Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 409, 2012 г.

А. И. Попов

ВОЛНОВЫЕ ВАЛЫ ДЛЯ ВОЛН НА ПОВЕРХНОСТИ ТЯЖЕЛОЙ ЖИДКОСТИ

§1. Введение

Рассматриваются волны на поверхности океана с медленно меняющейся глубиной. Строятся решения типа волнового вала. Волновой вал представляет из себя пакет коротких волн, который условно можно изобразить следующим рисунком:

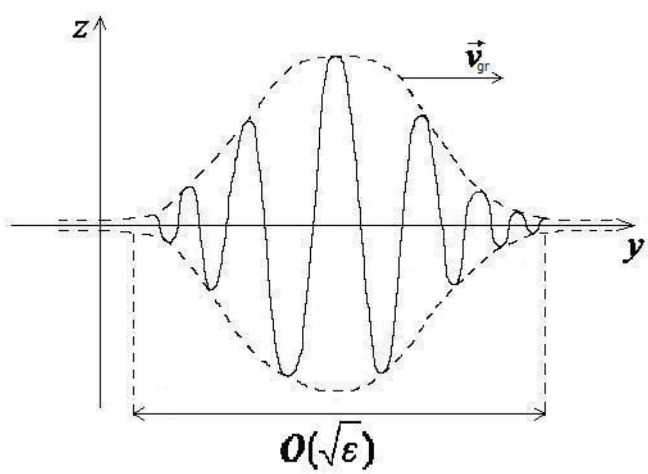

Рис. 1. Волновой вал.

Ключевые слова: волновой вал, асимптотические разложения, пространственно-временной лучевой метод.

Работа была выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант No. 12-01-09337).

При решении задачи используются асимптотические методы. Предполагается, что глубина океана медленно меняется. Скорость изменения глубины характеризуется малым параметром ε. Волны, составляющие волновой пакет, соответствуют главным членам асимптотического разложения решения по ε. Размер области, где волновой пакет существенно отличен от 0, имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$. Предполагается, что размер этой области значительно меньше радиуса кривизны фронта волны (это условие обеспечивает отсутствие перекрытия соседних волновых пакетов).

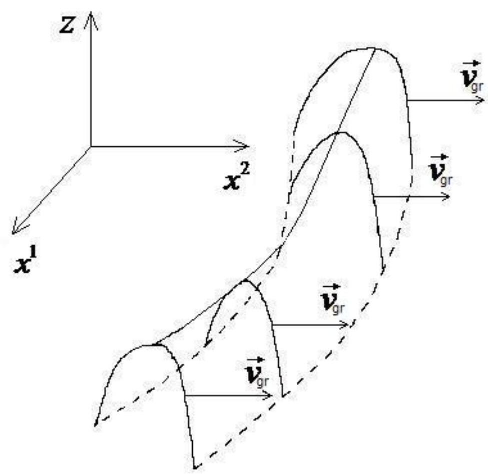

Рис. 2. Фронт волны.

В пространстве-времени решение типа волнового вала сосредоточено в окрестности поверхности, “сотканной” из пространственно-временных лучей.

Подобные задачи рассматривались ранее в работах [1–6]. В частности, в [1] использовался метод комплексных лагранжевых многообразий В. П. Маслова, а в [2] строилось решение типа волновой пленки. В данной работе применяется пространственно-временной лучевой метод (см. [3–6]).

§2. Исходные уравнения

Для полноты изложения приведем некоторые исходные формулы. Вывод данных формул подробно описан в работе [6].

Пусть тяжелая жидкость заполняет океан.

$$\begin{cases} -H \leqslant z \leqslant 0, \\ -\infty < x^1, \quad x^2 < \infty, \end{cases} \tag{2.1}$$

$z = -H$ – поверхность дна. $H = H(x^1, x^2)$. $\vec{v} = \vec{v}(t, x^1, x^2, z)$ – скорость жидкости. Пусть жидкость несжимаема, то есть $\operatorname{div}\vec{v} = 0$. Пусть течение безвихревое, то есть $\vec{v} = -\operatorname{grad}\Phi$. Тогда потенциал поля скоростей Φ будет гармонической функцией:

$$\Delta\Phi = 0. \tag{2.2}$$

Мы хотим выяснить, могут ли существовать волны некоторого определенного типа на поверхности жидкости. Дно $z = -H(x^1, x^2)$ считаем непроницаемым:

$$(\vec{v}, \vec{n})\big|_{z=-H} = 0, \tag{2.3}$$

что эквивалентно:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \frac{\partial H}{\partial x^1}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1} + \frac{\partial H}{\partial x^2}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)\bigg|_{z=-H} = 0. \tag{2.4}$$

Второе краевое условие имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} + g\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)\bigg|_{z=0} = 0, \tag{2.5}$$

где g – ускорение свободного падения. Итак, мы будем работать с уравнением (2.2) при краевых условиях (2.4) и (2.5).

§3. Пространственно-временной лучевой метод

Приведем основные положения пространственно-временного лучевого метода. Это известный и довольно распространенный метод для решения задач подобного рода. Его подробное изложение можно найти в работе [3]. Нам он понадобится для дальнейших построений. Итак, мы решаем задачу о распространении поверхностной волны над слабо искривленным дном. Пусть глубина H – медленно меняющаяся функция координат x^1, x^2:

$$H = H(\varepsilon x^1, \varepsilon x^2), \tag{3.1}$$

$\varepsilon \ll 1$ – малый параметр задачи. Введем медленно меняющиеся координаты и время:

$$\tau = \varepsilon t, \quad \xi^1 = \varepsilon x^1, \quad \xi^2 = \varepsilon x^2. \tag{3.2}$$

Анзатц пространственно-временного лучевого (ПВЛ) метода – это разложение вида:

$$\Phi \sim e^{i\frac{\theta(\tau,\xi^1,\xi^2)}{\varepsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(\tau,\xi^1,\xi^2,z)(i\varepsilon)^j, \tag{3.3}$$

где частота и волновой вектор имеют вид:

$$\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial\tau} = -\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right),$$

$$\vec{k} = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi^1}, \frac{\partial\theta}{\partial\xi^2}\right) = \nabla\left(\frac{\theta}{\varepsilon}\right), \quad \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \frac{\partial}{\partial x^2}\right). \tag{3.4}$$

После подстановки анзатца (3.3) в уравнение Лапласа $\triangle\Phi = 0$ и приравнивания коэффициентов при одинаковых степенях ε, приходим к последовательности равенств:

$$L_0\Phi_0 = 0, \quad L_0\Phi_1 + L_1\Phi_0 = 0, \ldots, \ L_0\Phi_j + L_1\Phi_{j-1} + L_2\Phi_{j-2} = 0, \tag{3.5}$$

где

$$\begin{aligned} &L_0\Phi = \tfrac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - k^2\Phi, \\ &L_1\Phi = 2\nabla'\theta\nabla'\Phi + \Delta'\theta\cdot\Phi, \\ &L_2\Phi = -\Delta'\Phi, \end{aligned} \tag{3.6}$$

$$\begin{aligned} &\nabla' = \left(\frac{\partial}{\partial\xi^1}, \frac{\partial}{\partial\xi^2}\right), \\ &\Delta' = \frac{\partial^2}{(\partial\xi^1)^2} + \frac{\partial^2}{(\partial\xi^2)^2}, \quad k^2 = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi^2}\right)^2. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Краевые условия приводят к соотношениям:

$$\left(g\frac{\partial\Phi_j}{\partial z} - \omega^2\Phi_j + \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\Phi_{j-1} + 2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\Phi_{j-1}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\Phi_{j-2}}{\partial^2\tau}\right)\Bigg|_{z=0} = 0, \tag{3.8}$$

$$\left(\frac{\partial\Phi_j}{\partial z} + \nabla' H\nabla'\theta\cdot\Phi_{j-1} - \nabla' H\nabla'\Phi_{j-2}\right)\Bigg|_{z=-H} = 0, \tag{3.9}$$

$$j = 0,1,2,\ldots, \quad \Phi_{-1} = \Phi_{-2} \equiv 0. \tag{3.10}$$

При $j = 0$ получаем:

$$\frac{\partial^2 \Phi_0}{\partial z^2} - k^2 \Phi_0 = 0, \quad \left(g \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} - \omega^2 \Phi_0 \right) \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_0}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0. \tag{3.11}$$

