

А. М. Тагирджанов

## “КОМПЛЕКСНЫЙ ИСТОЧНИК” В ДВУМЕРНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### §1. ВВЕДЕНИЕ

Вслед за асимптотическим построением локализованных при высоких частотах решений уравнения Гельмгольца, получивших название гауссовых пучков (см., например, [1]), возник интерес к точным решениям, имеющим аналогичное асимптотическое поведение. Это мотивировалось пригодностью асимптотических решений лишь в малой окрестности оси пучка [2, 3]. Другим мотивом [4, 5] было стремление к постановке дифракционных задач без апелляции к приближенным решениям. В отличие от асимптотической теории, легко допускающей гладкую неоднородность среды [1], построение точных решений требует постоянных коэффициентов [6].

В работах [2, 3] введена в рассмотрение комплексифицированная функция Грина трехмерного оператора Гельмгольца,

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2,$$

имеющая вид  $G_* = \exp(ikR_*)/R_*$ , где  $R_* = \sqrt{x^2 + y^2 + (z - ia)^2}$  и  $a > 0$  – свободный параметр. Функция  $G_*$ , названная *полем комплексного источника* [2], при  $ka \gg 1$  имеет поведение, характерное для гауссова пучка. Важно (это впервые отмечено в [2]), что функция  $R_*$  является многозначной в  $\mathbb{R}^3$ . Ее однозначно определенная ветвь (и, следовательно, ветвь  $G_*$ ) имеет скачок на некоторой поверхности  $\tilde{S}$  с краем  $\{x^2 + y^2 = a^2, z = 0\}$ , которая определяется выбором разреза. Функция  $G_*$  удовлетворяет неоднородному уравнению Гельмгольца,  $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2)G_* = \tilde{F}$ , с *функцией источника*  $\tilde{F}$  в правой части, носитель которой лежит на  $\tilde{S}$ . И вид функции  $\tilde{F}$ , и асимптотическое поведение  $G_*$  зависят от выбора разреза. Эти вопросы для трехмерного случая подробно исследованы в [7].

---

*Ключевые слова:* комплексный источник, точные решения, гауссовы пучки, локализованные волны.

В настоящей заметке разбирается аналогичный вопрос для двумерного случая. Интерес к двумерному “комплексному источнику” прослеживается начиная с работы [5], где построения, основанные на использовании комплексифицированной функции Грина двумерного оператора Гельмгольца, используются для решения задачи дифракции гауссовых пучков на плоской границе раздела сред. Двумерный случай имеет свою специфику по сравнению с трехмерным [7]. Здесь, в отличие от трехмерного случая, функция  $g_*$  имеет логарифмическое ветвление, а при вычислении функции источника не возникает необходимости в регуляризации расходящегося степенным образом интеграла.

## §2. КОМПЛЕКСИФИЦИРОВАННАЯ ФУНКЦИЯ ГРИНА

Функция Грина для двумерного уравнения Гельмгольца, отвечающая расходящейся цилиндрической волне (для временной зависимости  $e^{-i\omega t}$ ), имеет вид

$$g = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\gamma), \quad \gamma = \sqrt{x^2 + z^2},$$

где  $H_0^{(1)}$  – функция Ханкеля. Комплексифицируем ее сдвигом на мнимую постоянную по переменной  $z$ ,

$$g_* = -\frac{i}{4}H_0^{(1)}(k\gamma_*), \quad \gamma_* = \sqrt{x^2 + (z - ia)^2}, \quad (1)$$

где  $a > 0$ . Функция  $g_*$  не является в  $\mathbb{R}^2$  однозначной. Она удовлетворяет неоднородному уравнению

$$(\Delta + k^2)g_* = F(x, z), \quad \Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2, \quad k > 0, \quad (2)$$

с некоторой обобщенной функцией  $F$  в правой части. Функция источника  $F$  зависит от выбора ветви  $g_*$ .

