi_{mn}(\eta,\varphi)\,\psi_{\mu\nu}(\eta,\varphi)\,\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\varphi = \delta_m^\mu\ \delta_n^\nu\,, \tag{22}$$

т.е. на поверхности любого координатного сфероида Ω. Для функций, зависящих от угловой координаты η, вторые линейно независимые решения $Q_l^m(\eta)$ не рассматриваются, так как они имеют особенности при $\eta = \pm 1$ и не подходят по физическим соображениям, но они появляются для функций, зависящих от радиальных координат. Присоединенные функции Лежандра 1-го рода имеют вид

$$\begin{aligned} &P_0(\eta) = 1, \quad P_1(\eta) = \eta \quad P_2(\eta) = \tfrac{1}{2}\left(3\eta^2 - 1\right), \ldots, \\ &P_1^1(\eta) = \sqrt{1-\eta^2}, \quad P_2^1(\eta) = 3\eta\sqrt{1-\eta^2}, \ldots. \end{aligned} \tag{23}$$

С увеличением индексов n, m соответствующие функции Лежандра могут быть найдены из рекуррентных соотношений [3]. Присоединенные функции Лежандра 1-го и 2-го рода от радиальной координаты $\xi \geqslant 1$ можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} &P_0(\xi) = 1, \quad P_1(\xi) = \xi \quad P_2(\xi) = \frac{1}{2}\left(3\xi^2 - 1\right), \ldots, \\ &P_1^1(\xi) = \sqrt{\xi^2 - 1}, \quad P_2^1(\xi) = 3\xi\sqrt{\xi^2-1}, \ldots, \\ &Q_0(\xi) = \frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1}, \quad Q_1(\xi) = \frac{1}{2}\xi\ \ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - 1, \\ &Q_2(\xi) = \frac{1}{4}\left(3\xi^2-1\right)\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} - \frac{3}{2}\xi, \ldots, \\ &Q_1^1(\xi) = \sqrt{\xi^2-1}\ (-\frac{1}{2}\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} + \frac{\xi}{\xi^2-1}), \\ &Q_2^1(\xi) = \sqrt{\xi^2-1}\ (-\frac{3}{2}\xi\ln\frac{\xi+1}{\xi-1} + \frac{3\xi^2-2}{\xi^2-1}), \ldots. \end{aligned} \tag{24}$$

В случае сплюснутых сфероидальных координат решения уравнения Лапласа имеют вид [3]

$$\begin{array}{c}\widetilde{\Psi}^{(1)}_{ml}(\vec{r})\\ \widetilde{\Psi}^{(3)}_{ml}(\vec{r})\end{array} = \begin{array}{c}P_l^m(i\xi)\\ Q_l^m(i\xi)\end{array} \psi_{ml}(\eta,\varphi),$$

$$\psi_{ml}(\eta,\varphi) = \bar{P}_l^m(\eta)\cdot\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}\begin{array}{c}\cos m\varphi,\\ \sin m\varphi,\end{array} \tag{25}$$

при этом угловые функции записываются также, как и для вытянутых сфероидальных координат (см. (23)), а радиальные функции 1-го и 2-го рода имеют вид

$$P_0(i\xi) = 1,\quad P_1(i\xi) = i\xi,\quad P_2(i\xi) = -\frac{1}{2}\left(3\xi^2+1\right),\ldots,$$

$$P_1^1(i\xi) = i\sqrt{\xi^2+1},\quad P_2^1(i\xi) = -3\xi\sqrt{\xi^2+1},\ldots,$$

$$Q_0(i\xi) = -i\arctan\frac{1}{\xi},\ Q_1(i\xi) = \xi\arctan\frac{1}{\xi} - 1,$$

$$Q_2(i\xi) = \frac{i}{2}\left((3\xi^2+1)\arctan\frac{1}{\xi} - 3\xi\right),$$

$$Q_1^1(i\xi) = \sqrt{\xi^2+1}\ (-\arctan\frac{1}{\xi} + \frac{\xi}{\xi^2+1}),$$

$$Q_2^1(i\xi) = i\sqrt{\xi^2+1}\ (3\xi\arctan\frac{1}{\xi} - \frac{3\xi^2+2}{\xi^2+1}). \tag{26}$$

Заметим, что соотношения (26) можно получить из формул (25) после замены $\xi \longrightarrow i\xi$ с учетом соотношения $\frac{1}{2}\ln\frac{i\xi-1}{i\xi+1} = -i\arctan\frac{1}{\xi}$.

Разложение функции Грина $G(\vec{r},\vec{r}')$ для уравнения Лапласа имеет вид [3]

$$G(\vec{r},\vec{r}') = \frac{1}{2\pi}\frac{2}{d}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_0^m)P_l^m(\xi_<)Q_l^m(\xi_>)\bar{P}_l^m(\eta)\bar{P}_l^m(\eta')\cos m(\varphi-\varphi'), \tag{27}$$

где $\xi_< = \min(\xi,\xi')$, $\xi_> = \max(\xi,\xi')$.

В случае сплюснутых сфероидальных координат для получения необходимых соотношений в приведенных выше формулах нужно сделать замену $\xi \to i\,\xi,\ d \to -i\,d$. В результате в формуле для функции Грина появится мнимая единица.