Отсюда легко следует, что:

$$\Phi_0 = A_0(\tau, \xi^1, \xi^2) \cdot \cosh\left(k(z+H)\right), \tag{3.12}$$

$$\omega^2 = gk \cdot \tanh(kH), \quad k = \sqrt{\theta_{\xi^1}^2 + \theta_{\xi^2}^2}. \tag{3.13}$$

Итак, дисперсионное соотношение имеет вид:

$$\omega = \omega(k_1, k_2) = \sqrt{gk}\ \sqrt{\tanh(kH)}, \tag{3.14}$$

где $\vec{k} = (k_1, k_2) = (\theta_{\xi^1}, \theta_{\xi^2})$. Используя равенство $\omega = -\frac{\partial \theta}{\partial \tau}$, дисперсионному соотношению можно придать вид классического уравнения Гамильтона-Якоби:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \mathbf{H}(\xi^1, \xi^2, \theta_{\xi^1}, \theta_{\xi^2}) = 0. \tag{3.15}$$

Каноническая система для уравнения Гамильтона–Якоби имеет вид:

$$\begin{aligned} &\frac{d\tau}{ds} = 1, \quad \frac{d\xi^i}{ds} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\xi^i}}, \quad \frac{d\theta_\tau}{ds} = 0, \\ &\qquad \frac{d\theta_{\xi^i}}{ds} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi^i}, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{H} + \theta_{\xi^i} \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\xi^i}}. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Решение этой системы $\xi^i = \xi^i(s)$ задает ПВ-луч.

§4. Построение θ

Введем новые координаты τ, s^1, s^2 (см. рис. 3). Здесь ℓ_1 – опорная кривая, ℓ_2 – ПВ-луч. P – фиксированная точка на опорной кривой ℓ_1. quad s^1 – длина дуги опорной кривой между точками P и P_1.

$$s^2 = |M_1 M_2|, \quad \tau = |M_1 M|.$$

Координата s^2 задает точки на ПВ-луче. $s^2 - \tau$ определяет отклонение по оси времени данной точки от ПВ-луча. Уравнение ПВ-луча:

$$\begin{cases} s^1 = \text{const}, \\ s^2 = \tau. \end{cases} \tag{4.1}$$

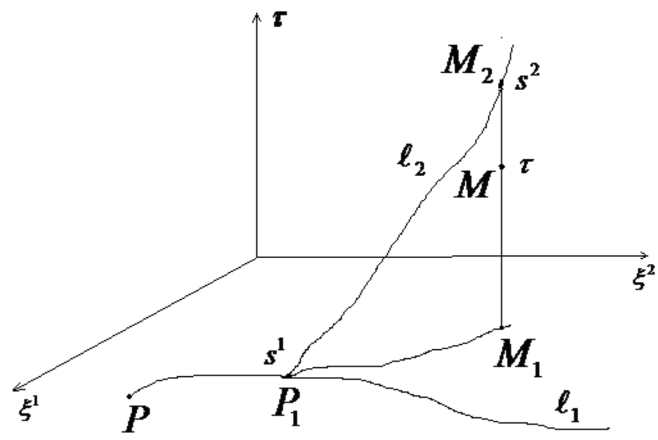

Рис. 3. Новые координаты.

Для дальнейших построений будет удобно ввести модифицированные координаты τ, η^1, η^2:

$$\eta^1 = s^1, \quad \eta^2 = s^2 - \tau. \tag{4.2}$$

Мы ищем формальное решение уравнения (2.2) при краевых условиях (2.4) и (2.5) типа волнового вала, то есть решение, сосредоточенное в окрестности некоторой поверхности $\eta^2 = 0$ и экспоненциально убывающее при удалении от нее. Указанное решение сосредоточено вблизи некоторой линии, каждая точка которой движется вдоль соответствующего луча. В уравнении (3.15) перейдем от координат τ, ξ^1, ξ^2 к координатам τ, η^1, η^2,

$$\theta(\tau, \xi^1, \xi^2) = \widetilde{\theta}(\tau, \eta^1, \eta^2), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} = \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \tau} + \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta^2}{\partial \tau}. \tag{4.4}$$

Уравнение Гамильтона-Якоби в новых переменных:

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \eta^2} + \mathbf{H}(\xi^1, \xi^2, \theta_{\xi^1}, \theta_{\xi^2}) = 0, \tag{4.5}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{g}\sqrt{k \cdot \tanh(kH)}, \tag{4.6}$$

$$k = \sqrt{\theta_{\xi^1}^2 + \theta_{\xi^2}^2}. \tag{4.7}$$

В гамильтониане $\mathbf{H}$ переходим к переменным τ, η^1, η^2:

$$\frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \tau} - \frac{\partial \widetilde{\theta}}{\partial \eta^2} + \widetilde{\mathbf{H}}(\eta^1, \eta^2, \widetilde{\theta}_{\eta^1}, \widetilde{\theta}_{\eta^2}) = 0. \tag{4.8}$$

Для удобства обозначений $\widetilde{}$ над θ и $\mathbf{H}$ писать не будем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} - \frac{\partial \theta}{\partial \eta^2} + \mathbf{H}(\eta^1, \eta^2, \theta_{\eta^1}, \theta_{\eta^2}) = 0. \tag{4.9}$$

Мы получили уравнение Гамильтона–Якоби (4.9) для функции $\theta(\tau, \eta^1, \eta^2)$. Отметим, что данное уравнение может быть получено и для формальных степенных рядов. Соответствующее построение проводится аналогично построениям для функций. Мы не будем их приводить из-за их громоздкости.

Ищем решение уравнения (4.9) θ в виде формального степенного ряда по η^2. Так как мы ищем решение, сосредоточенное в окрестности поверхности $\eta^2 = 0$, будем считать, что η^2 – мало.

$$\theta = \theta^{(0)} + \theta^{(1)} + \theta^{(2)} + \cdots , \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= \theta^0(\eta^1, \tau), \\ \theta^{(1)} &= \theta^1(\eta^1, \tau)\eta^2, \\ \theta^{(2)} &= \theta^2(\eta^1, \tau)(\eta^2)^2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \theta^{(\ell)} &= \theta^\ell(\eta^1, \tau)(\eta^2)^\ell. \end{aligned} \tag{4.11}$$

Чтобы решение экспоненциально убывало при удалении от линии $\eta^2 = 0$, достаточно, чтобы θ^0 и θ^1 были вещественными, а θ^2 имело положительную мнимую часть, то есть $\operatorname{Im}\theta^0 = 0$, $\operatorname{Im}\theta^1 = 0$, $\operatorname{Im}\theta^2 > 0$. Для произодных получим следующие формальные степенные ряды:

