

С. А. Назаров, Я. Таскинен

**СТРОЕНИЕ СПЕКТРА ПЕРИОДИЧЕСКОГО
СЕМЕЙСТВА ИДЕНТИЧНЫХ ЯЧЕЕК,
СОЕДИНЕННЫХ ЧЕРЕЗ СУЖАЮЩИЕСЯ
ОТВЕРСТИЯ**

1. Спектральная задача Дирихле и ее операторные реализации. Пусть ϖ — ограниченная область (рис. 1, а) в евклидовом пространстве \mathbb{R}^d , $d \geq 3$, расположенная в слое

$$\{x = (y, z) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : |z| < 1/2\} \quad (1)$$

и имеющая гладкую (для простоты — см. далее п. 6) границу $\partial\varpi$ с двумя уплощенными участками γ_{\pm} , причем

$$\gamma_{\pm} = \mathbb{B}_R \times \{\pm 1/2\}, \quad \mathbb{B}_R = \{y \in \mathbb{R}^{d-1} : |y| < R\}, \quad (2)$$

R — некоторый положительный радиус, а замыкание $\overline{\varpi} = \varpi \cup \partial\varpi$ области ϖ компактно. Пусть $\omega \subset \mathbb{R}^{d-1}$ — еще одна область с гладкой границей и компактным замыканием; считаем, что начало декартовых координат $y = (y_1, \dots, y_{d-1})$ лежит внутри ω . Волновод (рис. 1, б)

$$\Pi = \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \varpi_p \cup \bigcup_{\pm} \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_{\pm n} \quad (3)$$

получается в результате соединения идентичных ячеек

$$\varpi_p = \{x : (y, z - p) \in \varpi\}, \quad p \in \mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}, \quad (4)$$

посредством отверстий в соприкасающихся стенках

$$\omega_{\pm n} = \{x : z = \pm n \mp 1/2, \alpha_{\pm n}^{-1} y \in \omega\}, \quad n \in \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}, \quad (5)$$

размеры которых уменьшаются при $n \rightarrow +\infty$. Именно, $\{\alpha_{\pm n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ — положительные бесконечно малые последовательности, и

$$\omega_{\pm n} \subset \mathbb{B}_R \times \{\pm n \mp 1/2\}$$

при всех $n \in \mathbb{N}$ (ср. формулы (5) и (2)).

В области (4) рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$-\Delta u(x) = \lambda u(x), \quad x \in \Pi, \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (6)$$

Ключевые слова: задача Дирихле, оператор Гельмгольца, волновод, существенный спектр, бесконечный набор спектральных лагун.

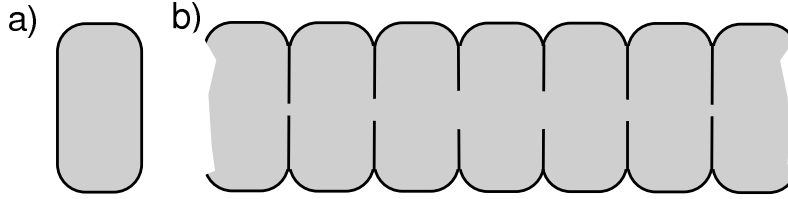


Рис. 1. Ячейка (a) и волновод (b), полученный соединением ячеек через уменьшающиеся “окна” в их общих стенках.

для оператора Лапласа Δ . Ее вариационная формулировка апеллирует к интегральному тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{\Pi} = \lambda(u, v)_{\Pi}, \quad v \in \mathring{H}^1(\Pi), \quad (7)$$

где $\nabla = \text{grad}$, $(\cdot, \cdot)_{\Pi}$ – натуральное скалярное произведение в пространстве Лебега $L^2(\Pi)$, а $\mathring{H}^1(\Pi)$ – подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Pi)$, обращающихся в нуль на $\partial\Pi$. Именно, требуется найти число λ и нетривиальную функцию $\mathring{H}^1(\Pi)$, для которых интегральное тождество (7) выполнено при всякой пробной функции $v \in \mathring{H}^1(\Pi)$.

Поскольку выражение $(\nabla u, \nabla u)_{\Pi}$ представляет собой положительно определенную замкнутую квадратичную форму, задаче (7) (или (6)) ставится [1, § 10.1] в соответствие положительно определенный самосопряженный неограниченный оператор A в гильбертовом пространстве $L^2(\Pi)$. Его спектр $\sigma = \sigma(A)$, содержащийся в вещественной положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, объявляется спектром краевой задачи (6).

В гильбертовом пространстве $H = \mathring{H}^1(\Pi)$ введем скалярное произведение

$$\langle u, v \rangle = (\nabla u, \nabla v)_{\Pi} \quad (8)$$

и оператор B , заданный тождеством

$$\langle Bu, v \rangle = (u, v)_{\Pi}, \quad u, v \in H, \quad (9)$$

и оказывающийся положительно определенным и симметрическим непрерывным, а значит, самосопряженным. Нужные свойства формы (8) и оператора B обеспечены неравенством Фридрикса

$$\|u; L^2(\varpi_p)\|^2 \leq c_{\varpi, R} \|\nabla u; L^2(\varpi_p)\|^2, \quad (10)$$

справедливым для функций $u \in H^1(\varpi_p)$, которые обращаются в нуль всюду на поверхности $\partial\varpi_p$, кроме множеств $\mathbb{B}_R \times \{p \pm 1/2\}$. Последнее свойство присуще сужениям $u|_{\varpi_p}$ функции $u \in H$ на ячейки (4), т.е. суммирование неравенств (10) по $p \in \mathbb{Z}$ приводит к оценке

$$\|u; L^2(\Pi)\|^2 \leq c_{\varpi, R} \|\nabla u; L^2(\Pi)\|^2, \quad u \in \dot{H}^1(\Pi).$$

В силу определений (8) и (9) вариационная задача (7) эквивалентна абстрактному уравнению

$$Bu = \mu u \quad \text{в } H$$

с новым спектральным параметром

$$\mu = \lambda^{-1}. \quad (11)$$

Оператор B не является компактным из-за неограниченности области Π , т.е. его существенный спектр $\sigma_e(B)$ не может состоять из одной точки $\mu = 0$ (см., например, [1, теорема 9.2.1]). Таким образом, согласно соотношению (11) существенный спектр $\sigma_e = \sigma_e(A)$ оператора A (краевой задачи (6)) не пустой. Явная формула для σ_e – основная цель работы.