Важную роль играет поведение радиальных функций в начале координат и на бесконечности. Из приведенных выше соотношений ясно, что радиальные функции $P_l^m(\xi)$ обеспечивают конечность потенциалов внешнего и внутреннего полей в начале координат, а радиальные функции $Q_l^m(\xi)$ - убывание к нулю потенциала рассеянного поля на бесконечности. Более того, при $\xi \longrightarrow \infty$ радиальные функции 1-го рода растут как $P_l^m(\xi) \longrightarrow \xi^l$, а радиальные функции 2-го рода убывают как $Q_l^m(\xi) \longrightarrow \xi^{-(l+1)}$. В частности, нетрудно найти

$$Q_1(\xi) \longrightarrow \frac{1}{3\xi^2}, \qquad Q_1^1(\xi) \longrightarrow \frac{2}{3\xi^2}. \tag{28}$$

Принимая во внимание соотношение $\frac{d}{2}\xi \longrightarrow r$ при $\xi \longrightarrow \infty$, радиальные функции 1-го и 2-го рода целесообразно умножить соответственно на $(\frac{d}{2})^l$ и $(\frac{d}{2})^{-(l+1)}$. Таким образом, с учетом представления функции Грина (27) далее в качестве базисных будут рассматриваться функции

$$\begin{aligned} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec r) &= (\tfrac{d}{2})^l \ \ \widetilde{\Psi}_{ml}^{(1)}(\vec r), \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\vec r) &= (\tfrac{d}{2})^{-(l+1)} \ \ \widetilde{\Psi}_{ml}^{(3)}(\vec r). \end{aligned} \tag{29}$$

Для сплюснутых сфероидальных функций нужно сделать стандартную замену:

$$\begin{aligned} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec r) &= (-i\tfrac{d}{2})^l \ \ \widetilde{\Psi}_{ml}^{(1)}(\vec r), \\ \Psi_{ml}^{(3)}(\vec r) &= (-i\tfrac{d}{2})^{-(l+1)} \ \ \widetilde{\Psi}_{ml}^{(3)}(\vec r). \end{aligned} \tag{30}$$

Теперь разложение функции Грина (27) может быть записано следующим образом:

$$G(\vec r, \vec r\,') = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} \Psi_{ml}^{(1)}(\vec r_<) \ \Psi_{ml}^{(3)}(\vec r_>), \tag{31}$$

Ниже подобное представление для функции Грина будет получено и в сферической системе координат.

Рассмотрим представление потенциалов полей в построенном базисе для случая вытянутых сфероидальных координат. Потенциалы для внешнего поля записывается следующим образом:

$$\Phi_1^1 = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} a_{ml}^1 \ \left(\frac{d}{2}\right)^l P_l^m(\xi) \ \bar{P}_l^m(\eta) \ \cos m\varphi = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=m}^{\infty} a_{ml}^1 \ \Psi_{ml}^{(1)}(\vec r), \tag{32}$$

С учетом осевой симметрии частицы можно рассматривать только два случая ориентации внешнего поля. Предположим, что единичное внешнее поле направлено вдоль ее оси вращения:

$$\vec{E^0} = \vec{i_z}. \tag{33}$$

Соответствующий скалярный потенциал имеет вид (см. соотношения (2) и (11))

$$\Phi_1^1 = z = \frac{d}{2}\xi\eta = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{d}{2}\;P_1(\xi)\bar{P}_1(\eta) = a_{01}^1\;\Psi_{01}^{(1)}(\vec{r}), \tag{34}$$

при этом коэффициент

$$a_{01}^1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{35}$$

в то время как все остальные коэффициенты равны нулю.

Во втором случае единичное внешнее поле перпендикулярно оси симметрии частицы:

$$\vec{E^0} = \vec{i_x}, \tag{36}$$

при этом соответствующий потенциал записывается следующим образом:

$$\begin{aligned}\Phi_1^1 = x &= \frac{d}{2}\left[(\xi^2 - f)(1-\eta^2)\right]^{1/2}\cos\varphi \\ &= \sqrt{\frac{4}{3}}\,\frac{d}{2}\;P_1^1(\xi)\bar{P}_1^1(\eta)\cos\varphi = a_{11}^1\;\Psi_{11}^{(1)}(\vec{r}).\end{aligned} \tag{37}$$

Итак, разложение (32) содержит одно слагаемое, при этом отличен от нуля коэффициент

$$a_{11}^1 = \sqrt{\frac{4}{3}}. \tag{38}$$

Регулярный и иррегулярный потенциалы в j-й оболочке могут быть представлены в виде разложений по соответствующим функциям с индексами l и m:

$$\begin{aligned}\begin{matrix}\Phi_1^j \\ \Phi_2^j\end{matrix} &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\;\begin{matrix} a_{ml}^j & (\frac{d}{2})^l\,P_l^m(\xi) \\ b_{ml}^j & (\frac{d}{2})^{-(l+1)}\,Q_l^m(\xi)\end{matrix}\quad \bar{P}_l^m(\eta)\;\cos m\varphi \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}\;\begin{matrix} a_{ml}^j & \Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}) \\ b_{ml}^j & \Psi_{ml}^{(3)}(\vec{r}).\end{matrix}\end{aligned} \tag{39}$$

Заметим, что подобная запись справедлива также и для потенциалов внешнего и “рассеянного” излучений.

В рассматриваемой задаче имеет место разделение переменных относительно азимутального угла φ (см. (10)), поэтому в случае вертикальной ориентации внешнего поля следует рассматривать только члены с индексом $m = 0$ (см. (34)), а при горизонтальной ориентации – только члены с индексом $m = 1$ (см. (37)). Отметим, что в разложениях потенциалов появились бы функции $\sin m\varphi$ вместо $\cos m\varphi$ при рассмотрении внешнего поля, направленного вдоль оси y. Здесь результаты получаются точно такие же, как и во втором случае в силу осевой симметрии исходной задачи.