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta^1} = \frac{\partial \theta^{(0)}}{\partial \eta^1} + \frac{\partial \theta^1}{\partial \eta^1}\eta^2 + \frac{\partial \theta^2}{\partial \eta^1}(\eta^2)^2 + \cdots , \tag{4.12}$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \eta^2} = \theta^1(\eta^1, \tau) + 2\theta^2(\eta^1, \tau)\eta^2 + 3\theta^3(\eta^1, \tau)(\eta^2)^2 + \cdots . \tag{4.13}$$

Раскладываем $\mathbf{H}$ в ряд Тейлора по η^2 в окрестности точки $\eta^2 = 0$.

$$\mathbf{H} = \left(\mathbf{H}\left(\eta^1, \eta^2, \frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}, \frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}\right)\right)_{\eta^2=0} + \left(\frac{d\mathbf{H}}{d\eta^2}\right)_{\eta^2=0} \cdot \eta^2$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{d^2\mathbf{H}}{(d\eta^2)^2}\right)_{\eta^2=0} \cdot (\eta^2)^2 + \frac{1}{6}\left(\frac{d^3\mathbf{H}}{(d\eta^2)^3}\right)_{\eta^2=0} \cdot (\eta^2)^3 + \cdots . \tag{4.14}$$

Подставляем (4.10), (4.12), (4.13) и (4.14) в уравнение (4.9) и приравниваем коэффициенты при одинаковых степенях η^2. Коэффициент при $(\eta^2)^0$:

$$\frac{\partial\theta^0}{\partial\tau} - \theta^1 + \left(\mathbf{H}\left(\eta^1, \eta^2, \frac{\partial\theta}{\partial\eta^1}, \frac{\partial\theta}{\partial\eta^2}\right)\right)_{\eta^2=0} = 0. \tag{4.15}$$

Коэффициент при $(\eta^2)^1$:

$$\frac{\partial\theta^1}{\partial\tau} - 2\theta^2 + \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\eta^2}\right)_{\eta^2=0} + \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^1}} \cdot \frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\right)_{\eta^2=0} + \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\right)_{\eta^2=0} \cdot 2\theta^2 = 0. \tag{4.16}$$

Мнимая часть выражения (4.16) равна 0. Так как $\operatorname{Im}\theta^1 = 0$ и $\operatorname{Im}\theta^2 \neq 0$, то:

$$\operatorname{Im}\theta^2\left(-2 + 2\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\right)_{\eta^2=0}\right) = 0. \tag{4.17}$$

Следовательно,

$$\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\right)_{\eta^2=0} = 1. \tag{4.18}$$

Подставляем (4.18) в (4.16) и получаем:

$$\frac{\partial\theta^1}{\partial\tau} = -\left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\eta^2}\right)_{\eta^2=0} - \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^1}} \cdot \frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\right)_{\eta^2=0}. \tag{4.19}$$

Отсюда находим θ^1, подставляем его в (4.15) и находим θ^0.

Коэффициент при $(\eta^2)^2$:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\theta^2}{\partial\tau} - 3\theta^3 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\eta^2)^2}\right)_{\eta^2=0} + \left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\\
&+\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^2}}\right)_{\eta^2=0}\cdot 2\theta^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^1})^2}\right)_{\eta^2=0}\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\right)^2\\
&+2\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\theta^2 + \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^2}{\partial\eta^1}\\
&+\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^2})^2}\right)_{\eta^2=0}\cdot 2(\theta^2)^2 + \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\right)_{\eta^2=0}\cdot 3\theta^3 = 0. \qquad (4.20)
\end{aligned}$$

В силу (4.18) слагаемые с θ^3 сокращаются. На луче $\eta^1 = s^1 = \mathrm{const}$, то есть $\frac{ds^1}{d\tau} = \frac{d\eta^1}{d\tau} = 0 = \left(\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}$ Уравнение (4.20) преобразуется к виду:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\theta^2}{\partial\tau} = &-2\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^2})^2}\right)_{\eta^2=0}\cdot(\theta^2)^2 - 2\Bigg(\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\\
&+\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\Bigg)\cdot\theta^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\eta^2)^2}\right)_{\eta^2=0}\\
&-\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^1})^2}\right)_{\eta^2=0}\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\right)^2. \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

Итак, мы получили уравнение Риккати:

$$\frac{\partial\theta^2}{\partial\tau} = A\cdot(\theta^2)^2 + 2B\cdot\theta^2 + C. \qquad (4.22)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
A &= -2\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^2})^2}\right)_{\eta^2=0},\\
B &= -\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^2}}\right)_{\eta^2=0} - \left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}, \qquad (4.23)\\
C &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\eta^2)^2}\right)_{\eta^2=0} - \left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^1}}\right)_{\eta^2=0}\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^1})^2}\right)_{\eta^2=0}\left(\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\right)^2.
\end{aligned}$$

Для нахождения θ^2 воспользуемся классическим приемом (см., например, [6]). Пусть Z и Y – решения системы:

$$\begin{cases} \frac{dZ}{d\tau} = BZ + CY, \\ \frac{dY}{d\tau} = -AZ - BY. \end{cases} \tag{4.24}$$

Тогда $\theta^2 = \frac{Z}{Y}$ удовлетворяет уравнению (4.22). Проверим это.

$$\begin{aligned} \frac{d\theta^2}{d\tau} = \frac{dZ}{d\tau}Y^{-1} - \frac{dY}{d\tau}Y^{-2}Z = (BZ + CY)Y^{-1} - (-AZ - BY)Y^{-2}Z \\ = BZY^{-1} + C + AZ^2Y^{-2} + BY^{-1}Z = A(\theta^2)^2 + 2B\theta^2 + C. \end{aligned} \tag{4.25}$$

Потребуем, чтобы Z и Y удовлетворяли соотношению:

$$Z\overline{Y} - Y\overline{Z} = iI. \tag{4.26}$$

Условие (4.26) обеспечивает положительную определенность $\operatorname{Im}\theta^2$:

$$\operatorname{Im}\theta^2 = \operatorname{Im}\left(\frac{Z}{Y}\right) = \frac{1}{2i}\left(\frac{Z}{Y} - \frac{\overline{Z}}{\overline{Y}}\right) = \frac{1}{2i}\frac{Z\overline{Y} - Y\overline{Z}}{Y\overline{Y}} = \frac{1}{2|Y^2|} > 0. \tag{4.27}$$

Покажем, что коэффициенты при $(\eta^2)^n$, $n \geqslant 3$ не содержат нелинейных по θ^n членов.