2. Формулировка результата и его обсуждение. Рассмотрим вспомогательную задачу

$$-\Delta U(x) = \Lambda U(x), \quad x \in \varpi, \quad U(x) = 0, \quad x \in \partial\varpi. \quad (12)$$

Поскольку замыкание ячейки ϖ – компакт, спектр задачи (12) оказывается дискретным и образует монотонно возрастающую неограниченную последовательность собственных чисел

$$\Lambda_1 < \Lambda_2 \leq \Lambda_3 \leq \dots \leq \Lambda_j \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (13)$$

которым отвечают собственные функции $U_1, U_2, U_3, \dots, U_j, \dots$, бесконечно дифференцируемые всюду в $\overline{\varpi}$ благодаря сделанному предположению о гладкости поверхности $\partial\varpi$. Их можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(U_j, U_k)_{\varpi} = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad (14)$$

где $\delta_{j,k}$ – символ Кронекера. Первое собственное число Λ_1 простое и положительное.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *Существенный спектр задачи (6) имеет вид*

$$\sigma_e = \Sigma := \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots\}. \quad (15)$$

На интервале $(0, \Lambda_1)$ найдется такая монотонно возрастающая последовательность $\{\lambda^{(n)}\}_{n \in \mathbb{N}}$ собственных чисел задачи (6), т.е. точек дискретного спектра $\sigma_d = \sigma \setminus \sigma_e$, что

$$\lambda^{(n)} \rightarrow \Lambda_1 - 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow +\infty. \quad (16)$$

Теорема показывает, что полюсь \mathbb{R}_+ разделена точками (13) на интервалы

$$G_j = (\Lambda_{j-1}, \Lambda_j), \quad j \in \mathbb{N}, \quad (17)$$

представляющие собой лакуны в существенном спектре (15) задачи (6) на бесконечном волноводе Π ; при этом $\Lambda_0 = 0$ в формуле (17) с $j = 1$, а интервал G_1 расположен ниже существенного спектра. Если $\Lambda_j = \dots = \Lambda_{j+\kappa_j-1}$ – собственное число задачи (12) в (конечной) ячейке ϖ с кратностью $\kappa_j > 1$, то интервалы $G_{j+1}, \dots, G_{j+\kappa_j-1}$ становятся пустыми.

Многие вопросы о строении спектра задачи (6) остались открытыми. Например, неясно, может ли сама точка Λ_j стать собственным числом задачи (6). Вместе с тем, правдоподобно выглядит следующее утверждение.

Гипотеза. *Каждая открытая (непустая) лакуна (17) содержит бесконечный набор точек дискретного спектра, сгущающийся только к ее верхнему концу Λ_j .*

В спектре задачи (6) имеется бесконечное множество раскрытых лакун, однако все сегменты существенного спектра оказались вырожденными – состоящими из единственной точки. Сама конструкция волновода (3) происходит из предыдущих публикаций [2–4], в которых было доказано, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ в спектре периодического волновода

$$\Pi(\varepsilon) = \Omega(\varepsilon) \cup \bigcup_{p \in \mathbb{Z}} \varpi_p \quad (18)$$

открыто любое наперед заданное количество лакун, однако все-таки не удалось привести пример волновода с бесконечным набором лакун в его спектре. Отличие волновода (18) от волновода (4) состоит в том, что в $\Pi(\varepsilon)$ “бусины” (4) нанизаны на тонкую цилиндрическую “спицу”

$$\Omega(\varepsilon) = \{x : \varepsilon^{-1}y \in \omega, z \in \mathbb{R}\},$$

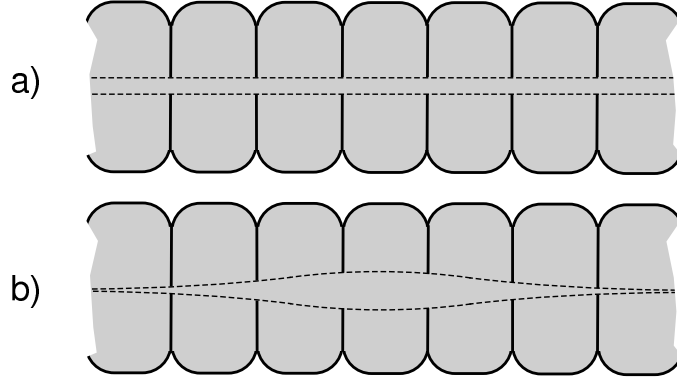


Рис. 2. Волноводы, в которых ячейки соединены цилиндрической (а) и веретенообразной (б) спицами.

а в Π – на веретенообразную спицу, утончающуюся на бесконечности (ср. рис. 2, а и б соответственно).

Доказательство теоремы разбито на несколько этапов, представленных в следующих разделах. Основную трудность составляет п. 4, где проверено, что множество $\mathbb{R}_+ \setminus \Sigma$ ложится на регулярное поле оператора A .

3. Сингулярная последовательность Вейля. Проверим, что нужными свойствами сингулярной последовательности для оператора B в точке $M_j = \Lambda_j^{-1}$ обладают функции $U_p^{(j)} \in \dot{H}^1(\Pi)$, $p \in \mathbb{N}$, определенные формулами

$$U_p^{(j)}(y, z) = \Lambda_j^{-1/2} U_j(y, z - p), \quad x = (y, z) \in \varpi_p,$$

$$U_p^{(j)}(y, z) = 0, \quad x \in \varpi_q, \quad q \in \mathbb{Z}, \quad q \neq p.$$

В силу условия нормировки (14) и равенства

$$\|\nabla U_j; L^2(\varpi)\|^2 = \Lambda_j \|U_j; L^2(\varpi)\|^2$$

для собственной функции задачи (12) получаем

$$\|U_p^{(j)}; H\|^2 = \Lambda_j^{-1} \|\nabla U_j; L^2(\varpi)\|^2 = \|U_j; L^2(\varpi)\|^2 = 1. \quad (19)$$

Для любой пробной функции $V \in C_c^\infty(\overline{\Pi})$ (бесконечно дифференцируемой и с компактным носителем) найдется такое натуральное число

$p(V)$, что при $p > p(V)$ носители $\text{supp } U_p^{(j)}$ и $\text{supp } V$ не пересекаются, т.е. $(\nabla U_p^{(j)}, \nabla V)_\Pi = 0$, и потому

$$U_p^{(j)} \rightarrow 0 \quad \text{слабо в } H \text{ при } p \rightarrow +\infty. \quad (20)$$

Два свойства (19) и (20) последовательности Вейля (см., например, [1, §9.1]) имеются в наличии. Осталось убедиться в том, что

$$\|BU_p^{(j)} - M_j U_p^{(j)}; H\| \rightarrow 0 \text{ при } p \rightarrow +\infty. \quad (21)$$