Введем сферическую систему координат (r, θ, φ), связанную с декартовой системой (x, y, z) следующим образом:

$$\begin{cases} x = r \ \sin\theta \ \cos\varphi, \\ y = r \ \sin\theta \ \sin\varphi, \\ z = r \ \cos\theta, \end{cases} \tag{40}$$

при этом метрические коэффициенты равны $h_r = 1$, $h_\theta = r$, $h_\varphi = r\sin\theta$. В дальнейшем будем считать, что рассеивающее тело имеет аксиальную симметрию (ось z совпадает с осью симметрии), и его поверхность S в сферической системе координат описывается уравнением

$$r = r(\theta), \tag{41}$$

при этом частицы должны быть звездными, т.е. радиус-вектор, проведенный в любую точку поверхности, не должен пересекать ее дважды.

Далее можно ввести правую тройку ортогональных векторов

$$\begin{aligned} \vec{i_n} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_\theta'^2}} \ (r \ \vec{i}_r - r'_\theta \ \vec{i}_\theta), \\ \vec{i_\tau} &= \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_\theta'^2}} (r'_\theta \ \vec{i}_r + r \ \vec{i}_\theta), \qquad \vec{i}_\varphi, \end{aligned} \tag{42}$$

где $(\vec{i}_r, \vec{i}_\theta, \vec{i}_\varphi)$ – орты сферической системы, r'_θ – производная функции $r(\theta)$ по углу θ. Отметим, что векторы $\vec{i}_\tau$ и $\vec{i}_\varphi$ являются касательными к поверхности S.

Ниже нам потребуется выражение для производной функции по нормали

$$\frac{\partial U}{\partial n} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r_\theta'^2}} \left(r \frac{\partial U}{\partial r} - \frac{r'_\theta}{r} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right). \tag{43}$$

Элемент поверхности рассеивателя записывается в сферической системе координат следующим образом:

$$\mathrm{d}s = r\sqrt{r^2 + r_\theta'^2}\,\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi. \tag{44}$$

Еще одна полезная формула имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \left(r^2\frac{\partial U}{\partial r} - r_\theta'\frac{\partial U}{\partial \theta}\right)\,\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi. \tag{45}$$

Уравнение Лапласа для потенциалов может быть решено разделением переменных в сферических координатах. В этом случае соответствующие решения имеют вид

$$\begin{aligned} \begin{matrix}\widetilde{\Psi}_{ml}^{(1)}(\vec{r})\\ \widetilde{\Psi}_{ml}^{(3)}(\vec{r})\end{matrix} \quad &= \quad \begin{matrix} r^l \\ r^{-(l+1)}\end{matrix}\ \ \psi_{ml}(\theta,\varphi), \psi_{ml}(\theta,\varphi) \\ &= \bar{P}_l^m(\cos\theta)\cdot\frac{2-\delta_m^0}{2\pi}\quad \begin{matrix}\cos m\varphi,\\ \sin m\varphi,\end{matrix} \end{aligned} \tag{46}$$

Важно отметить, что радиальные функции r^l входят в функции $\widetilde{\Psi}_{ml}^{(1)}$ и обеспечивают конечность потенциалов внешнего и внутреннего полей в начале координат, а радиальные функции $r^{-(l+1)}$ входят в функции $\widetilde{\Psi}_{ml}^{(3)}$ и обеспечивают убывание к нулю потенциала рассеянного поля на бесконечности. Угловые функции ψ_{ml} образуют полную ортонормированную систему в пространстве $L_2(\Omega)$ с квадратичной метрикой

$$\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}\ \psi_{mn}(\theta,\varphi)\,\psi_{\mu\nu}(\theta,\varphi)\,\sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi = \delta_m^\mu\ \delta_n^\nu, \tag{47}$$

т.е. на любой сфере Ω с центром в начале координат.

Разложение функции Грина $G(\vec{r},\vec{r}\,')$ для уравнения Лапласа по сферическим функциям хорошо известно [3]:

$$\begin{aligned} G(\vec{r},\vec{r}\,') = \frac{1}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty}(2-\delta_{0m})\frac{1}{2l+1}(r_<)^l(r_>)^{-(l+1)} \\ \bar{P}_l^m(\cos\theta)\,\bar{P}_l^m(\cos\theta')\,\cos m(\varphi-\varphi'), \end{aligned} \tag{48}$$

где $r_< = \min(r,r')$, $r_> = \max(r,r')$.

Отметим, что сферическая система координат является предельным случаем как вытянутой, так и сплюснутой сфероидальной системы. Действительно, при предельном переходе $d \longrightarrow 0,\ \xi \longrightarrow \infty$ и одновременно $\frac{d}{2}\ \xi \longrightarrow r$ имеем $\eta \longrightarrow \cos\theta$ и угловые сфероидальные функции $\psi_{ml}(\eta,\varphi)$ переходят в сферические $\psi_{ml}(\theta,\varphi)$.

С учетом представления функции Грина (48) далее в качестве базисных будут рассматриваться функции

$$\begin{aligned}\Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}) &= \widetilde{\Psi}_{ml}^{(1)}(\vec{r}),\\ \Psi_{ml}^{(3)}(\vec{r}) &= \tfrac{1}{2l+1}\ \widetilde{\Psi}_{ml}^{(3)}(\vec{r}).\end{aligned} \tag{49}$$

Теперь разложение функции Грина по выбранному базису совпадает с формулой (31).