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}\big(\eta^1, \eta^2, \theta_{\eta^1}, \theta_{\eta^2}\big) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^n\mathbf{H}}{(d\eta^2)^n}\bigg|_{\eta^2=0} (\eta^2)^n, \tag{4.28}$$

Как было показано ранее, уравнение Гамильтона–Якоби в переменных (τ, η^1, η^2) имеет вид:

$$\theta_\tau - \theta_{\eta^2} + \mathbf{H}\big(\eta^1, \eta^2, \theta_{\eta^1}, \theta_{\eta^2}\big) = 0, \tag{4.29}$$

θ представляет из себя ряд по η^2:

$$\theta = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k(\eta^1, \tau)(\eta^2)^k, \tag{4.30}$$

Производные от θ по η^1 и η^2:

$$\theta_{\eta^1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\partial\theta^k}{\partial\eta^1}(\eta^2)^k, \tag{4.31}$$

$$\theta_{\eta^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^{k+1}(k+1)(\eta^2)^k, \tag{4.32}$$

Выражение для $\frac{d\mathbf{H}}{d\eta^2}$:

$$\frac{d\mathbf{H}}{d\eta^2} = \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^1}}\frac{\partial\theta_{\eta^1}}{\partial\eta^2} + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\frac{\partial\theta_{\eta^2}}{\partial\eta^2}. \tag{4.33}$$

Рассмотрим члены, содержащие θ^n в уравнении, получающемся приравниванием коэффициентов при $(\eta^2)^n$ в уравнении (4.29). В этом уравнении дважды встретится θ^{n+1}: одно из второго слагаемого (с учетом (4.32), это $-(n+1)\theta^{n+1}(\eta^2)^n$), второе – из разложения $\mathbf{H}$, то есть из $\frac{d^n\mathbf{H}}{(d\eta^2)^n}\Big|_{\eta^2=0}$, где оно получается, когда в последнем слагаемом в (4.33) дифференцируется $(n-1)$ раз второй сомножитель, то есть получается:

$$\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\frac{\partial^n\theta_{\eta^2}}{(\partial\eta^2)^n}\bigg|_{\eta^2=0} = (n+1)!\theta^{n+1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\bigg|_{\eta^2=0}. \tag{4.34}$$

Значит получается (пользуемся формулой (4.18)):

$$\theta^{n+1}(n+1)\bigg(-1 + \frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^2}}\bigg|_{\eta^2=0}\bigg) = 0. \tag{4.35}$$

Заметим, что по (4.30), (4.31), (4.32):

$$\frac{\partial^j\theta_{\eta^2}}{(\partial\eta^2)^j}\bigg|_{\eta^2=0} = (j+1)!\theta^{j+1}, \tag{4.36}$$

$$\frac{\partial^j\theta_{\eta^1}}{(\partial\eta^2)^j}\bigg|_{\eta^2=0} = j!\frac{\partial\theta^j}{\partial\eta^1}. \tag{4.37}$$

Величины θ^j определяются рекуррентно. Пусть известны все θ^j, $j<n$. Из приравнивания коэффициентов перед $(\eta^2)^n$ определяется θ^n. В выражении для $\frac{d^n\mathbf{H}}{(d\eta^2)^n}\Big|_{\eta^2=0}$ θ^n появляется:

• из последнего слагаемого в (4.33), когда $(n-2)$ раза дифференцируется последний сомножитель и 1 раз предыдущий, т.е. будет:

$$\begin{aligned}(n-1)\bigg[n!\theta^n\cdot 2\theta^2\frac{\partial^2\mathbf{H}}{(\partial\theta_{\eta^2})^2}\bigg|_{\eta^2=0} \\ + n!\theta^n\frac{\partial\theta^1}{\partial\eta^1}\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\theta_{\eta^1}\partial\theta_{\eta^2}}\bigg|_{\eta^2=0} + n!\theta^n\bigg(\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial\eta^2\partial\theta_{\eta^2}}\bigg)\bigg|_{\eta^2=0}\bigg],\end{aligned} \tag{4.38}$$

• от $(n-1)$ дифференцирования второго сомножителя во втором слагаемом в (4.33) и от $(n-1)$ дифференцирования $\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \eta^2}$:

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\eta^1}}\bigg|_{\eta^2=0} \cdot n! \frac{\partial \theta^n}{\partial \eta^1} + n!\theta^n \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \eta^2 \partial \theta_{\eta^2}}\bigg|_{\eta^2=0} \cdot (n-1) \right). \tag{4.39}$$

На луче $\eta^1 = s^1 = \mathrm{const}$, следовательно, $\frac{ds^1}{d\tau} = \frac{d\eta^1}{d\tau} = 0 = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\eta^1}}\Big|_{\eta^2=0}$. Значит

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\eta^1}}\bigg|_{\eta^2=0} \cdot n! \frac{\partial \theta^n}{\partial \eta^1} = 0. \tag{4.40}$$

Остальные слагаемые содержат лишь θ^j при $j < n$, то есть известные функции.

Итак, коэффициент при $(\eta^2)^n$:

$$\frac{\partial \theta^n}{\partial \tau} + (n-1) \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{(\partial \theta_{\eta^2})^2} \cdot 2\theta^2 + \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \theta_{\eta^1} \partial \theta_{\eta^2}}\bigg|_{\eta^2=0} \cdot \frac{\partial \theta^1}{\partial \eta^1} \right) \theta^n \\ + 2 \left(\frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial \eta^2 \partial \theta_{\eta^2}} \right)\bigg|_{\eta^2=0} \cdot \theta^n = \Xi_n. \tag{4.41}$$

Здесь в Ξ_n собраны все члены с θ^j, $j < n$. При $n > 2$ это линейное уравнение. Решив уравнение (4.41), мы найдем θ^n. Таким образом, все коэффициенты формального степенного ряда для θ определены. Ряд для θ построен.

Оценим размер области, где волновой пакет существенно отличен от 0. Напомним, что волновой пакет Φ имеет вид (3.3):

$$\Phi \sim e^{i \frac{\theta(\tau, \xi^1, \xi^2)}{\varepsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j(\tau, \xi^1, \xi^2, z)(i\varepsilon)^j, \tag{4.42}$$

Поскольку $\operatorname{Im} \theta^0 = \operatorname{Im} \theta^1 = 0$, а $\operatorname{Im} \theta^2 > 0$, то:

$$\operatorname{Im} \theta = (\eta^2)^2 (\operatorname{Im} \theta^2)(1 + O(\eta^2)). \tag{4.43}$$

Следовательно,

$$\left| e^{i\frac{\theta}{\varepsilon}} \sum_{j=0}^{\infty} \Phi_j (i\varepsilon)^j \right| = O(1) e^{-\frac{1}{\varepsilon} \operatorname{Im} \theta} = O(1) e^{-\frac{\operatorname{Im} \theta^2}{\varepsilon} (\eta^2)^2 (1 + O(\eta^2))}. \tag{4.44}$$

Размер области определяется величиной η^2, при котором Φ спадает до заданного значения δ:

$$e^{-\frac{\operatorname{Im}\theta^2}{\varepsilon}(\eta^2)^2(1+O(\eta^2))} = \delta, \tag{4.45}$$

поэтому $e^{-\frac{\operatorname{Im}\theta^2\cdot(\eta^2)^2}{\varepsilon}} \sim \delta$. Отсюда нетрудно увидеть, что

$$\frac{(\eta^2)^2}{\varepsilon} = \mathrm{const} = -\frac{\ln\delta}{\operatorname{Im}\theta^2}. \tag{4.46}$$

Таким образом, $\eta^2 \sim \sqrt{\varepsilon}$. Координаты $(\tau,\ \eta^1,\ \eta^2)$ получаются из $(\tau,\ \xi^1,\ \xi^2)$ линейным преобразованием, поэтому в координатах (τ,ξ^1,ξ^2) размер области имеет тот же порядок. Итак, размер области, где волновой пакет существенно отличен от 0, имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$.

§5. Построение Φ_j

Построение Φ_0. Все Φ_j ищем в виде формальных степенных рядов по η^2. Рассмотрим нулевой порядок. Задача для Φ_0 имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Phi_0}{\partial z^2} - k^2\Phi_0 = 0, \\ \left.\frac{\partial\Phi_0}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0. \end{cases} \tag{5.1}$$

Здесь k^2 – это формальный степенной ряд по η^2 (формула (3.7)).

Естественно, что для Φ_0 имеет место формула:

$$\Phi_0 = A_0(\tau,\eta^1,\eta^2)\cdot\cosh(k(z+H)). \tag{5.2}$$

Формальный степенной ряд A_0 будем искать из условия разрешимости задачи для Φ_1. Нам потребуется известная теорема о разрешимости неоднородной задачи Штурма–Лиувилля. Теорема сохраняет свой вид в случае, если решение ищется в случае формального степенного ряда.