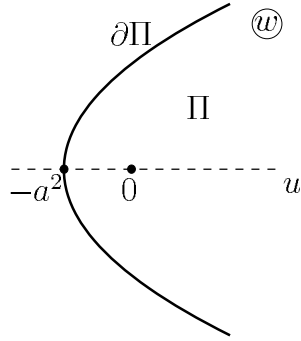
Как и в [7], для определения ветви нам будет удобно рассматривать комплексную плоскость переменной

$$w = u + iv = x^2 + z^2 - a^2 - 2iaz. \quad (3)$$

Аргументом  $H_0^{(1)}$  в (1) является  $k\sqrt{w}$ . В точке  $w = 0$  функция  $g_*$  имеет ветвление типа  $\ln \sqrt{w}$ .

При вещественных  $x$  и  $z$  переменная  $w$  принимает значения в области

$$\Pi = \left\{ w : u \geq \frac{1}{4a^2}v^2 - a^2 \right\}, \quad (4)$$

Рис. 1. Плоскость переменной  $w$ .

изображенной на рис. 1. Каждой внутренней точке  $w = u + iv$  области  $\Pi$  взаимнооднозначно сопоставляется пара точек в  $\mathbb{R}^2$ , симметричная относительно оси  $z$ . Из (3) легко получить их координаты:

$$x = \pm\sqrt{u + a^2 - (v/2a)^2}, \quad z = -v/2a. \quad (5)$$

Границе области  $\partial\Pi$  соответствует ось  $z$ . Точке ветвления  $w = 0$  соответствуют точки  $x = \pm a$ ,  $z = 0$ .

Проведем на плоскости  $w$  разрез вдоль некоторой кривой  $\gamma$ . Соответствующую кривую в  $\mathbb{R}^2$  с краем в точках  $\{x = \pm a, z = 0\}$  обозначим  $\mathcal{S}$ . Очевидно, что  $\mathcal{S}$  будет симметрична относительно оси  $z$  и не обязательно связна. Если  $\gamma$  пересекает  $\partial\Pi$ , кривая  $\mathcal{S}$  пересекает ось  $z$ . Функция  $g_*$  имеет скачок на  $\mathcal{S}$  и  $\text{supp}F = \mathcal{S}$ .

Помимо выбора разреза нужно выбрать ветвь  $g_*$ . Мы всегда будем выбирать ее так, чтобы при  $z \rightarrow +\infty$   $g_*$  соответствовала уходящей волне. В [8] было отмечено, что существует две качественно различные ситуации выбора разреза и ветви. В одном случае мы имеем уходящую волну, которая описывает гауссов пучок при  $z = +\infty$  и затухает при  $z = -\infty$ . В другом случае – пучок, приходящий с  $z = -\infty$  и уходящий на  $z = +\infty$ . Эти два случая получили названия [8] *source choice* и *beam choice*, соответственно. Мы начнем с рассмотрения первого из них.

§3. СЛУЧАЙ *source choice*

Выберем сначала разрез вдоль отрицательной вещественной полуоси. Такому разрезу соответствует отрезок  $S = \{|x| \leq a, z = 0\}$ . Возьмем ветвь  $\ln \sqrt{w}$ , вещественную при  $\operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w = 0$ . При такой фиксации ветви  $g_*$  будет иметь граничные значения  $-\frac{i}{4}H_0^{(1)}(\pm\sqrt{x^2 - a^2})$  при  $|x| \leq a, z = \pm 0$ .

**3.1. Вычисление функции источника.** Вычислим соответствующую функцию  $F$ , рассматривая ее обычным образом [9] на основных функциях  $f = f(x, z)$ ,

$$(F, f) = \iint_{\mathbb{R}^2} g_*(\Delta + k^2) f dx dz. \tag{6}$$

Представим (6) в виде предела

$$\lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{\Omega_{\varepsilon, \beta}} g_*(\Delta + k^2) f dx dz, \tag{7}$$

где интеграл берется по области  $\Omega_{\varepsilon, \beta}$ , показанной на рис. 2.