Потенциалы для внешнего поля записывается следующим образом:

$$\Phi_1^1 = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} a_{ml}^1\ r^l\ \bar{P}_l^m(\cos\theta)\ \cos m\varphi = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} a_{ml}^1\ \ \Psi_{ml}^{(1)}(\vec{r}). \tag{50}$$

С учетом осевой симметрии рассеивающей частицы можно рассматривать только два случая ориентации внешнего поля. Предположим, что единичное внешнее поле направлено вдоль оси вращения частицы (см. (33)). Тогда соответствующий скалярный потенциал имеет вид

$$\Phi_1^1 = z = r\cos\theta = a_{01}^1\ r\bar{P}_1(\cos\theta) = a_{01}^1\ \Psi_{01}^{(1)}(\vec{r}). \tag{51}$$

и отличен от нуля только коэффициент

$$a_{01}^1 = \sqrt{\frac{2}{3}}, \tag{52}$$

в то время как все остальные коэффициенты равны нулю.

Во втором случае внешнее поле перпендикулярно оси симметрии частицы (см. (36)). Тогда соответствующий потенциал записывается следующим образом:

$$\Phi_1^1 =\ x = r\ \sin\theta\ \cos\varphi = a_{11}^1 r\bar{P}_1^1(\cos\theta)\cos\varphi = a_{11}^1\ \Psi_{11}^{(1)}(\vec{r}) \tag{53}$$

и отличен от нуля коэффициент

$$a_{11}^1 = \sqrt{\frac{4}{3}}, \tag{54}$$

а все остальные коэффициенты равны нулю. Сравнивая со случаем сфероидального базиса видим, что здесь имеется полная аналогия.

Регулярные и иррегулярные в начале координат потенциалы могут быть представлены в виде разложений по соответствующим функциям с индексами l и m:

$$\begin{matrix}\Phi_1^j\\ \Phi_2^j\end{matrix} = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^j & r^l \\ b_{ml}^j & r^{-(l+1)}\end{matrix} \cdot\psi_{ml}(\theta,\varphi) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{l=m}^{\infty} \begin{matrix} a_{ml}^j & \Psi_{ml}^{(1)}(\vec r) \\ b_{ml}^j & \Psi_{ml}^{(3)}(\vec r),\end{matrix} \tag{55}$$

при этом далее угловые функции $\psi_{ml}(\theta,\varphi)$ будут иметь зависимость от азимутального угла в виде $\cos m\varphi$, где $m=0$ или $m=1$.

Из приведенных выше разложений скалярных потенциалов электрических полей и функции Грина в сфероидальном и сферическом базисах видно, что внешне они записываются одинаково. В силу этого в следующем параграфе формулы будут унифицированы для этих двух случаев.

§4. Определение коэффициентов разложений скалярных потенциалов

Подставим в интегральные уравнения (8) разложения потенциалов (в сфероидальной системе – (32),(39), а в сферической – (50),(55)) и функции Грина (31) и поменяем местами операции интегрирования и суммирования:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{j+1}-1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\Bigg\{\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{l=\mu}^{\infty}\Bigg\{ & a_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(1)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s' \\ & +b_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(3)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s'\Bigg\}\Bigg\}\,\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r) \\ & =\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}(a_{mn}^{j}-a_{mn}^{j+1})\,\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r),\quad \vec r\in D_j,\end{aligned} \tag{56}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{j+1}-1)\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}\Bigg\{\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{l=\mu}^{\infty}\Bigg\{ & a_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(1)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s' \\ & +b_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(3)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s'\Bigg\}\Bigg\}\,\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r) \\ & =-\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=m}^{\infty}(b_{mn}^{j}-b_{mn}^{j+1})\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r),\quad \vec r\in R^3\setminus\bar D_j.\end{aligned} \tag{57}$$

Система угловых функций $\{\psi_{mn}\}$ является ортогональной на поверхности координатных сфероидов или на сферах (см. соотношения (22) и (47)), полностью лежащих внутри частицы, поэтому из первого уравнения имеем

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{j+1}-1)\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{l=\mu}^{\infty}\Bigg\{ a_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(1)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s' \\ + b_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(3)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s'\Bigg\} = a_{mn}^{j}-a_{mn}^{j+1},\end{aligned} \tag{58}$$

а из второго уравнения в силу ортогональности тех же угловых функций, но уже на координатных поверхностях, целиком содержащих внутри себя частицу, получим

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{j+1}-1)\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{l=\mu}^{\infty}\Bigg\{ a_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(1)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s' \\ + b_{\mu l}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{\mu l}^{(3)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s'\Bigg\} = -b_{mn}^{j}+b_{mn}^{j+1}.\end{aligned} \tag{59}$$

Для осесимметричных частиц имеет место разделение относительно азимутального угла φ:

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{j+1}-1)\sum_{l=m}^{\infty}\Bigg\{ a_{ml}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{ml}^{(1)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s' \\ + b_{ml}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{ml}^{(3)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(3)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s'\Bigg\} = a_{mn}^{j}-a_{mn}^{j+1},\end{aligned} \tag{60}$$

$$\begin{aligned}(\varepsilon_{j+1}-1)\sum_{l=m}^{\infty}\Bigg\{ a_{ml}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{ml}^{(1)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s' \\ + b_{ml}^{j+1}\int\limits_{S_j}\frac{\partial\Psi_{ml}^{(3)}(\vec r\,')}{\partial n\,'}\Psi_{mn}^{(1)}(\vec r\,')\,\mathrm{d}s'\Bigg\} = -b_{mn}^{j}+b_{mn}^{j+1},\end{aligned} \tag{61}$$

при этом азимутальный индекс принимает только одно значение, а именно, $m = 0$ для вертикальной ориентации внешнего поля и $m = 1$ – для горизонтальной.