Теорема 1. *Рассмотрим однородную задачу Штурма-Лиувилля:*

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}y = (p(x)y')' - q(x)y = 0, \\ \ell_0 y = (\alpha_0 y + \alpha_1 y')\Big|_{x=x_0} = 0, \\ \ell_1 y = (\beta_0 y + \beta_1 y')\Big|_{x=x_1} = 0; \end{cases} \tag{5.3}$$

$$p(x) > 0, \quad \operatorname{Im} q = 0. \tag{5.4}$$

α_j, β_j, $j=0,1$ – вещественные числа. $p(x)$, $q(x)$ – формальные степенные ряды (ф.с.р.). Пусть существует решение в виде ф.с.р. $y_0 \neq 0$. Тогда необходимое и достаточное условие существования решения в виде ф.с.р неоднородной задачи Штурма–Лиувилля

$$\begin{cases} \boldsymbol{L}y = -F, \\ \ell_0 y = A, \\ \ell_1 y = B. \end{cases} \tag{5.5}$$

таково:

$$p(x_1)\frac{B}{\beta_1}y_0\Big|_{x=x_1} - p(x_0)\frac{A}{\alpha_1}y_0\Big|_{x=x_0} = -\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x)y_0(x)\,dx. \tag{5.6}$$

Здесь $F(x)$, A, B – ф.с.р.

Задача для Φ_1:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} - k^2\Phi_1 + 2\nabla'\theta\cdot\nabla'\Phi_0 + \triangle'\theta\cdot\Phi_0 = 0, \\ \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} + \big(\nabla'H, \nabla'\theta\big)\Phi_0\right)\Big|_{z=-H} = 0, \\ \left(g\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \omega^2\Phi_1 + \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\Phi_0 + 2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tau}\right)\Big|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{5.7}$$

Условие (5.6) принимает вид:

$$-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\Phi_0 + 2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tau}\right)\Big|_{z=0}\cdot\Phi_0\Big|_{z=0} + \big(\nabla'H, \nabla'\theta\big)\Phi_0\cdot\Phi_0\Big|_{z=-H}$$
$$= -\int\limits_{-H}^{0}(2\nabla'\theta\cdot\nabla'\Phi_0 + \triangle'\theta\cdot\Phi_0)\Phi_0\,dz. \tag{5.8}$$

$$-\frac{1}{g}\left(\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\Phi_0 + 2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tau}\right)\Big|_{z=0}\cdot\Phi_0\Big|_{z=0} = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{g}\left(-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\Phi_0^2\right)\right)\Big|_{z=0}. \tag{5.9}$$

Учитывая (5.9), формулу (5.8) можно привести к виду:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\left(\frac{1}{g}\left(-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\Phi_0^2\right)\right)\Big|_{z=0} + \left(\nabla', \int\limits_{-H}^{0}\Phi_0^2\,dz\cdot\nabla'\theta\right) = 0. \tag{5.10}$$

Запишем это уравнение в более удобной форме:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\langle\varepsilon\rangle + \frac{\partial}{\partial\xi^1}\Big(\langle\varepsilon\rangle\upsilon_{\mathrm{gr}_1}\Big) + \frac{\partial}{\partial\xi^2}\Big(\langle\varepsilon\rangle\upsilon_{\mathrm{gr}_2}\Big) = 0, \tag{5.11}$$

где

$$\begin{aligned} \langle\varepsilon\rangle &= \frac{1}{g}\Big(-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\Big)\Phi_0^2, \\ \upsilon_{\mathrm{gr}_1}\langle\varepsilon\rangle &= \int\limits_{-H}^{0}\Phi_0^2\,dz\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\xi^1}, \\ \upsilon_{\mathrm{gr}_2}\langle\varepsilon\rangle &= \int\limits_{-H}^{0}\Phi_0^2\,dz\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\xi^2}. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Введем вектор $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \Big(\langle\varepsilon\rangle, \upsilon_{\mathrm{gr}_1}\langle\varepsilon\rangle, \upsilon_{\mathrm{gr}_2}\langle\varepsilon\rangle\Big). \tag{5.13}$$

Здесь υ_{gr} – групповая скорость. С учетом вышесказанного, уравнение (5.10) примет вид:

$$\operatorname{div}\vec{A} = 0. \tag{5.14}$$

Введем некоторые понятия, необходимые для формулировки теоремы о неявной функции для формальных степенных рядов.

Предварительные сведения. *Рассмотрим $r+s$ формальных степенных рядов.*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_\alpha^j(x)y^\alpha = a^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{5.15}$$

$$\sum_{|\alpha|=1}^{\infty} A_\alpha^j(x)y^\alpha = b^{(j-r)}, \quad j = r+1, r+2, \ldots, r+s, \tag{5.16}$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s), \tag{5.17}$$

$$|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_s, \quad \alpha_i \in \mathbb{Z}_+. \tag{5.18}$$

Заданные коэффициенты $A_\alpha^j \in C^\infty_{\mathrm{loc}}$ в некоторой области $\Omega \subset \mathbb{R}^r$.

Переменные $x = (x^1, x^2, \ldots, x^r)$ будем называть конечными переменными, $y = (y^1, y^2, \ldots, y^s)$ – малыми переменными.

Пусть x и y – формальные степенные ряды:

$$x^{(j)} = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} B^j_\alpha(a) b^\alpha, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \tag{5.19}$$

$$y^{(j-r)} = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} B^j_\alpha(a) b^\alpha, \quad j = r+1, r+2, \ldots, r+s. \tag{5.20}$$

$B^j_\alpha(a) \in C^\infty(\Omega_1)$ ($\Omega_1 \subset \mathbb{R}^r$) *– функции, причем область значений* $B^j_{(0,0,\ldots,0)}(a) \subset \Omega$. $a = (a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(r)})$ *– конечные переменные,* $b = (b^{(1)}, b^{(2)}, \ldots, b^{(s)})$ *– малые переменные.*

Тогда x^j и y^j, даваемые формулами (5.19), (5.20) *можно подставлять в ряды* (5.15), (5.16). *При подстановке формальных степенных рядов для x^j и y^j функции $A^j_\alpha(x)$ заменяются рядами Тейлора–Маклорена. Сходимость не предполагается.*

Определение. *Обращение рядов* (5.15), (5.16) *– это нахождение таких рядов* (5.19), (5.20), *что при их подстановке в* (5.15), (5.16) *получится:*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A^j_\alpha(x) y^\alpha = a^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r,$$

$$\sum_{|\alpha|=1}^{\infty} A^j_\alpha(x) y^\alpha = b^{(j-r)}, \quad j = r+1, r+2, \ldots, r+s.$$

Теорема 2. *Рассмотрим ряды:*

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A^j_\alpha(x) y^\alpha = a^{(j)}, \quad j = 1, 2, \ldots, r\ , \tag{5.21}$$

$$\sum_{|\alpha|=1}^{\infty} A^j_\alpha(x) y^\alpha = b^{(j-r)}, \quad j = r+1, \quad r+2, \ldots, r+s, \tag{5.22}$$

$$A^j_\alpha \in C^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega), \quad \Omega \subset \mathbb{R}^r.$$

Пусть определитель

$$J = \frac{D(A^1_{(0,\ldots,0)}(x), \ldots, A^r_{(0,\ldots,0)}, A^{r+1}_{(1,0,\ldots,0)} \cdot y^{(1)}, \ldots, A^{r+s}_{(0,\ldots,0,1)} \cdot y^{(s)})}{D(x^{(1)}, \ldots, x^{(r)}, y^{(1)}, \ldots, y^{(s)})}\Bigg|_{x^{(j)}=x^{(j)}_0,\, y^{(j)}=0} \neq 0, \tag{5.23}$$

где

$$x_0^{(j)} = x^{(j)}\Big|_{b^{(1)}=0, b^{(2)}=0, \ldots.., b^{(s)}=0}. \tag{5.24}$$

Тогда можно обратить ряды (5.21) *и* (5.22).