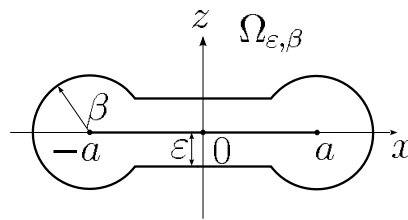


Рис. 2. Область интегрирования в (7).

Применяя к (7) в  $\Omega_{\varepsilon, \beta}$  формулу Грина [13], получим

$$(F, f) = \lim_{\beta \rightarrow 0} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}} \left( g_* \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g_*}{\partial n} \right) dl,$$

где  $\frac{\partial}{\partial n}$  обозначает дифференцирование по внешней нормали, а  $dl$  – элемент длины  $\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}$ . Кривая  $\partial\Omega_{\varepsilon, \beta}$  обходится по часовой стрелке (см.,

например, [10]). Переход к пределу при  $\varepsilon \rightarrow 0$  дает

$$\int_{-a+\beta}^{a-\beta} \left( \left[ \frac{\partial g_*}{\partial z} \right]_{z=0} f - [g_*]_{z=0} \frac{\partial f}{\partial z} \right) dx + \int_{\mathcal{B}_\beta(a) \cup \mathcal{B}_\beta(-a)} \left( g_* \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g_*}{\partial n} \right) dl, \quad (8)$$

где  $\mathcal{B}_\beta(\pm a)$  обозначает окружность радиуса  $\beta$  с центром в  $x = \pm a$ ,  $z = 0$ . Напомним, что

$$H_0^{(1)}(e^{i\pi} s) = -H_0^{(2)}(s), \quad \frac{\partial H_0^{(1,2)}(s)}{\partial s} = -H_1^{(1,2)}(s). \quad (9)$$

Простое вычисление, использующее (9), показывает, что

$$[g_*]_{z=0} \equiv g_*|_{z=+0} - g_*|_{z=-0} = -\frac{i}{2} J_0(k\sqrt{x^2 - a^2}),$$

$$\left[ \frac{\partial g_*}{\partial z} \right]_{z=0} = \frac{ka}{2\sqrt{x^2 - a^2}} J_1(k\sqrt{x^2 - a^2}).$$

В первом слагаемом (8), в отличие от трехмерного случая, регуляризация интеграла при  $\beta \rightarrow 0$  не требуется.

Рассмотрим второе слагаемое (8). Параметризуем окружность  $\mathcal{B}_\beta(a)$  следующим образом:  $x = a - \beta \cos \theta$ ,  $z = \beta \sin \theta$ ,  $\theta \in [0, 2\pi)$ . Функция  $g_*$  примет вид  $g_* = \sqrt{-2a\beta e^{i\theta} + \beta^2}$ . При малых значениях аргумента  $H_0^{(1)}$  имеет асимптотики [11]

$$H_0^{(1)}(s) = \frac{2i}{\pi} J_0(s) \ln s + O(1), \quad \frac{\partial H_0^{(1)}(s)}{\partial s} = -H_1^{(1)}(s) = \frac{2i}{\pi s} + O(\ln s),$$

откуда легко получаются оценки  $g_* = O(\ln \beta)$  и

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_*}{\partial \beta} &= \frac{i}{4} k H_1^{(1)}(k\gamma_*) \frac{\partial \gamma_*}{\partial \beta} = -\frac{i}{4} k \frac{2i}{\pi k \gamma_*} \frac{\partial \gamma_*}{\partial \beta} + O(\ln \beta) \\ &= \frac{-ae^{i\theta} + \beta}{2\pi(-2a\beta e^{i\theta} + \beta^2)} + O(\ln \beta) = \frac{1}{4\pi\beta} + O(\ln \beta). \end{aligned}$$