В матричном виде систему для определения неизвестных коэффициентов можно записать следующим образом:

$$\left.\begin{aligned} \vec{a}^{\,(j)} &= A_{31}^{(j)} \;\; \vec{a}^{\,(j+1)} + A_{33}^{(j)} \;\; \vec{b}^{\,(j+1)}, \\ \vec{b}^{\,(j)} &= A_{11}^{(j)} \;\; \vec{a}^{\,(j+1)} + A_{13}^{(j)} \;\; \vec{b}^{\,(j+1)}, \end{aligned}\right\} \tag{62}$$

где введены векторы $\vec{a}^{\,(j)} = \left\{a_{ml}^{j}\right\}_{m}^{\infty}$, $\vec{b}^{\,(j)} = \left\{b_{ml}^{j}\right\}_{m}^{\infty}$ и матрицы

$$\begin{aligned} A_{31}^{(j)} &= \left\{\delta_l^n + (\varepsilon_{j+1} - 1)\; L_{nl,\, m}^{j,\, 31}\right\}_{m}^{\infty}, \\ A_{33}^{(j)} &= \left\{(\varepsilon_{j+1} - 1)\; L_{nl,\, m}^{j,\, 33}\right\}_{m}^{\infty}, \\ A_{11}^{(j)} &= \left\{-(\varepsilon_{j+1} - 1)\; L_{nl,\, m}^{j,\, 11}\right\}_{m}^{\infty}, \\ A_{13}^{(j)} &= \left\{\delta_l^n - (\varepsilon_{j+1} - 1)\; L_{nl,\, m}^{j,\, 13}\right\}_{m}^{\infty}. \end{aligned} \tag{63}$$

Выше использовано обозначение для интегралов

$$L_{nl,\, m}^{j,\, ki} = \int\limits_{S_j} \Psi_{mn}^{(k)}(\vec{r}) \frac{\partial \Psi_{ml}^{(i)}(\vec{r})}{\partial n} \mathrm{d}s, \tag{64}$$

которые зависят от индекса j через поверхность интегрирования, при этом следующие два верхние индекса матриц показывают, какого рода радиальные функции входят в их выражения (см. (21) и (46)).

В сфероидальной системе координат, принимая во внимание соотношение (20), поверхностные интегралы (64) могут быть записаны следующим образом:

$$\begin{aligned} L_{nl,\, m}^{j,\, 31} = & \int\limits_{-1}^{1} \left[(\xi^2 - f) P_l^{m\,\prime}(\xi) \bar{P}_l^m(\eta) - \xi_\eta'(1-\eta^2) P_l^m(\xi) \bar{P}_l^{m\,\prime}(\eta)\right] \\ & \times \left(\frac{d}{2}\right)^{l-n} Q_n^m(\xi) \bar{P}_n^m(\eta) d\eta, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
L_{nl,\ m}^{j,\ 33} = &\int\limits_{-1}^{1} \left[(\xi^2 - f) Q_l^{m\,\prime}(\xi) \bar{P}_l^m(\eta) - \xi'_\eta (1-\eta^2) Q_l^m(\xi) \bar{P}_l^{m\,\prime}(\eta)\right] \\
&\times \left(\frac{d}{2}\right)^{-(n+l+1)} Q_n^m(\xi) \bar{P}_n^m(\eta) d\eta, \\
L_{nl,\ m}^{j,\ 11} = &\int\limits_{-1}^{1} \left[(\xi^2 - f) P_l^{m\,\prime}(\xi) \bar{P}_l^m(\eta) - \xi'_\eta (1-\eta^2) P_l^m(\xi) \bar{P}_l^{m\,\prime}(\eta)\right] \\
&\times \left(\frac{d}{2}\right)^{(n+l+1)} P_n^m(\xi) \bar{P}_n^m(\eta) d\eta, \\
L_{nl,\ m}^{j,\ 13} = &\int\limits_{-1}^{1} \left[(\xi^2 - f) Q_l^{m\,\prime}(\xi) \bar{P}_l^m(\eta) - \xi'_\eta (1-\eta^2) Q_l^m(\xi) \bar{P}_l^{m\,\prime}(\eta)\right] \\
&\times \left(\frac{d}{2}\right)^{n-l} P_n^m(\xi) \bar{P}_n^m(\eta) d\eta.
\end{aligned} \tag{65}
$$

В сферической системе координат матрицы системы (62) могут быть записаны в виде (63), однако интегралы (64) вместо сфероидальных содержат сферические собственные функции (см. (46)). В силу этого они должны вычисляться в сферической системе координат, при этом с учетом соотношения (45) получим

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}_{nl,\ m}^{j,\ 31} = &\frac{1}{2n+1} \int\limits_{0}^{\pi} \left(l\ \bar{P}_l^m(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r}\ \sin\theta \bar{P}_l^{m\ \prime}(\cos\theta)\right) \\
&\times r^{l-n} \bar{P}_n^m(\cos\theta)\ \sin\theta \mathrm{d}\theta, \\
\widetilde{L}_{nl,\ m}^{j,\ 33} = &\frac{1}{(2n+1)(2l+1)} \int\limits_{0}^{\pi} \left(-(l+1) \bar{P}_l^m(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r} \sin\theta \bar{P}_l^{m\ \prime}(\cos\theta)\right) \\
&\times r^{-(l+n+1)} \bar{P}_n^m(\cos\theta) \sin\theta \mathrm{d}\theta,
\end{aligned} \tag{66}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}^{j,\,11}_{nl,\,m} &= \int\limits_0^\pi \left(l\ \bar{P}^m_l(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r}\ \sin\theta \bar{P}^{m\ \prime}_l(\cos\theta)\right) \\
&\quad \times r^{(l+n+1)} \bar{P}^m_n(\cos\theta)\ \sin\theta \mathrm{d}\theta, \\
\widetilde{L}^{j,\,13}_{nl,\,m} &= \frac{1}{2l+1} \int\limits_0^\pi \left(-(l+1)\ \bar{P}^m_l(\cos\theta) + \frac{r'_\theta}{r}\ \sin\theta \bar{P}^{m\ \prime}_l(\cos\theta)\right) \\
&\quad \times r^{n-l} \bar{P}^m_n(\cos\theta)\ \sin\theta \mathrm{d}\theta.
\end{aligned} \tag{67}
$$

Здесь матрицы системы в общем случае уже не будут диагональными, однако по прежнему азимутальный индекс $m = 0$ для вертикальной ориентации внешнего поля и $m = 1$ – для горизонтальной.