От координат τ, ξ^1, ξ^2 перейдем к координатам s, a^1, a^2, которые вводятся следующим образом (см. рис. 4):

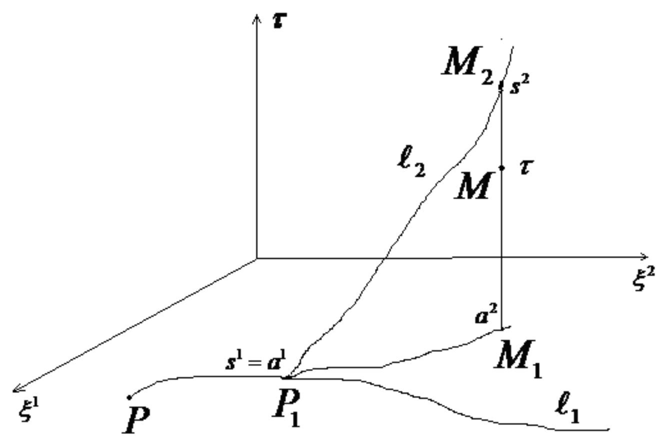

Рис. 4. Новые координаты.

a^1 – длина дуги опорной кривой между точками P и P_1; a^2 – длина дуги между точками P_1 и M_1 (длина проекции ПВ луча на плоскость $\tau = 0$).

Для того, чтобы перейти к новым координатам s, a^1, a^2 нужно определить ПВ луч. Его можно найти из решения канонической системы уравнений:

$$\frac{d\tau}{ds} = 1, \quad \frac{d\xi^i}{ds} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\xi^i}}, \quad \frac{d\theta_\tau}{ds} = 0,$$
$$\frac{d\theta_{\xi^i}}{ds} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \xi^i}, \quad \frac{d\theta}{ds} = -\mathbf{H} + \theta_{\xi^i}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \theta_{\xi^i}}. \tag{5.25}$$

Первые два из равенств, входящих в (5.25), приводят к соотношению:

$$\frac{d\xi^i}{d\tau} = \frac{d\omega}{dk_i} = v_{\mathrm{gr}_i}. \tag{5.26}$$

Вектор $v_{\mathrm{gr}} = (v_{\mathrm{gr}_1}, v_{\mathrm{gr}_2})$ с компонентами $\frac{\partial\omega}{\partial k_i}$ – это по определению вектор групповой скорости.

Начальные данные для системы (5.25) в виде ф.с.р. по a^2 задаются на поверхности $\tau = 0$:

$$\xi^i\Big|_{\tau=0} = \xi^i(a^1, a^2), \quad \theta_{\xi^i}\Big|_{\tau=0} = \theta_{\xi^i}(a^1, a^2), \quad \theta\Big|_{\tau=0} = \theta(a^1, a^2). \tag{5.27}$$

Решение $\xi^i = \xi^i(s, a^1, a^2)$ этой системы задает ПВ луч. Это ф.с.р. по a^2 с коэффициентами, зависящими от s и a^1. Якобиан перехода имеет вид:

$$\frac{D(\tau, \xi^1, \xi^2)}{D(s, a^1, a^2)} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial\xi^1}{\partial s} & \frac{\partial\xi^1}{\partial a^1} & \frac{\partial\xi^1}{\partial a^2} \\ \frac{\partial\xi^2}{\partial s} & \frac{\partial\xi^2}{\partial a^1} & \frac{\partial\xi^2}{\partial a^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\xi^1}{\partial a^1} & \frac{\partial\xi^1}{\partial a^2} \\ \frac{\partial\xi^2}{\partial a^1} & \frac{\partial\xi^2}{\partial a^2} \end{vmatrix} = \frac{D(\xi^1, \xi^2)}{D(a^1, a^2)}. \tag{5.28}$$

При $\tau = 0$ определитель $\frac{D(\xi^1,\xi^2)}{D(a^1,a^2)} \neq 0$. По непрерывности $\frac{D(\xi^1,\xi^2)}{D(a^1,a^2)} \neq 0$ в некоторой окрестности плоскости $\tau = 0$. В этой области мы строим решение (здесь ПВ лучи не могут пересекаться, отсутствуют каустики).

Зная ПВ луч, переходим от координат τ, ξ^1, ξ^2 к координатам s, a^1, a^2. Таким образом, выражение $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ содержит ф.с.р. по η^2 и ф.с.р. по a^2.

ξ^i – это ф.с.р. по a^2. η^i – функция от ξ^i. Любая функция от ф.с.р. – это ф.с.р. ибо при подстановке ф.с.р. в функцию функция заменяется рядом Тейлора–Маклорена. Следовательно, η^i – это ф.с.р. по a^2.

Теперь перейдем от координат (s, a^1, a^2) к координатам (τ, η^1, η^2). В некоторой окрестности $\tau = 0$ координаты (τ, η^1, η^2) однозначно строятся по (s, a^1, a^2) в соответствии с процедурой, описанной в §4 (см. рис. 3). $\frac{D(\eta^1,\eta^2)}{D(a^1,a^2)} \neq 0$ (это следует из условия существования поля ПВ лучей в окрестности плоскости $\tau = 0$). Нам нужно по заданным ф.с.р. η^1, η^2 (как рядам по a^2 с коэффициентами, зависящими от τ, a^1) перейти к a^1, a^2 как рядам по η^2 с коэффициентами, зависящими от τ, a^1. Возможность сделать этот переход обусловлена Теоремой 2.

Итак, мы перешли в уравнении $\operatorname{div}\vec{A} = 0$ к новым координатам (τ, η^1, η^2). Посмотрим более детально его вид.

Касательный вектор к произвольной кривой

$$\begin{cases} \tau = \tau(s), \\ \xi^1 = \xi^1(s), \\ \xi^2 = \xi^2(s). \end{cases} \tag{5.29}$$

коллинеарен $\left(\frac{d\tau}{ds}, \frac{d\xi^1}{ds}, \frac{d\xi^2}{ds}\right)$. В случае ПВ-луча:

$$\begin{cases} \frac{d\tau}{ds} = 1, \\ \frac{d\xi^i}{ds} = \upsilon_{\mathrm{gr}_i}. \end{cases} \tag{5.30}$$

Касательный вектор к ПВ-лучу имеет вид: $\big(1, \upsilon_{\mathrm{gr}_1}, \upsilon_{\mathrm{gr}_2}\big)$. Видим, что касательный вектор коллинеарен вектору $\vec{A} = \big(\langle\varepsilon\rangle, \upsilon_{\mathrm{gr}_1}\langle\varepsilon\rangle, \upsilon_{\mathrm{gr}_2}\langle\varepsilon\rangle\big)$. На ПВ-луче:

$$\begin{cases} \eta^1 = \mathrm{const}, \\ \eta^2 = 0. \end{cases} \tag{5.31}$$

В системе координат (τ, η^1, η^2) вектор $\vec{A}$ параллелен координатной линии τ. Следовательно, в этой системе координат $\vec{A}$ будет иметь компоненты $\langle\varepsilon\rangle, 0, 0$.