Таким образом, интеграл по  $\mathcal{B}_\beta(a)$  оценивается как

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{B}_\beta(a)} \left( g_* \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g_*}{\partial n} \right) dl &= \int_0^{2\pi} \left( -g_* \frac{\partial f}{\partial \beta} + f \frac{\partial g_*}{\partial \beta} \right) \beta d\theta \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^{2\pi} f(a - \beta \cos \theta, \beta \sin \theta) d\theta + O(\beta \ln \beta) = \frac{1}{2} f(a, 0) + O(\beta \ln \beta), \end{aligned}$$

что при  $\beta \rightarrow 0$  стремится к  $\frac{1}{2} f(a, 0)$ , и, аналогично,

$$\int_{\mathcal{B}_\beta(-a)} \left( g_* \frac{\partial f}{\partial n} - f \frac{\partial g_*}{\partial n} \right) dl \xrightarrow{\beta \rightarrow 0} \frac{1}{2} f(-a, 0).$$

Переходя в (8) к пределу при  $\beta \rightarrow 0$  получим

$$\begin{aligned} F &= \left( \frac{ka}{2} \frac{J_1(k\sqrt{x^2 - a^2})}{\sqrt{x^2 - a^2}} \delta(z) - \frac{i}{2} J_0(k\sqrt{x^2 - a^2}) \delta'(z) \right) \chi_{\mathcal{S}}(x) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta(x - a) + \delta(x + a)) \delta(z), \quad (10) \end{aligned}$$

где  $\chi_{\mathcal{S}}$  – характеристическая функция отрезка  $\mathcal{S}$ ,  $\chi_{\mathcal{S}}(x) = h(x + a) - h(x - a)$ , а  $h(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$  – функция Хевисайда.

### 3.2. Асимптотики в параксиальной области в дальнем поле.

Функция  $g_*$  представляет особый интерес при

$$ka \gg 1. \quad (11)$$

Воспользуемся асимптотикой функции Ханкеля

$$H_0^{(1)}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi s}} \exp(is - i\pi/4) \left( 1 + O\left(\frac{1}{s}\right) \right)$$

при  $-\pi < \arg s < 2\pi$ ,  $|s| \gg 1$ , [11], из которой следует, что

$$g_* = -\frac{\exp(ik\gamma_* + i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k\gamma_*}} \left( 1 + O\left(\frac{1}{k\gamma_*}\right) \right). \quad (12)$$

Ветвь корня в (12) определяется условием  $\sqrt{\gamma_*} > 0$  при  $\gamma_* > 0$ .

В параксиальной области,  $|x| \ll |z - ia|$ ,  $kx^4 \ll |z - ia|^3$ , как легко видеть, при  $z > 0$

$$g_* = -\frac{\exp(i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}\sqrt{z-ia}} \exp\{ikz(1+\xi) + ka(1-\xi)\} \left(1 + O\left(\frac{1}{k|z-ia|}\right) + O(\xi) + O\left(\frac{kx^4}{|z-ia|^3}\right)\right), \quad (13)$$

где  $\xi = \frac{x^2}{2(z^2+a^2)}$ . Гауссовская локализация в окрестности оси  $z$  обеспечивается множителем  $\exp(-ka\xi) = \exp\left(-ka\frac{x^2}{2(z^2+a^2)}\right)$ . При  $z < 0$

$$g_* = -\frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}\sqrt{z-ia}} \exp\{-ikz(1+\xi) - ka(1-\xi)\} \left(1 + O\left(\frac{1}{k|z-ia|}\right) + O(\xi) + O\left(\frac{kx^4}{|z-ia|^3}\right)\right). \quad (14)$$

Таким образом, при  $z > 0$  функция  $g_*$  соответствует фундаментальной осесимметрической моде двумерного гауссова пучка (см., например, [6]). При  $z < 0$  функция  $g_*$  растет при отдалении от оси  $z$ , оставаясь малой при  $ka \gg 1$ .