Поскольку в последнем уравнении вектор $\vec{b}^{\,(J+1)} = 0$, то система уравнений (62) легко решается

$$
\left.\begin{aligned}
\vec{a}^{\,(1)} &= A_1\ \vec{a}^{\,(J+1)}, \\
\vec{b}^{\,(1)} &= A_2\ \vec{a}^{\,(J+1)},
\end{aligned}\right\} \tag{68}
$$

где матрицы A_1 и A_2 удовлетворяют соотношению

$$
\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A^{(1)}_{31} & A^{(1)}_{33} \\ A^{(1)}_{11} & A^{(1)}_{13} \end{pmatrix}\ \cdots\ \begin{pmatrix} A^{(J-1)}_{31} & A^{(J-1)}_{33} \\ A^{(J-1)}_{11} & A^{(J-1)}_{13} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{(J)}_{31} \\ A^{(J)}_{11} \end{pmatrix}. \tag{69}
$$

Теперь нетрудно найти коэффициенты разложения потенциала "рассеянного" излучения, а именно

$$
\vec{b}^{\,(1)} = A_2 \cdot (A_1)^{(-1)}\ \vec{a}^{\,(1)} = T\ \vec{a}^{\,(1)}. \tag{70}
$$

Таким образом, коэффициенты разложения "рассеянного" поля связаны с коэффициентами разложения внешнего поля при помощи хорошо известной T-матрицы – $T = A_2 \cdot (A_1)^{(-1)}$. Заметим, что для приближения Релея потребуется только один элемент этой матрицы – T_{11} (см. п. 6).

§5. Многослойный конфокальный сфероид

Пусть многослойная сфероидальная частица имеет общую ось симметрии, совпадающую с осью z декартовой системы координат. В этом случае уравнения поверхностей многослойного конфокального вытянутого сфероида в декартовой системе записываются следующим образом:

$$\frac{x^2+y^2}{b_j^2}+\frac{z^2}{a_j^2}=1, \tag{71}$$

где $j=1,2,\ldots,J$ и полуоси a_j, b_j сфероидальных поверхностей связаны с фокусным расстоянием, а именно

$$a_1^2-b_1^2=a_2^2-b_2^2=\cdots=a_J^2-b_J^2=\left(\frac{d}{2}\right)^2, \tag{72}$$

при этом фокусы поверхностей оболочек совпадают, а сами поверхности являются координатными в единой сфероидальной системе координат:

$$\xi=\xi_j, \tag{73}$$

где $j=1,2,\ldots,J$, $\xi_{j-1}>\xi_j$, т.е. координата внешней поверхности оболочки больше координаты, соответствующей внутренней поверхности оболочки.

В противном случае, например, для двухслойной частицы имеем

$$a_1^2-b_1^2=\left(\frac{d_1}{2}\right)^2, \qquad a_2^2-b_2^2=\left(\frac{d_2}{2}\right)^2, \tag{74}$$

при этом

$$d_1\neq d_2. \tag{75}$$

Последнее условие означает различие фокусных расстояний и, следовательно, несовпадение фокусов поверхностей оболочки для неконфокальной двухслойной сфероидальной частицы. Здесь внутренняя и внешняя поверхности оболочки являются координатными в двух разных сфероидальных системах координат. В целом, электростатическая задача для таких частиц принципиально сложнее по сравнению со случаем конфокальных двухслойных сфероидов.

Для многослойных конфокальных сфероидов угловые функции ортонормированы на поверхностях оболочек, по которым проводится интегрирование, поэтому матрицы (63) становятся диагональными. Например, для вытянутого сфероида и вертикальной ориентации внешнего поля имеем:

$$\begin{aligned}
L_{11,\,0}^{j,\,31} &= ((\xi_j)^2-1)(P_1(\xi_j))'Q_1(\xi_j) = ((\xi_j)^2-1)Q_1(\xi_j) \\
&= ((\xi_j)^2-1)\left(\frac{\xi_j}{2}\ln\frac{\xi_j+1}{\xi_j-1}-1\right) = L_z^j, \\
L_{11,\,0}^{j,\,33} &= \left(\frac{d}{2}\right)^{-3}((\xi_j)^2-1)Q_1(\xi_j)\ (Q_1(\xi_j))' = \frac{L_z^j(L_z^j-1)}{\widetilde{V}_j}, \\
L_{11,\,0}^{j,\,11} &= \left(\frac{d}{2}\right)^{(2l+1)}((\xi_j)^2-1)(P_1(\xi_j))'P_1(\xi_j) = (\xi_j((\xi_j)^2-1)) \\
&= a_j\ (b_j)^2 = \frac{3}{4\pi}\ V_j = \widetilde{V}_j, \\
L_{11,\,0}^{j,\,13} &= ((\xi_j)^2-1)(Q_1(\xi_j))'P_1(\xi_j) = \xi_j((\xi_j)^2-1)(Q_1(\xi_j))' = L_z^j-1,
\end{aligned} \tag{76}$$