Используя соотношения (8), (9), (11) и одно из определений нормы в гильбертовом пространстве, находим, что

$$\begin{aligned} \|BU_p^{(j)} - M_j U_p^{(j)}; H\| &= \sup \left| \left\langle BU_p^{(j)} - M_j U_p^{(j)}, v \right\rangle \right| \\ &= \Lambda_j^{-1} \sup \left| \Lambda_j(U_p^{(j)}, v)_{\varpi_p} - (\nabla U_p^{(j)}, \nabla v)_{\varpi_p} \right| \\ &= \Lambda_j^{-1} \sup \left| (\nabla U_j, \nabla v_p)_{\varpi} - \Lambda_j(U_j, v_p)_{\varpi_p} \right|. \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь супремум вычисляется по всем $v \in \mathring{H}^1(\Pi)$, для которых $\|v; H\| = 1$, и, кроме того, $v_p(y, z) = v(y, z + p)$ при $(y, z) \in \varpi$. Поскольку U_j — собственная функция задачи (12), благодаря формуле Грина последнее выражение под знаком модуля в цепочке (22) равно разности

$$\int_{\omega_p^+} v\left(y, p + \frac{1}{2}\right) \partial_z U_j\left(y, p + \frac{1}{2}\right) dy - \int_{\omega_p^-} v\left(y, p - \frac{1}{2}\right) \partial_z U_j\left(y, p - \frac{1}{2}\right) dy, \quad (23)$$

где $\omega_p^+ = \{y : \alpha_{p+1}^{-1} y \in \omega\}$ и $\omega_p^- = \{y : \alpha_p^{-1} y \in \omega\}$ — части поверхности $\partial\varpi$, на которых пробная функция v может отличаться от нуля (см. формулы (5), (4)). Заметим, что в силу следового неравенства

$$\|v_p; L^2(\partial\varpi)\| \leq c_\varpi \|v_p; H^1(\varpi)\|$$

(см., например, [5, гл. 1]), дополненного неравенством Фридрихса (10) и означающего, что $\|v; L^2(\omega_p^\pm)\| \leq \text{const}$ в силу ограничения $\|v; H\| = 1$, имеет место оценка

$$\begin{aligned} &\left| \int_{\omega_p^\pm} v\left(y, p \pm \frac{1}{2}\right) \partial_z U_j\left(y, p \pm \frac{1}{2}\right) dy \right| \\ &\leq \max_{x \in \overline{\varpi}} (|\nabla_x U_j(x)|) (\text{mes } \omega_p^\pm)^{1/2} \|v; L^2(\omega_p^\pm)\| \leq C_j \left(\alpha_{p+\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}} \right)^{-(d-1)/2}. \end{aligned}$$

При этом учтено, что собственная функция U_j гладкая в $\overline{\omega}$ и диаметр области $\omega_p^\pm \subset \mathbb{R}^{d-1}$ составляет $O\left(\left(\alpha_{p+\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}}\right)^{-1}\right)$. Теперь искомого свойства (21) последовательности $\{U_p^{(j)}\}_{p \in \mathbb{N}}$ вытекает из предположения $\alpha_n \rightarrow +0$ при $n \rightarrow +\infty$ (см. комментарий к формуле (5)).

По критерию Вейля (ср. [1, теорема 9.1.2]) точка $M_j = \Lambda_j^{-1}$ принадлежит существенному спектру оператора B , а значит, в соответствии со связью (11) спектральных параметров установлено включение $\Lambda_j \in \sigma_e$.

4. Поле регулярности. Убедимся в том, что при

$$\lambda \notin \Sigma = \{\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3, \dots\}$$

оператор задачи Дирихле для неоднородного уравнения Гельмгольца

$$-\Delta u(x) - \lambda u(x) = f(x), \quad x \in \Pi; \quad u(x) = 0, \quad x \in \partial\Pi, \quad (24)$$

рассматриваемый как отображение

$$\mathcal{D}(A) \rightarrow L^2(\Pi), \quad (25)$$

является фредгольмовым; здесь $\mathcal{D}(A)$ – область определения оператора A , введенного в п. 1. Тогда упомянутая точка λ окажется либо конечнократным собственным числом оператора, либо попадет в его резольвентное поле. В обоих случаях $\lambda \notin \sigma_e(A)$, т.е. первая часть теоремы будет установлена.

Для проверки фредгольмовости отображения (25) достаточно построить правый регуляризатор для оператора задачи (24), т.е. непрерывное отображение

$$L^2(\Pi) \ni f \mapsto Rf \in \mathcal{D}(A), \quad (26)$$

для которого оператор

$$(\Delta + \lambda)R + \mathbb{I} : L^2(\Pi) \rightarrow L^2(\Pi) \quad (27)$$

является компактным; здесь \mathbb{I} – тождественное отображение. Соорудим искомый оператор R при помощи решений двух предельных задач Дирихле на ячейке ϖ (рис. 1, а) и в области Ξ (рис. 3, б), полученной объединением полупространств \mathbb{R}_\pm^d через отверстие ω в их общей границе:

$$\Xi = \mathbb{R}^d \setminus \{\xi = (\eta, \zeta) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R} : \zeta = 0, \eta \notin \omega\}. \quad (28)$$

Зафиксируем индекс $p \in \mathbb{Z}$ и рассмотрим ячейку ϖ_p . Отверстия на ее гранях $\mathbb{B}_R \times \{p \pm 1/2\}$ обозначим через ω_p^\pm , как и в формуле (23), а коэффициент сжатия, фигурирующий в соотношениях (5), – через α_p^\pm . Введем срезающие функции $\chi, \chi' \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, гладкие с компактными носителями и такие, что

$$0 \leq \chi \leq \chi' \leq 1, \quad \chi(|y|) = 1 \text{ при } y \in \omega, \quad \chi\chi' = \chi. \quad (29)$$

При $x \in \varpi$ положим

$$F_p(x) = f(y, z + p)X'_p(x), \quad (30)$$

где X'_p – срезающая функция, равная единице вне малых окрестностей множеств ω_p^\pm , но обращающаяся в нуль в непосредственной близости от них,

$$X'_p(x) = (1 - \chi'((\alpha_p^+)^{-1}r_+)) (1 - \chi'((\alpha_p^-)^{-1}r_-)). \quad (31)$$