В дальнем поле,  $r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg a$ ,  $r \gg ka^2$ , легко получаем

$$g_* = -\frac{\exp(i\pi/4) \exp(ikr + ka \cos \vartheta)}{2\sqrt{2\pi k} \sqrt{r}} \left(1 + O\left(\frac{1}{kr}\right) + O\left(\frac{a}{r}\right) + O\left(\frac{ka^2}{r}\right)\right), \quad (15)$$

где  $\cos \vartheta = z/r$ . Видно, что  $g_*$  описывает исходящее поле, удовлетворяющее условиям излучения. Таким образом, источник действует как антенна, излучающая почти исключительно гауссов пучок в направлении положительных  $z$ , что объясняет термин *source choice*.

При достаточно малых  $\vartheta$  справедливо  $r \approx z(1+\xi)$ , откуда видно, что асимптотики (13)–(14) и (15) согласуются между собой:

$$g_* \approx -\frac{\exp(i\pi/4) \exp(ikr)}{2\sqrt{2\pi k} \sqrt{r}} \exp(ka(1-\xi)).$$

§4. СЛУЧАЙ *beam choice*

Иначе ведет себя поле  $g_*$ , если выбрать разрез вдоль положительной вещественной полуоси. Такому разрезу соответствует объединение двух полупрямых,  $\mathcal{S} = \{|x| \geq a, z = 0\}$ . Выберем ветвь  $\ln \sqrt{w}$ , вещественную на нижнем берегу разреза,  $\operatorname{Re} w > 0$ ,  $\operatorname{Im} w = -0$ . В этом случае вычисление, аналогичное предыдущему, дает

$$F = \left( \frac{ka J_1(k\sqrt{x^2 - a^2})}{2\sqrt{x^2 - a^2}} \delta(z) - \frac{i}{2} J_0(k\sqrt{x^2 - a^2}) \delta'(z) \right) \chi_{\mathcal{S}}(x) + \frac{1}{2}(\delta(x - a) + \delta(x + a))\delta(z), \quad (16)$$

где характеристическая функция двух полупрямых  $\chi_{\mathcal{S}}(x) = h(x^2 - a^2)$ .

В параксиальной области асимптотика  $g_*$  задается (13). В дальнем поле  $g_*$  имеет асимптотику (15) при  $z > 0$  и

$$g_* \approx -\frac{\exp(-i\pi/4)}{2\sqrt{2\pi k}} \frac{\exp(-ikr - ka \cos \vartheta)}{\sqrt{r}} \quad (17)$$

при  $z < 0$ . Таким образом, функция описывает гауссов пучок, распространяющийся вдоль оси  $z$ .

§5. РАЗРЕЗ ВДОЛЬ ГЛАДКОЙ КРИВОЙ ОБЩЕГО ВИДА

Пусть разрез проведен вдоль гладкой несамопересекающейся кривой  $\gamma$ . Пусть также эта кривая удовлетворяет условию регулярности, и все пересечения  $\gamma$  с  $\partial\Pi$  трансверсальны (см. [12]). Можно показать, что при выполнении этих условий кривая  $\mathcal{S}$ , на которой сосредоточена функция источника, будет гладкой. Соответствующее рассуждение из [7] применимо здесь почти дословно.

Выберем главную ветвь  $\ln g_*$ . Ветвь же корня в  $g_*$  выберем такую, чтобы функция  $g_*$  описывала уходящую волну при  $z \rightarrow +\infty$ .

Введем в окрестности кривой  $\mathcal{S}$  локальную систему координат  $(s, n)$ , где  $s$  – длина дуги, а  $n$  – расстояние от  $\mathcal{S}$ , взятое вдоль единичной нормали  $\mathbf{n}$ . Направление  $\mathbf{n}$  берется таким, чтобы направление роста  $s$  получалось поворотом  $\mathbf{n}$  на прямой угол против часовой стрелки [10]. На  $\mathcal{S}$  функция  $g_*$  имеет скачок. Пусть  $r_0 = g_*(\mathbf{r}(s, n))|_{n=+0}$  (тогда, очевидно,  $g_*(\mathbf{r}(s, n))|_{n=-0} = -r_0$ ).