а все остальные интегралы равны нулю. При горизонтальной ориентации внешнего поля геометрические факторы вычисляются аналогично. Используя формулы (64) и (65) получим выражения (76) с точностью до замены $L_z \to L_x$, при этом

$$\begin{aligned}
L_{11,\,1}^{j,\,31} = L_x^j = L_y^j &= \frac{1}{2}((\xi_j)^2-1)\ (P_1^1(\xi_j))'\ Q_1^1(\xi_j) \\
&= \frac{((\xi_j)^2-1)}{2}\left(-\frac{\xi_j}{2}\ln\frac{\xi_j+1}{\xi_j-1}+\frac{(\xi_j)^2}{(\xi_j)^2-1}\right).
\end{aligned} \tag{77}$$

Для введенных геометрических факторов справедливо условие

$$L_x^j + L_y^j + L_z^j = 1, \tag{78}$$

поэтому можно использовать формулу $L_x = (1-L_z)/2$.

Для сплюснутого сфероида ситуация аналогичная, за исключением геометрических факторов и объема сплюснутой сфероидальной частицы. В этом случае

$$\begin{aligned}
L_{11,\,0}^{j,\,31} = L_z^j &= i((\xi_j)^2+1)\ (P_1(i\xi_j))'\ Q_1(i\xi_j) \\
&= ((\xi_j)^2+1)\left(1-\xi_j\arctan\frac{1}{\xi_j}\right),
\end{aligned} \tag{79}$$

$$L_{11,\,0}^{j,\,11} = i\left(\frac{-id}{2}\right)^3 \; ((\xi_j)^2+1)\;(P_1(i\xi_j))'\;P_1(i\xi_j)$$
$$= \left(\frac{d}{2}\right)^3 \; \xi_j((\xi_j)^2+1) = a_j^2 b_j = \frac{3}{4\pi}\; V_j = \widetilde{V}_j. \tag{80}$$

при вертикальной ориентации внешнего поля и

$$L_{11,\,1}^{j,\,31} = L_x^j = L_y^j = \frac{i}{2}((\xi_j)^2+1)\;(P_1^1(i\xi_j))'\;Q_1^1(i\xi_j)$$
$$= \frac{\xi_j\;((\xi_j)^2+1)}{2}\left(\arctan\frac{1}{\xi_j} - \frac{\xi_j}{(\xi_j)^2+1}\right), \tag{81}$$

при горизонтальной. Заметим, что условие (78) по прежнему выполняется.

В рассматриваемом случае T-матрица представляет собой число и определяется следующим образом (см. (69)–(70)):

$$T = T_{11} = \frac{A_2}{A_1}, \tag{82}$$

где числа A_1 и A_2 находятся из уравнения

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1+(\varepsilon_2-1)\;L_z^1] & (\varepsilon_2-1)\;\frac{L_z^1(L_z^1-1)}{\widetilde{V}_1} \\ -(\varepsilon_2-1)\;\widetilde{V}_1 & [1-(\varepsilon_2-1)\;(L_z^1-1)] \end{pmatrix}\;\ldots$$

$$\begin{pmatrix} [1+(\varepsilon_J-1)\;L_z^{J-1}] & (\varepsilon_J-1)\;\frac{L_z^{J-1}(L_z^{J-1}-1)}{\widetilde{V}_{J-1}} \\ -(\varepsilon_J-1)\;\widetilde{V}_{J-1} & [1-(\varepsilon_J-1)\;(L_z^{J-1}-1)] \end{pmatrix}\begin{pmatrix} [1+(\varepsilon_{J+1}-1)\;L_z^J] \\ -(\varepsilon_{J+1}-1)\;\widetilde{V}_J \end{pmatrix}. \tag{83}$$

В случае горизонтальной ориентации внешнего поля и для многослойной сплюснутой сфероидальной частицы T-матрица записывается аналогично.

§6. Релеевское приближение

При решении проблемы рассеяния электромагнитного излучения малыми телами в рамках приближения Релея поляризуемость частицы α вводится через индуцированный дипольный момент [1, 2]:

$$\vec{p} = \alpha\vec{E}_0, \tag{84}$$

при этом она имеет размерность объема. В общем случае поляризуемость является тензором, который в случае осесимметричных частиц становится диагональным для трех взаимно перпендикулярных направлений напряженности электрического поля:

$$\vec{p} = \alpha_x\, E_x\, \vec{i_x} + \alpha_y\, E_y\, \vec{i_y} + \alpha_z\, E_z\, \vec{i_z}. \tag{85}$$

Дальше сечение поглощения и сечение рассеяния определяются через волновое число k и поляризуемость частицы $[1, 2]$, а именно:

$$C^{\rm abs} = 4\,\pi\, k\, {\rm Im}\ (l^2\,\alpha_x + m^2\,\alpha_y + n^2\,\alpha_z), \tag{86}$$

$$C^{\rm sca} = \frac{8}{3}\,\pi\, k^4\, |\alpha|^2\,, \tag{87}$$

где

$$|\alpha|^2 = l^2\ |\alpha_x|^2 + m^2\ |\alpha_y|^2 + n^2\ |\alpha_z|^2\,, \tag{88}$$

а l, m, n – направляющие косинусы $\vec{E_0}$ относительно трех главных осей тензора поляризуемости (для осесимметричных частиц $\alpha_x = \alpha_y$).