Здесь $r_\pm = (|y|^2 + |z \mp 1/2|^2)^{1/2}$ – расстояния до центров отверстий ω_p^\pm , а нужные свойства срезки X'_p обеспечены требованиями (29). Понятно, что

$$\|F_p; L^2(\varpi)\|^2 \leq \|f; L^2(\varpi_p)\|^2. \quad (32)$$

Поскольку число $\lambda \notin \Sigma$ не является собственным, задача

$$-\Delta V_p(x) - \lambda V_p(x) = F_p(x), \quad x \in \varpi, \quad V_p(x) = 0, \quad x \in \partial\varpi, \quad (33)$$

имеет единственное решение

$$V_p \in H^2(\varpi) \cap \dot{H}^1(\varpi),$$

и для него верна оценка

$$\|V_p; H^2(\varpi)\|^2 \leq c \|F_p; L^2(\varpi)\|^2, \quad (34)$$

в которой множитель c , разумеется, не зависит от p , но только от ϖ и λ . Справедливо весовое неравенство

$$\|r^{-2}V_p; L^2(\varpi)\| + \|r^{-1}\nabla V_p; L^2(\varpi)\| \leq c \|V_p; H^2(\varpi)\|, \quad (35)$$

где $r = \min\{r_+, r_-\}$. Соотношение (35) – следствие одномерного неравенства Харди

$$\int_0^{+\infty} r^{\beta-1} |\mathcal{W}(r)|^2 dr \leq \frac{4}{\beta^2} \int_0^{+\infty} r^{\beta+1} \left| \frac{d\mathcal{W}}{dr}(r) \right|^2 dr, \quad (36)$$

$$\mathcal{W} \in C_c^\infty[0, +\infty), \quad \beta = d - 2 > 0,$$

и неравенства Фридрикса на полусфере $\mathbb{S}_{\pm}^{d-1} \subset \mathbb{R}^d$:

$$\int_{\mathbb{S}_{\pm}^{d-1}} |\mathcal{U}(\theta)|^2 ds_{\theta} \leq c_d \int_{\mathbb{S}_{\pm}^{d-1}} |\nabla_{\theta} \mathcal{U}(\theta)|^2 ds_{\theta}, \quad \mathcal{U} \in \dot{H}^1(\mathbb{S}_{\pm}^{d-1}). \quad (37)$$

Приведем пояснения. Под

$$(r_{\pm}, \theta^{\pm}) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}_{\mp}^{d-1}$$

подразумевается система сферических координат с центром в точке $(0, \pm 1/2)$, причем

$$dx = r_{\pm}^{d-1} dr_{\pm} ds_{\theta^{\pm}}, \quad \nabla = (\partial/\partial r_{\pm}, r_{\pm}^{-1} \nabla_{\theta^{\pm}}),$$

$ds_{\theta^{\pm}}$ – элемент площади поверхности сферы, а $\nabla_{\theta^{\pm}}$ – угловая часть градиента.

Формулу (37) применяем к функции $\mathcal{U}(r_{\pm}, \theta^{\pm}) = V_p(x)$ и после умножения на r_{\pm}^{d-5} дополнительно интегрируем по $r \in (0, R^0)$, где радиус $R^0 \in (0, R)$ подобран так, чтобы полушары

$$B_{R^0}^{\pm} = \{x : r_{\pm} < R^0, \pm z < 1/2\}$$

содержались в ячейке ϖ . В результате приходим к неравенству

$$\|r_{\pm}^{-2} V_p; L^2(\mathbb{B}_{R^0}^{\pm})\|^2 \leq c \|r_{\pm}^{-1} \nabla V_p; L^2(\mathbb{B}_{R^0}^{\pm})\|^2, \quad (38)$$

справедливому при условии конечности правой части для функции V_p , обращаящейся в нуль на поверхностях (1). В формулу (36) вместо $\mathcal{W}(r_{\pm}, \theta^{\pm})$ подставляем градиент $\nabla V_p(x)$, умноженный на срезку $\chi_0(r_{\pm})$,

$$\begin{aligned} \chi_0 &\in C_c^{\infty}(\mathbb{R}), \quad 0 \leq \chi_0 \leq 1, \\ \chi_0(r) &= 1 \text{ при } r < R^0/2, \quad \chi_0(r) = 0 \text{ при } r > R^0. \end{aligned} \quad (39)$$

После интегрирования по угловым переменным $\theta^{\pm} \in \mathbb{S}_{\mp}^{d-1}$ получаем соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_{R^0}^{\pm}} \frac{1}{r_{\pm}^2} |\nabla V_p(x)|^2 dx &\leq \frac{4}{(d-2)^2} \int_{\mathbb{B}_{R^0}^{\pm}} \left| \frac{\partial}{\partial r_{\pm}} (\chi_0(r_{\pm}) \nabla V_p(x)) \right|^2 dx \\ &\leq c \|\nabla V_p; H^1(\mathbb{B}_{R^0}^{\pm})\|^2. \end{aligned} \quad (40)$$

Осталось упомянуть, что конечность правой части (40) обеспечивает конечность левой части, а предположение о гладкости, введенное в одномерном неравенстве Харди (36), устраняется по замыканию.

Теперь оценка (35) вытекает из формул (40) и (38), так как $r \geq R^0$ на $\varpi \setminus (\mathbb{B}_{R^0}^+ \cup \mathbb{B}_{R^0}^-)$.

На ячейке ϖ_p функцию Rf из отображения (26) зададим равенством

$$\begin{aligned} Rf(y, z + p) &= X_p(x)V_p(x) \\ &+ \sum_{\pm} \chi_0(r_{\pm})(\alpha_p^{\pm})^2 W_p^{\pm} \left((\alpha_p^{\pm})^{-1} y, (\alpha_p^{\pm})^{-1} \left(z \mp \frac{1}{2} \right) \right) \text{ при } (y, z) \in \varpi. \end{aligned} \quad (41)$$

Здесь X_p – срезающая функция из формулы (31) с заменой $\chi' \mapsto \chi$, а W_p^{\pm} – слагаемые типа пограничного слоя, которые предстоит построить. Согласно требованиям (29) имеем $X_p X_p' = X_p'$, а значит,

$$-(\Delta + \lambda)X_p V_p = X_p F_p - [\Delta, X_p]V_p = F_p + \sum_{\pm} G_p^{\pm}, \quad (42)$$

$$G_p^{\pm} = [\Delta, \chi_p^{\pm}]V_p,$$

где $[\Delta, \chi_p^{\pm}]$ – коммутатор оператора Лапласа со срезкой

$$\chi_p^{\pm}(x) = \chi((\alpha_p^{\pm})^{-1} r_{\pm}),$$

т.е.