**5.1. Функция источника.** Рассуждая как в п. 2, можно показать, что функция источника, отвечающая разрезу  $\gamma$ , примет вид

$$F = F_{\mathcal{S}} + \frac{1}{2}(\delta(x-a) + \delta(x+a))\delta(z),$$

где  $F_{\mathcal{S}}$  – обобщенная функция с носителем  $\mathcal{S}$ ,

$$(F_{\mathcal{S}}, f) = \int_{\mathcal{S}} \left( \left[ \frac{\partial g_*}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} f - [g_*]_{\mathcal{S}} (\nabla f \cdot \mathbf{n}) \right) ds. \quad (18)$$

Здесь  $f = f(x, z)$  – основная функция, а скачки имеют вид

$$[g_*]_{\mathcal{S}} \equiv g_*|_{n=+0} - g_*|_{n=-0} = -\frac{i}{2}J_0(kr_0), \quad \left[ \frac{\partial g_*}{\partial n} \right]_{\mathcal{S}} = \frac{ik}{2r_0}J_1(kr_0)(\mathbf{r}_* \cdot \mathbf{n}),$$

где  $\mathbf{r}_* = x\mathbf{e}_x + (z - ia)\mathbf{e}_z$ , а  $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_z$  – соответствующие орты.

**5.2. Асимптотическое поведение.** Асимптотики  $g_*$  строятся аналогично [7]. Как и в трехмерном случае, асимптотическое поведение  $g_*$  определяется тем, компактно ли пересечение  $\gamma \cap \Pi$  (и, следовательно, компактна ли  $\mathcal{S}$ ).

**5.2.1. Компактное пересечение.** Мы уже рассмотрели в п. 2 простейший случай компактной  $\mathcal{S}$ . Это рассмотрение практически дословно переносится на ситуацию, когда разрез  $\gamma$  пересекает  $\partial\Pi$  один раз. Тогда  $\mathcal{S}$  пересекает ось  $z$  в некоторой точке  $z = z'$  и параксиальная асимптотика  $g_*$  будет иметь вид (13) при  $z > z'$  и (14) при  $z < z'$ .

Пусть теперь разрез пересекает  $\partial\Pi$  нечетное число раз. Аналогично, параксиальная асимптотика будет иметь скачки на  $\mathcal{S}$ , и будет задаваться (13) и (14) при достаточно больших положительных и достаточно больших отрицательных  $z$ , соответственно.

Асимптотика дальнего поля, как и в п. 2, в общем случае компактной  $\mathcal{S}$  имеет вид (15).

**5.2.2. Некомпактное пересечение.** Рассмотрим теперь случай некомпактного пересечения  $\gamma \cap \Pi$ . Пусть сначала разрез  $\gamma$  не пересекает  $\partial\Pi$  и выбран так, что  $\mathcal{S}$  лежит вне параксиальной области. В этом случае параксиальная асимптотика  $g_*$  имеет вид (13).

Далее, если  $\gamma$  пересекает  $\partial\Pi$  четное число раз, то параксиальная асимптотика  $g_*$  имеет вид (13) при достаточно больших  $|z|$  и имеет скачки на  $\mathcal{S}$ .

В общем случае некомпактной  $\mathcal{S}$ , асимптотика дальнего поля не может быть построена для всех углов  $\vartheta$ . Мы ограничимся случаем, когда при  $x > 0$   $\mathcal{S}$  стремится на бесконечности к прямой  $z \sin \alpha = x \cos \alpha$ , где  $\alpha$  – фиксированный параметр,  $0 < \alpha < \pi$  (и, следовательно, зеркально симметричной ей прямой при  $x < 0$ ). Из (5) очевидно, что это условие выполнено, если  $\gamma$  на бесконечности стремится к линии  $u = (1 + \operatorname{tg} \alpha) \frac{v^2}{4a^2} - a^2$ . Тогда координатная асимптотика имеет вид (15) при  $\vartheta < \alpha$  и (17) при  $\vartheta > \alpha$ .