Дивергенция вектора в декартовой системе координат $x^1, x^2, ..., x^m$, имеющая классическое выражение $\mathrm{div}\vec{A} = \sum\limits_{i=1}^{m} \frac{\partial A^j}{\partial x^i}$, имеет вид:

$$\mathrm{div}\vec{A} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\big(A^{i'} J\big), \tag{5.32}$$

где $A^{i'}$ – компоненты вектора $\vec{A}$ в системе координат $x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{m'}$, а J – якобиан:

$$J = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^m)}{D(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{m'})}. \tag{5.33}$$

С учетом (5.32), равенство (5.14) можно записать в виде:

$$\frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial\tau}\big(\langle\varepsilon\rangle J\big) = 0, \quad J = \frac{D(\tau, \xi^1, \xi^2)}{D(\tau, \eta^1, \eta^2)}. \tag{5.34}$$

Следовательно,

$$\langle\varepsilon\rangle J = \langle\varepsilon\rangle J\big|_{\tau=0}, \tag{5.35}$$

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{\langle\varepsilon\rangle J\big|_{\tau=0}}{J}. \tag{5.36}$$

С другой стороны:

$$\langle\varepsilon\rangle = \frac{1}{g}\left(-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\Phi_0^2\right)\Big|_{z=0}. \tag{5.37}$$

Из (5.35) и (5.36) находим $\Phi_0^2\Big|_{z=0}$:

$$\Phi_0^2\Big|_{z=0} = \frac{\frac{1}{J}\Big(\langle\varepsilon\rangle J\Big)\Big|_{\tau=0}}{\frac{1}{g}\Big(-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\Big)\Big|_{z=0}}. \tag{5.38}$$

Согласно формуле (5.2):

$$\Phi_0\Big|_{z=0} = A_0\cosh(kH). \tag{5.39}$$

В силу формулы (5.38), получаем:

$$A_0\cosh(kH) = \frac{\sqrt{g\big(\langle\varepsilon\rangle J\big)\big|_{\tau=0}}}{\sqrt{-J\cdot\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\big|_{z=0}}} = \psi_0(\eta^1,\eta^2)\cdot\sqrt{\frac{1}{J}}, \tag{5.40}$$

где

$$\psi_0(\eta^1,\eta^2) = \frac{\sqrt{g\big(\langle\varepsilon\rangle J\big)\big|_{\tau=0}}}{\sqrt{-\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\big|_{z=0}}}. \tag{5.41}$$

Итак,

$$A_0(\tau,\eta^1,\eta^2) = \frac{\psi_0(\eta^1,\eta^2)}{\sqrt{J}}\cdot\frac{1}{\cosh(kH)}. \tag{5.42}$$

Следовательно,

$$\Phi_0 = A_0\cosh(k(z+H)) = \frac{\psi_0(\eta^1,\eta^2)}{\sqrt{J}}\cdot\frac{\cosh(k(z+H))}{\cosh(kH)}. \tag{5.43}$$

Построение Φ_1. Φ_1 является решением следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} - k^2\Phi_1 = -2\nabla'\theta\nabla'\Phi_0 - \triangle'\theta\cdot\Phi_0, \\ \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial z} - \frac{\omega^2}{g}\Phi_1\right)\Big|_{z=0} = -\frac{1}{g}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\Phi_0\right)\Big|_{z=0}, \\ \frac{\partial\Phi_1}{\partial z}\Big|_{z=-H} = -\nabla' H\nabla'\theta\cdot\Phi_0\Big|_{z=-H}. \end{cases} \tag{5.44}$$

Здесь

$$\Phi_0 = A_0(\tau,\eta^1,\eta^2)\cosh(k(z+H)). \tag{5.45}$$

Пусть

$$B_0 = -2\nabla'\theta\cdot\nabla' A_0 - \triangle'\theta\cdot A_0. \tag{5.46}$$

Тогда

$$\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial z^2} - k^2\Phi_1 = B_0(\tau,\eta^1,\eta^2)\cosh(k(z+H)). \tag{5.47}$$

Частное решение неоднородного уравнения (5.47) имеет вид:

$$\widetilde{\Phi_1} = (z+H)\frac{B_0}{2k}\sinh(k(z+H)). \tag{5.48}$$

Общее решение неоднородного уравнения (5.47):

$$\Phi_1 = \frac{1}{2}B_0(z+H)\frac{\sinh(k(z+H))}{k} + A_1(\tau,\eta^1,\eta^2)A_0\cosh(k(z+H)) \\ = \widetilde{\Phi_1} + A_1(\tau,\eta^1,\eta^2)\Phi_0. \tag{5.49}$$

Для того, чтобы найти A_1, а значит и Φ_1, используем условие разрешимости для Φ_2. Процедура построения A_1 сходна с построениями для A_0.

Для нахождения Φ_2 пользуемся условием разрешимости для Φ_3. И так далее. Шаги для $j \geqslant 2$ осуществляются аналогично.

Построение Φ_j. Φ_{j+1} является решением следующей задачи Штурма–Лиувилля:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2\Phi_{j+1}}{\partial z^2} - k^2\Phi_{j+1} + 2\nabla'\theta\cdot\nabla'\Phi_j + \triangle'\theta\cdot\Phi_j - \triangle'\Phi_{j-1} = 0, \\ \left(\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial z} + \nabla' H\cdot\nabla'\theta\cdot\Phi_j - \nabla' H\cdot\nabla'\Phi_{j-1}\right)\Big|_{z=-H} = 0, \\ \left(g\frac{\partial\Phi_{j+1}}{\partial z} - \omega^2\Phi_{j+1} + 2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\Phi_j}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\Phi_j - \frac{\partial^2\Phi_{j-1}}{\partial\tau^2}\right)\Big|_{z=0} = 0. \end{cases} \tag{5.50}$$

Воспользуемся теоремой 1 и получим условие разрешимости для системы (5.50):

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi_0}{g}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\cdot\frac{\partial\Phi_j}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\cdot\Phi_j - \frac{\partial^2\Phi_{j-1}}{\partial\tau^2}\right)\Big|_{z=0} \\ + \Phi_0\big(\nabla' H\cdot\nabla'\theta\cdot\Phi_j - \nabla' H\cdot\nabla'\Phi_{j-1}\big)\Big|_{z=-H} \\ = -\int\limits_{-H}^{0}\big(2\nabla'\theta\nabla'\Phi_j + \triangle'\theta\cdot\Phi_j - \triangle'\Phi_{j-1}\big)\Phi_0\,dz. \end{aligned} \tag{5.51}$$

Φ_j имеет вид:

$$\Phi_j = \widetilde{\Phi_j} + A_j(\tau,\eta^1,\eta^2)\Phi_0(\tau,\eta^1,\eta^2,z). \tag{5.52}$$