В общем случае осесимметричной частицы следует найти коэффициент b^1_{m1} (именно он дает дипольную составляющую рассеянного поля) из бесконечной системы (62). На следующем шаге определяется поляризуемость частицы. В дальней зоне (при $r \longrightarrow \infty$ и, следовательно, $\xi \longrightarrow \infty$) потенциалы рассеянного поля для вертикальной ориентации внешнего поля имеют вид

$$\Phi^1_2 = -b^1_{01}\,\frac{\cos\theta}{r^2}\,\sqrt{\frac{1}{6}}, \tag{89}$$

а вертикально ориентированного диполя -

$$\Phi^{\rm dip} = -\alpha\,\frac{\cos\theta}{r^2}\sqrt{\frac{3}{2}}a^1_{01} \tag{90}$$

соответственно. Сравнивая данные соотношения, получим формулу для поляризуемости

$$\alpha_z = \frac{1}{3}\ \frac{b^1_{01}}{a^1_{01}} = \frac{1}{3}\ T_{11}, \tag{91}$$

где T_{11} – соответствующий элемент T-матрицы. При горизонтальной ориентации внешнего поля соответственно имеем

$$\alpha_x = \alpha_y = \frac{2}{3}\ \frac{b^1_{01}}{a^1_{01}} = \frac{2}{3}\ T_{11}. \tag{92}$$

Здесь было учтено поведение соответствующих дипольных составляющих потенциалов на бесконечности (28).

Таким образом, данный подход позволяет построить строгие решения электростатической задачи для многослойных осесимметричных частиц, из которых затем нетрудно найти поляризуемость частицы и рассчитать сечения рассеяния и поглощения (как, впрочем, и другие характеристики рассеянного излучения) в релеевском приближении.

Выводы

1. В работе построены два алгоритма решения электростатической задачи для многослойных осесимметричных частиц, базирующиеся на интегральной постановке задачи и использующие разложения потенциалов полей по сфероидальным и сферическим базисам (т.е. по собственным функциям оператора Лапласа) соответственно.

2. В частных случаях многослойных вытянутых и сплюснутых конфокальных сфероидов для двух ориентаций внешнего постоянного поля данный алгоритм дает простые решения, совпадающие с известными решениями для однородных и двухслойных частиц.

3. На базе электростатического решения построено релеевское приближение для осесимметричных частиц малых по сравнению с длиной волны электромагнитного излучения.

Авторы благодарены д.ф.-м.н. В. Б. Ильину за помощь и поддержку при написании данной работы.

Литература

1. Х. К. Ван де Хюлст, *Рассеяние света малыми частицами.* ИЛ, М., 1961.
2. К. Борен, Д. Хаффмен, *Поглощение и рассеяние света малыми частицами.* Мир, М., 1986.
3. Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики.* ИЛ, М., 1958.
4. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Электродинамика сплошных сред.* Наука, М., 1982.
5. В. В. Климов, *Наноплазмоника.* Физматлит, М., 2009.
6. M. I. Mishchenko, J. W. Hovenier, L. D. Travis, *Light Scattering by Nonspherical Particles.* Academic Press, San Diego, 2000.
7. M. I. Mishchenko, L. D. Travis, and A. A. Lacis, *Scattering, Absorption and Emission of Light by Small Particles.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
8. В. Г. Фарафонов, *Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрическом сфероиде.* — Дифференц. уравн., **19** (1983), 1765–1777.
9. N. V. Voshchinnikov, V. G. Farafonov, *Optical properties of spheroidal particles.* — Astrophys. Space Sci. **204** (1993), 19–86.
10. V. G. Farafonov, N. V. Voshchinnikov, V. V. Somsikov, *Light scattering by a core-mantle spheroidal particle.* — Appl. Opt. **35** (1996), 5412–5426.

11. V. G. Farafonov and N. V. Voshchinnikov, *Light scattering by a multilayered spheroidal particle.* — Appl. Opt. **51** (2012), 1586–1597.
12. В. Г. Фарафонов, *Новое решение задачи рассеяния плоской волны многослойным неконфокальным сфероидом.* — Опт. спектр. **114**, No. 3 (2013).
13. H. Kang and G. W. Milton, *Solutions to the Polya – Szego Conjecture and the Weak Eshelby Conjecture.* — Arch. Ration. Mech. Anal. **188** (2008), 93–116.
14. В. Г. Фарафонов, А. А. Винокуров, С. В. Барканов, *Электростатическое решение и приближение Релея для малых несферических частиц в сфероидальном базисе.* — Опт. спектр. **111** (2011), 1026–1038.
15. Д. Колтон, Р. Кресс, *Методы интегральных уравнений в теории рассеяния.* Мир, М., 1987.
16. V. G. Farafonov, V. B. Il'in, *Single light scattering: computational methods. – Light Scattering Reviews.* — In: Ed. by A. A. Kokhanovsky, Springer-Praxis, Berlin, 2006, pp. 125–177.
17. В. И. Комаров, Л. И. Пономарев, С. Ю. Славянов, *Сфероидальные и кулоновские сфероидальные функции.* Наука, М., 1976.

Farafonov V. G., Sokolovskaja M. V. Construction of the Rayleigh approximation for axisymmetric multilayered particles using the eigenfunctions of the Laplace operator.

The Rayleigh approximation is constructed from solution of the electrostatic problem for axisymmetric multilayered particles. The approach used is based on consideration of the surface integral equations analogous to those used in the extended boundary condition method (EBCM) applied to solve the electromagnetic problems. The electric fields are related with the scalar potentials that are represented by their expansions in terms of the eigenfunctions of the Laplace operator written in spheroidal and spherical coordinates. The unknown expansion coefficients are derived from infinite linear algebraic equations. The explicit solution found in spheroidal coordinates for multilayered spheroids coincides with the known solutions for the homogeneous and core-mantle particles.

Государственный университет
аэрокосмического приборостроения,
ул. Большая Морская, д. 67,
190000 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: far@aanet.ru

Поступило 30 ноября 2012 г.