## §6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Кратко подведем итог. Двумерный случай качественно аналогичен трехмерному [7]. Кривая  $\mathcal{S}$ , на которой сосредоточена функция источника  $F$ , зависит от выбора разреза. При разных выборах разреза  $\mathcal{S}$  может быть компактна и некомпактна, связна и невязна. Во всех случаях ветвь  $g_*$  была выбрана так, что  $g_*$  описывает при  $z \rightarrow +\infty$  уходящую волну. Вычислены соответствующие функции источника и приведены асимптотики  $g_*$ . В довольно общей ситуации  $g_*$  описывает при  $z \rightarrow -\infty$  приходящую волну (15), если  $\mathcal{S}$  компактна и уходящую волну (17), если  $\mathcal{S}$  некомпактна.

Автор признателен А. С. Благовещенскому за внимание к работе.

## ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. Наука, М., 1972.
2. G. A. Deschamps, *Gaussian beam as a bundle of complex rays*. — Electron. Lett. **7** (1971), 684–685.
3. А. А. Измestьев, *Однопараметрические волновые пучки в свободном пространстве*. — Изв. вузов. Радиофизика **13**, No. 9, (1970), 1380–1388.
4. L. B. Felsen, *Complex-source-point solutions of the field equations and their relation to the propagation and scattering of Gaussian beams*. — In: Symposia Matematica Istituto Nazionale di Alta Matematica, London, Academic **18**, (1976), pp. 40–56
5. J. W. Ra, H. Bertoni, L. B. Felsen, *Reflection and transmission of beams at dielectric interfaces*. — SIAM J. Appl. Math. **24** (1973), 396–412.
6. А. П. Киселев, *Локализованные световые волны: параксиальные и точные решения волнового уравнения (обзор)*. — Опт. и спектроскоп. **102**, No. 4, (2007), 603–622.
7. A. M. Tagirdzhanov, A. S. Blagovestchenskii, A. P. Kiselev, *“Complex source” wavefields: sources in real space*. — J. Phys. A: Math. Theor. **44**, No. 42, (2011), 425203.

8. E. Heyman, L. B. Felsen, *Gaussian beam and pulsed-beam dynamics: complex-source and complex-spectrum formulations within and beyond paraxial asymptotics*. — J. Opt. Soc. Am. A **18**, No. 7, (2001), 1588–1611.
9. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев, *Обобщенные функции и действия над ними*. Вып. 1, Физматгиз, Мир, М., 1985.
10. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*. т. 2. Наука, М., 1974.
11. В. И. Смирнов, *Курс высшей математики*. т. 3, ч. 2, Наука, М., 1974.
12. М. М. Постников, *Лекции по геометрии. Семестр III. Гладкие многообразия*. Наука, М., 1987.
13. В. С. Владимиров, *Уравнения математической физики*. Наука, М., 1981.

Tagirdzhanov A. M. “Complex source” in 2D real space.

The paper concerns the complexified Green function  $g_*$  for the 2D Helmholtz equation, which is studied as a non-paraxial model of a Gaussian beam. The function  $g_*$  satisfies a certain inhomogeneous Helmholtz equation in the real space with source distribution depending on the choice of the branch of certain complex square root. We discuss various choices of the branch cut and calculate the corresponding source distribution.

С.-Петербургский государственный  
университет, Физический факультет,  
Ульяновская ул., д. 3, Петродворец,  
Санкт-Петербург 198504, Россия  
*E-mail*: aztagr@gmail.com

Поступило 4 декабря 2012 г.