Подставим (5.52) в (5.51):

$$\begin{aligned} -\frac{\Phi_0}{g}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\widetilde{\Phi_j}}{\partial\tau} + \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\widetilde{\Phi_j}\right)\Big|_{z=0} + \Phi_0\big(\nabla' H\nabla'\theta\cdot\widetilde{\Phi_j}\big)\Big|_{z=-H} \\ -\frac{\Phi_0}{g}\left(2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial A_j}{\partial\tau}\cdot\Phi_0 + \underline{2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}A_j\frac{\partial\Phi_0}{\partial\tau}} + \underline{\frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\cdot A_j\Phi_0} - \frac{\partial^2\Phi_{j-1}}{\partial\tau^2}\right)\Big|_{z=0} \\ + \Phi_0\big(\underline{\nabla' H\cdot\nabla'\theta\cdot A_j\Phi_0} - \nabla' H\cdot\nabla'\Phi_{j-1}\big)\Big|_{z=-H} \\ = -\int\limits_{-H}^{0}\big(2\nabla'\theta\cdot\nabla'\widetilde{\Phi_j} + \triangle'\theta\cdot\widetilde{\Phi_j}\big)\Phi_0\,dz - \int\limits_{-H}^{0}\big(2\nabla'\theta\nabla' A_j\cdot\Phi_0 \\ + \underline{2\nabla'\theta\nabla'\Phi_0\cdot A_j} + \underline{\triangle'\theta\cdot A_j\Phi_0} - \triangle'\Phi_{j-1}\big)\Phi_0\,dz. \end{aligned} \tag{5.53}$$

Подчеркнутые слагаемые сокращаются в силу формулы (5.8). Учитывая, что $\omega = -\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$, $\langle\varepsilon\rangle = \frac{\omega^2}{g}\Phi_0^2\big|_{z=0}$, получаем:

$$-\frac{\Phi_0}{g}\cdot 2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial A_j}{\partial\tau}\cdot\Phi_0\bigg|_{z=0} = \frac{2}{\omega}\langle\varepsilon\rangle\frac{\partial A_j}{\partial\tau}. \tag{5.54}$$

В силу того, что: $\vec{k} = \nabla'\theta = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\xi^1}, \frac{\partial\theta}{\partial\xi^2}\right)$ и $\langle\vec{S}\rangle = \omega\int\limits_{-H}^{0}\Phi_0^2\,dz\cdot\vec{k}$, получаем:

$$-\int\limits_{-H}^{0} 2\nabla'\theta\nabla' A_j\cdot\Phi_0^2\,dz = -\frac{2}{\omega}\nabla' A_j\cdot\langle\vec{S}\rangle. \tag{5.55}$$

Итак, (5.51) перепишется в виде:

$$\begin{aligned}\frac{2}{\omega}\left(\frac{\partial A_j}{\partial\tau}\langle\varepsilon\rangle + \nabla' A_j\cdot\langle\vec{S}\rangle\right) + \int\limits_{-H}^{0}\big(2\nabla'\theta\cdot\nabla'\widetilde{\Phi_j} + \triangle'\theta\cdot\widetilde{\Phi_j} - \triangle'\Phi_{j-1}\big)\Phi_0\,dz \\ + \left(-2\frac{\partial\theta}{\partial\tau}\frac{\partial\widetilde{\Phi_j}}{\partial\tau} - \frac{\partial^2\theta}{\partial\tau^2}\widetilde{\Phi_j}\right)\frac{\Phi_0}{g}\bigg|_{z=0} + \frac{\partial^2\Phi_{j-1}}{\partial\tau^2}\cdot\frac{\Phi_0}{g}\bigg|_{z=0} \\ - \Phi_0\nabla' H\nabla'\Phi_{j-1}\bigg|_{z=-H} + \Phi_0\nabla' H\nabla'\theta\cdot\widetilde{\Phi_j}\bigg|_{z=-H} = 0.\end{aligned} \tag{5.56}$$

Или, в более краткой записи:

$$\frac{2}{\omega}\left(\frac{\partial A_j}{\partial\tau}\langle\varepsilon\rangle + \nabla' A_j\cdot\langle\vec{S}\rangle\right) + \psi_j = 0, \tag{5.57}$$

где ψ_j есть сумма всех оставшихся членов.
Введем вектор $\vec{A}$:

$$\vec{A} = \big(A_j\langle\varepsilon\rangle, A_j\langle S_1\rangle, A_j\langle S_2\rangle\big). \tag{5.58}$$

Вектор $\vec{A}$ параллелен ПВ-лучам, поэтому при замене координат $(\tau,\xi^1,\xi^2)\mapsto(\tau,\eta^1,\eta^2)$ вектор $\vec{A}$ будет иметь компоненты $\langle A_j\rangle, 0, 0$. При переходе $x^1, x^2, \ldots, x^m \mapsto x^{1'}, x^{2'}, \ldots x^{m'}$ $\operatorname{div}\vec{A}$ имеет вид:

$$\operatorname{div}\vec{A} = \frac{1}{J}\frac{\partial}{\partial x^{i'}}\big(A^{i'}J\big), \tag{5.59}$$

где J – якобиан:

$$J = \frac{D(x^1, x^2, \ldots, x^m)}{D(x^{1'}, x^{2'}, \ldots, x^{m'})}. \tag{5.60}$$

$$\frac{2}{\omega}\left(\frac{\partial A_j}{\partial \tau}\langle\varepsilon\rangle + \nabla' A_j \langle\vec{S}\rangle\right) = \frac{2}{\omega}\mathrm{div}\,\vec{A}. \tag{5.61}$$

Мы записали $\mathrm{div}\,\vec{A}$ в координатах (τ, ξ^1, ξ^2). С учетом (5.59), в координатах (τ, η^1, η^2) равенство (5.57) примет вид:

$$\frac{2}{\omega}\frac{1}{J}\frac{\partial(A_j\langle\varepsilon\rangle)J}{\partial\tau} + \psi_j = 0, \tag{5.62}$$

где

$$J = \frac{D(\tau, \xi^1, \xi^2)}{D(\tau, \eta^1, \eta^2)}, \tag{5.63}$$

ψ_j определено на предыдущих этапах рассмотрения данной задачи. Итак, получено уравнение, из которого A_j находится квадратурой.

Мы построили $\Phi_j \forall j$. θ было построено в предыдущем разделе. Следовательно, построено полное формальное асимптотическое разложение решения типа волнового вала.

Литература

1. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, М., 1977.
2. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* Наука, М., 1972.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод: линейные и нелинейные волны.* Изд-во ЛГУ, Л., 1985.
4. В. М. Бабич, В. В. Улин, *Комплексный пространственно-временной лучевой метод и квазифотоны.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **117** (1981), 5–11.
5. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2008), 5–13.
6. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Квазифотоны волн на поверхности тяжелой жидкости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **379** (2010), 5–23.
7. А. П. Качалов, *Система координат при описании квазифотонов.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **140** (1984), 73–76.
8. С. Бохнер, У. Т. Мартин, *Функции многих комплексных переменных.* М., 1951.
9. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Асимптотическое решение уравнения Гамильтона–Якоби, сосредоточенное вблизи поверхности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 23–28.
10. Математическая энциклопедия. Том 4. “Советская энциклопедия”. Наука, М., 1984.
11. Н. Я. Кирпичникова, *Волны на поверхности тяжелой жидкости с точки зрения пространственно-временного лучевого метода и его модификаций (линейная теория).* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **165** (1987), 91–101.

Popov A. I. Wave Wall for waves on the surface of a heavy liquid.

Asymptotic analysis of surface water waves is made. Gradient of the ocean depth is assumed small. The ansatz for the asymptotic expansion in this small parameter is suggested. The goal is to construct full asymptotic expansion for the solution localized near moving line on the liquid surface. The approach is based on space-time ray method. Eiconal and amplitudes are found in the forms of formal power series. Chains of recurrent equations for its terms are derived. Their solvability is proved. The first term is obtained in explicit form.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург;
С.-Петербургский национальный
исследовательский университет
информационных технологий,
механики и оптики,
Кронверкский пр. 49, 197101,
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: popov239@gmail.com

Поступило 20 ноября 2012 г.