$$G_p^{\pm} = 2\nabla V_p \cdot \nabla \chi_p^{\pm} + V_p \Delta \chi_p^{\pm}.$$

Отметим, что

$$|\nabla \chi_p^{\pm}(x)| \leq c (\alpha_p^{\pm})^{-1}, \quad |\Delta \chi_p^{\pm}(x)| \leq c (\alpha_p^{\pm})^{-2},$$

но $r_{\pm}^{-1} \leq c(\alpha_p^{\pm})^{-1}$ при $x \in \text{supp}|\nabla \chi_p^{\pm}|$ (напоминаем, что $\chi_p^{\pm} = 1$ в $c\alpha_p^{\pm}$ -окрестности точки $(0, \pm 1/2)$ и $\chi_p^{\pm} = 0$ вне $C\alpha_p^{\pm}$ -окрестности). Таким образом, благодаря весовому неравенству (35) и оценке (34) получаем, что

$$\begin{aligned} \|G_p^{\pm}; L^2(\varpi)\| &\leq c((\alpha_p^{\pm})^{-1} \|\nabla V_p; L^2(\text{supp}|\nabla \chi_p^{\pm}|)\| \\ &+ (\alpha_p^{\pm})^{-2} \|V_p; L^2(\text{supp}|\nabla \chi_p^{\pm}|)\|) \\ &\leq c(\|r_{\pm}^{-1} \nabla V_p; L^2(\varpi)\| + \|r_{\pm}^{-2} V_p; L^2(\varpi)\|) \\ &\leq c\|V_p; H^2(\varpi)\| \leq c\|f; L^2(\varpi_p)\|. \end{aligned} \quad (43)$$

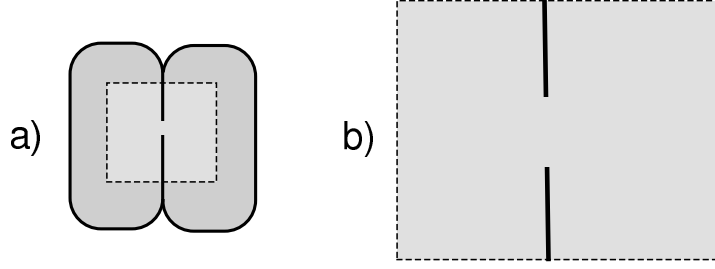


Рис. 3. Удвоенная ячейка (а) и область действия пограничного слоя (б).

Сформируем задачи для нахождения последних членов суммы (41). Для определенности рассмотрим слагаемое W_p^+ , сконцентрированное около отверстия ω_p^+ , соединяющего ячейку $\varpi_0 = \varpi$ с ячейкой ϖ_1 , которая служит образом ячейки ϖ_{p+1} , соседней для зафиксированной ранее ячейки ϖ_p . Поскольку при замене (растяжении) координат

$$x = (y, z) \mapsto \xi = (\eta, \zeta) = \left((\alpha_p^+)^{-1} y, (\alpha_p^+)^{-1} \left(z - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (44)$$

множество $\varpi_0 \cup \omega_p^+ \cup \varpi_1$ (рис. 3, а) трансформируется в конечную, но большую, с размерами $O\left((\alpha_p^+)^{-1}\right)$, часть (рис. 3, б) области (28), логично искать $W_p^+(\eta, \zeta)$ как решение задачи

$$-\Delta_\xi W_p^+(\xi) = H_p(\xi), \quad \xi \in \Xi, \quad W_p^+(\xi) = 0, \quad \xi \in \partial\Xi, \quad (45)$$

правая часть которой определена так:

$$\begin{aligned} H_p^+(\xi) &= \chi(|\xi|) f(\alpha_p^+ \eta, \alpha_p^+ \zeta + p + 1/2) \\ &+ G_p^+(\alpha_p^+ \eta, \alpha_p^+ \zeta + 1/2) + G_{p+1}^-(\alpha_p^+ \eta, \alpha_p^+ \zeta + 1/2). \end{aligned} \quad (46)$$

Отметим, что множитель $(\alpha_p^\pm)^2$, присутствующий в анзаце (41), учитывает связь $\Delta = (\alpha_p^+)^{-2} \Delta_\xi$ операторов Лапласа в исходных и растянутых координатах. Кроме того, возникновение первого слагаемого в правой части обусловлено следующим наблюдением: согласно формулам (42) и (30), (31) при решении первой предельной задачи (33)

остались неучтенными составляющие

$$f(y, z + p) - F_p(x) = \sum_{\pm} \chi'((\alpha_p^{\pm})^{-1} r_{\pm}) f(y, z + p), \quad (47)$$

одна из которых, а именно, $\chi'((\alpha_p^+)^{-1} r_+) f(y, z + p)$, вместе с аналогичной составляющей $\chi'((\alpha_{p+1}^-)^{-1} r_-) f(y, z + p + 1)$ из соседней ячейки объединены в обсуждаемое слагаемое. Напоминаем, что в наших обозначениях $\alpha_p^+ = \alpha_{p+1}^-$ и $\chi'((\alpha^+ - p)^{-1} r_+) = \chi'(|\xi|)$. Наконец, в силу формул (47) и (43), написанных для ячеек ϖ_p и ϖ_{p+1} , получаем при учете замены (44) следующую оценку:

$$\|H_p^+; L^2(\Xi)\|^2 \leq c (\alpha_p^+)^{-d} \|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p+1})\|^2. \quad (48)$$

Функция (46) имеет компактный носитель. Теория эллиптических краевых задач в областях с коническими (угловыми) выходами на бесконечность (см. ключевую работу [6], а также, например, монографию [7, гл. 6] и обзор [8]) показывает, что задача (45) имеет единственное решение, которое затухает на бесконечности как ядро Пуассона, т.е. со скоростью $O(|\xi|^{-d+1})$. Более точно, при любом весовом показателе

$$\beta \in (-d/2, d/2) \quad (49)$$

решение W_p^+ удовлетворяет оценке

$$\int_{\Xi} (1 + |\xi|)^{2\beta} (|\nabla_{\xi} W_p^+(\xi)|^2 + (1 + |\xi|)^{-2} |W_p^+(\xi)|^2) d\xi \leq c_{\beta} \|H_p^+; L^2(\Xi)\|^2, \quad (50)$$

которая становится неверной при $\beta \geq d/2$.

Вблизи ребра $\Gamma = \partial\omega \times \{0\}$ отверстия ω , соединяющего полупространства \mathbb{R}_{\pm}^d , градиент $\nabla_{\xi} W_p^+(\xi)$ приобретает корневую особенность $O(\text{dist}(\xi, \Gamma)^{-1/2})$, а сингулярность $O(\text{dist}(\xi, \Gamma)^{-3/2})$ вторых производных выводит решение из класса $H^2(\Xi)$. Тем не менее, вне шара

$$\mathbb{B}_{R^1} = \{\xi : |\xi| < R^1\} \supset \Gamma$$

с некоторым радиусом $R^1 > 0$ справедлива оценка

$$\begin{aligned} & \int_{\Xi \setminus \mathbb{B}_{R^1}} (1 + |\xi|)^{2(\beta+1)} |\nabla_{\xi}^2 W_p^+(\xi)|^2 d\xi \\ & \leq c \left(\int_{\Xi} (1 + |\xi|)^{2(\beta-1)} |W_p^+(\xi)|^2 d\xi + \|H_p^+; L^2(\Xi)\|^2 \right) \\ & \leq C \|H_p^+; L^2(\Xi)\|^2. \end{aligned} \quad (51)$$

Замечание. Упомянутые особенности решения W_{β}^+ на ребре Γ не препятствуют попаданию функции Rf , заданной формулами (41), в область определения $\mathcal{D}(A)$ оператора A . Дело в том, что согласно работам [9] и [10] (см. также книгу [7, гл. 2 и 9]) линейное пространство $\mathcal{D}(A)$ содержит $\mathring{H}^1(\Pi)$, но оказывается уже пространства $H^2(\Pi) \cap \mathring{H}^1(\Pi)$ именно из-за необходимости включить упомянутые сингулярные решения в область определения самосопряженного оператора, порожденного билинейной формой из левой части интегрального тождества (7).

Пограничный слой W_p^- около отверстия ω_p^- находится в точности по такой же схеме, причем в наших обозначениях $\alpha_p^- = \alpha_{p-1}^+$ и $W_p^- = W_{p-1}^+$. Функция (41) удовлетворяет равенству

$$\begin{aligned} & -(\Delta + \lambda)Rf(x) = -X_p(x)(\Delta + \lambda)V_p(x) - [\Delta, X_p(x)]V_p(x) \\ & - \sum_{\pm} \chi_0(r_{\pm}) \Delta_{\xi^{\pm}} W_p^{\pm}(\xi^{\pm}) \\ & - \sum_{\pm} (\alpha_p^{\pm})^2 (\lambda \chi_0(r_{\pm}) W_p^{\pm}(\xi^{\pm}) + [\Delta, \chi_0(r_{\pm})] W_p^{\pm}(\xi^{\pm})). \end{aligned} \quad (52)$$

Согласно формулам (30), (42) и (46), (47) сумма трех первых выражений в правой части (52) равна

$$X_p'(x) f(y, z + p) + \sum_{\pm} \chi'((\alpha_p^{\pm})^{-1} r_{\pm}) f(y, z + p) = f(y, z + p). \quad (53)$$

Изучим последнее выражение, представив его в виде

$$- \sum_{\pm} (\lambda f_p^{0\pm}(x) + f_p^{1\pm}(x)).$$

Как и ранее, ограничимся рассмотрением случая “плюс”. Имеем

$$\begin{aligned}
\|f_p^{0+}; H^1(\varpi)\|^2 &\leq c(\alpha_p^+)^4 \int_{\mathbb{B}_{R^0}^-} (|W_p^+(\xi)|^2 + (\alpha_p^+)^{-2} |\nabla_\xi W_p^+(\xi)|^2) dx \\
&\leq c(\alpha_p^+)^d \int_{\Xi} \left((\alpha_p^+)^4 |W_p^+(\xi)|^2 + (\alpha_p^+)^2 |\nabla_\xi W_p^+(\xi)|^2 \right) d\xi \quad (54) \\
&\leq c(\alpha_p^+)^{d+2} \|H_p^+; L^2(\Xi)\|^2 \leq c(\alpha_p^+)^2 \|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p+1})\|^2.
\end{aligned}$$

Здесь учтены оценка (48), а также неравенство (50), в котором согласно условию (49) можно положить $\beta = 1$ и $\beta = 0$ для обработки слагаемых $|W_p^+|^2$ и $|\nabla_\xi W_p^+|^2$ соответственно. Кроме того, принимая во внимание определение (39) срезающей функции χ_0 , находим, что

$$\begin{aligned}
&\|f_p^{1+}; H^1(\varpi)\|^2 \\
&\leq c(\alpha_p^+)^4 \int_{\mathbb{B}_{R^0}^+ \setminus \mathbb{B}_{R^0/2}^+} \left(|W_p^+(\xi)|^2 + (\alpha_p^+)^{-2} |\nabla_\xi W_p^+(\xi)|^2 \right. \\
&\quad \left. + (\alpha_p^+)^{-4} |\nabla_\xi^2 W_p^+(\xi)|^2 \right) d\xi \\
&\leq c(\alpha_p^+)^d \int_{\mathbb{B}_{R^0/\alpha_p^+}^+ \setminus \mathbb{B}_{R^0/(2\alpha_p^+)}^+} \left((\alpha_p^+)^4 |W_p^+(\xi)|^2 + (\alpha_p^+)^2 \right. \\
&\quad \left. + |\nabla_\xi W_p^+(\xi)|^2 + |\nabla_\xi^2 W_p^+(\xi)|^2 \right) d\xi \quad (55) \\
&\leq c(\alpha_p^+)^{d+2(\beta+1)} \int_{\Xi \setminus \mathbb{B}_{R^0/(2\alpha_p^+)}^+} (1 + |\xi|)^{2(\beta-1)} (|W_p^+(\xi)|^2 \\
&\quad + (1 + |\xi|)^{-2} |\nabla_\xi W_p^+(\xi)|^2 + (1 + |\xi|)^{-4} |\nabla_\xi^2 W_p^+(\xi)|^2) d\xi \\
&\leq c(\alpha_p^+)^{d+2(\beta+1)} \|H_p^+; L^2(\Xi)\|^2 \\
&\leq c(\alpha_p^+)^{2(\beta+1)} \|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p+1})\|^2.
\end{aligned}$$

При этом использованы неравенства (50) и (51) вместе со следующим наблюдением: на множестве интегрирования $\mathbb{B}_{R^0/\alpha_p^+}^+ \setminus \mathbb{B}_{R^0/(2\alpha_p^+)}^+$, представляющим собой шаровой полуслой с большими радиусами, величины $1 + |\xi|$ и $(\alpha_p^+)^{-1}$ эквивалентны, т.е. введение под интеграл весового

множителя обусловило возникновение коэффициента $(\alpha_p^+)^{2(\beta+1)}$. Далее в оценке (55) можно взять $\beta = 0$.

Перебирая индексы $p \in \mathbb{Z}$, выстраиваем оператор R по формулам (41). Установим его свойства, нужные, как уже пояснялось, для проверки первой части теоремы.

Предложение. *Отображения (26) и (27) соответственно непрерывное и компактное.*

Доказательство. Введем весовое пространство Соболева \mathcal{H} с нормой

$$\|z; \mathcal{H}\| = \left(\|z; H^1(\varpi^0)\|^2 + \sum_{\pm} \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_{\pm n})^{-2} \|z; H^1(\varpi_{\pm n} \cup \varpi_{\pm n+1} \cup \varpi_{\pm n-1})\|^2 \right)^{1/2}.$$

Поскольку коэффициенты $(\alpha_{\pm n})^{-2}$ неограниченно возрастают при $n \rightarrow \infty$ (см. комментарий к определению (36)), вложение $\mathcal{H} \subset L^2(\Pi)$ оказывается компактным. Представление (53) и оценки (54), (55), показывают, что

$$\begin{aligned} \|(\Delta + \lambda)Rf + f; L^2(\Pi)\|^2 &\leq c_{\alpha} \|(\Delta + \lambda)Rf + f; \mathcal{H}\|^2 \\ &\leq c \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p+1})\|^2 + \|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p-1})\|^2) \\ &\leq c \|f; L^2(\Pi)\|^2. \end{aligned} \quad (56)$$

Таким образом, оператор (27) в самом деле непрерывный и компактный.

Оператор A был определен при помощи билинейной формы из левой части (7), а значит, для проверки включения $Rf \in \mathcal{D}(A)$ требуется убедиться в том, что $(\Delta + \lambda)Rf \in L^2(\Pi)$ и $Rf \in H^1(\Pi)$. Первая формула уже установлена выкладкой (56), а вторая столь же проста, так как благодаря оценкам (33), (32) и цепочке неравенств (54) (без первого ее звена) выполнено нужное соотношение:

$$\begin{aligned} \|Rf; H^1(\Pi)\|^2 &\leq c \sum_{p \in \mathbb{Z}} (\|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p+1})\|^2 + \|f; L^2(\varpi_p \cup \varpi_{p-1})\|^2) \\ &\leq c \|f; L^2(\Pi)\|^2. \end{aligned} \quad \square$$

Равенство (15) из теоремы в п. 2 доказано.

5. Дискретный спектр. Выделим из бесконечно малой последовательности $\{\alpha_{+2n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ строго монотонно убывающую подпоследовательность $\{\alpha_{n(m)}\}_{m \in \mathbb{N}}$ и введем удвоенные ячейки (рис. 3, а)

$$\varpi_m^\# = \varpi_{n(m)} \cup \omega_{n(m)} \cup \varpi_{n(m)+1}, \quad (57)$$

для образов

$$\widehat{\varpi}_m^\# = \{y, z\} : (y, z + n(m)) \in \varpi_m^\#\}$$

согласно определениям (4) и (5) верны включения

$$\widehat{\varpi}_1^\# \supsetneq \widehat{\varpi}_2^\# \supsetneq \widehat{\varpi}_3^\# \supsetneq \dots \supsetneq \widehat{\varpi}_m^\# \supsetneq \dots$$

Поэтому первые собственные числа $\lambda_m^\# > 0$ задач Дирихле

$$-\Delta w_m^\#(x) = \lambda_m^\# w_m^\#(x), \quad x \in \widehat{\varpi}_m^\#, \quad w_m^\#(x) = 0, \quad x \in \partial \widehat{\varpi}_m^\#, \quad (58)$$

находятся в отношении

$$\lambda_1^\# < \lambda_2^\# < \dots < \lambda_m^\# < \dots \quad (59)$$

Как обычно, формулы (59) проверяются при помощи минимального принципа (см., например, [1, теорема 10.2.1]), а строгие неравенства выполнены ввиду знакоопределенности первой собственной функции задачи Дирихле. Этот же принцип позволяет сравнить собственные числа (59) с первым собственным числом $\Lambda^\# = \Lambda_1$ задачи Дирихле на (несвязном) открытом множестве $\varpi^\# = \varpi_0 \cup \varpi_1$ и убедиться в том, что

$$\lambda_m^\# < \Lambda_1 \text{ при всех } m \in \mathbb{N}.$$

Обращаем внимание на то, что вторые собственные числа задач (58) могут стать равными Λ_1 , например, в случае симметрии ячейки ϖ относительно плоскости $\{x : z = 0\}$, так как нечетное продолжение собственной функции U_1 с ϖ_0 на ϖ_1 через плоскость $\{x : z = 1/2\}$ остается гладким в $\varpi_0 \cup \overline{\gamma}_\pm \cup \varpi_1$ (см. определения (4) и (2)), а значит, удовлетворяет задаче (58) при любом $m \in \mathbb{N}$.

Теперь применим максиминимальный принцип (см., например, [1, теорема 10.2.2]) к оператору A задачи (6):

$$\lambda_N = \max_{E_N} \inf_{u \in E_N \setminus \{0\}} \frac{\|\nabla u; L^2(\Pi)\|^2}{\|u; L^2(\Pi)\|^2}. \quad (60)$$

Здесь E_N – произвольное подпространство в $\mathring{H}^1(\Pi)$ с коразмерностью $N - 1$, т.е.

$$\dim \left(\mathring{H}^1(\Pi) \ominus E_N \right) = N - 1$$

и, в частности, $E_1 = \overset{\circ}{H}^1(\Pi)$. Собственные функции $w_1^\#, \dots, w_N^\#$ имеют дизъюнктивные носители в замыканиях удвоенных ячеек (57), т.е. их можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$\left(w_j^\#, w_k^\#\right)_\Pi = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}.$$

Ввиду линейной независимости указанных функций всякое подпространство E_n , фигурирующее в правой части (60), содержит их нетривиальную линейную комбинацию

$$w^{E_N} = \sum_{m=1}^N a_m^{E_N} w_m^\#, \quad \sum_{m=1}^N |a_m^{E_N}|^2 = 1.$$

Заметим, что $\|w^{E_N}; L^2(\Pi)\| = 1$. В итоге обнаруживаем, что

$$\lambda_N \leq \max_{E_N} \frac{\|\nabla w^{E_N}; L^2(\Pi)\|^2}{\|w^{E_N}; L^2(\Pi)\|^2} = \max_{E_N} \sum_{m=1}^N \lambda_m^\# |a_m^{E_N}|^2 \leq \lambda_N^\# < \Lambda_1.$$

Итак, по теореме 10.2.2 [1] при любом $N \in \mathbb{N}$ на интервале $(0, \Lambda_1)$, расположенном ниже существенного спектра (15) оператора A , имеется не менее N собственных чисел задачи (6). Таким образом, кратность дискретного спектра σ_d на этом интервале бесконечная, но Λ_1 — единственная возможная точка сгущения для $(0, \Lambda_1) \cap \sigma_d$ благодаря уже проверенной формулы (15) для существенного спектра $\sigma_e(A)$. Сходимость (16), а вместе с ней и вся теорема из п. 2 установлены.

6. Доступные обобщения. 1° *О границе.* Предположение о гладкости поверхностей $\partial\varpi$ и $\partial\omega$ введены в п. 1 только для упрощения изложения. Это предположение использовалось при выводе оценок (34) и (35), которым нетрудно найти заменители (более сложно формулируемые) и в случае липшицевой границы. Наличие уплощенных участков (1) учитывалось при исследовании в п. 4 эффекта пограничного слоя около соединительных отверстий (5). Основной результат о строении (15) существенного спектра остается в силе и при более слабых требованиях к форме ячейки ϖ вблизи точек $(0, \pm 1/2)$. Можно, например, считать их коническими точками, а соединение ячеек производить при помощи тонких перемычек (см. рис. 4, а и с соответственно). При этом аналогичные (50) и (51) весовые оценки решений задачи Дирихле в области Ξ с двумя коническими выходами на бесконечность (рис. 4, б) получаются на основе общей схемы [6], реализованной, например, в

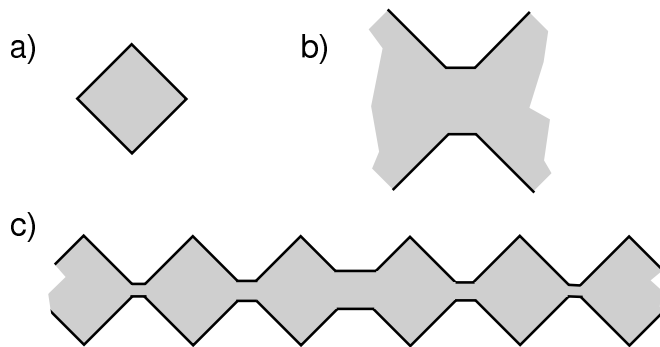


Рис. 4. Ячейка с коническими концевыми точками (а), а также соответствующие бесконечный волновод (с) и зона действия пограничного слоя (b).

книге [7, гл. 6] и статье [8] для формально самосопряженных эллиптических краевых задач.

Подчеркнем, что, оперируя с μ -спектром непрерывного оператора B , введенного формулами (8) и (9) в пространстве Соболева $\dot{H}^1(\Pi)$, можно полностью избавиться от необходимости применять оценки вторых производных. Вместе с тем, такой подход требует более длинных рассуждений, и поэтому в п. 4 речь шла о неограниченном операторе A в пространстве Лебега $L^2(\Pi)$.

2°. *О размерности.* Плоский волновод исключен из рассмотрения условием $d \geq 3$ в п. 1 только из-за нарушения обычного одномерного неравенства Харди (36) при $d = 2$. Вместо него приходится применять неравенство Харди с логарифмом

$$\int_0^1 r^{-1} |\ln r|^{-2} |\mathcal{W}(r)|^2 dr \leq 4 \int_0^1 r \left| \frac{d\mathcal{W}}{dr}(r) \right|^2 dr, \quad \mathcal{W} \in C_c^\infty[0, 1),$$

привносящим логарифмические множители во многие последующие оценки. Подобные модификации не сказываются на результате, так как последовательности $\{\alpha_{\pm n}^2(1 + |\ln \alpha_{\pm n}|)^2\}_{n \in \mathbb{N}}$ остаются бесконечно малыми.

3°. *Об уравнениях и краевых условиях.* Скалярное уравнение Гельгольца можно без особых осложнений заменить произвольной формально самосопряженной эллиптической системой (например, системой уравнений теории упругости), для которой краевые условия Дирихле порождают положительно определенный самосопряженный оператор в векторном пространстве Лебега. Авторы не знают, как обстоят дела с другими типами краевых условий, в частности, с условиями Неймана, осмысленными для акустических волноводов с жесткими стенками и упругих волноводов с поверхностями, свободными от напряжений. Вместе с тем нетрудно предсказать, что в гипотезе из п. 2 точкой сгущения дискретного спектра обязан стать левый конец Λ_{j-1} лакуны (15).

4°. *Семейства ячеек, заполняющих пространство или слой.* Разобьем евклидово пространство \mathbb{R}^d на параллелепипеды

$$Q_\alpha = \{x = (x_1, \dots, x_d) : |x_j - \vartheta_j l_j| < l_j/2, j = 1, \dots, d\},$$

$$\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_d) \in \mathbb{Z}^d. \quad (61)$$

Пусть ϖ — область с липшицевой границей, имеющая следующие уплотненные участки на противоположных гранях параллелепипеда Q_0 :

$$\gamma_\pm^j = \{x : x_j = \pm l_j/2, |x|^2 - |x_j|^2 < R^2\}, \quad j = 1, \dots, d. \quad (62)$$

Геометрические параметры $l_1, \dots, l_d > 0$ и $R > 0$ в формулах (61) и (62) подобраны так, что $\gamma_\pm^j \subset \partial\varpi \cap \partial Q_0$. На каждой паре противоположных граней зафиксируем $(d-1)$ -мерную область ω^j , содержащую начало координат и лежащую в шаре с радиусом R . Наконец, положим

$$\varpi_\vartheta = \{x : (x_1 - \vartheta_1 l_1, \dots, x_d - \vartheta_d l_d) \in \varpi\} \subset Q_\vartheta, \quad \vartheta \in \mathbb{Z}^d.$$

Параллелепипед Q_0 и ячейку ϖ назовем *центральными*. Параллелепипеды Q_ϑ , для которых $|\vartheta_j| \leq 1$, но $\vartheta \neq 0 \in \mathbb{Z}^d$, имеют общие грани, ребра или вершины с Q_0 — назовем их соседями *первого ранга*. С соседями первого ранга соприкасаются (опять-таки через грани, ребра и вершины) соседи *второго ранга* и т.д. Ранг параллелепипеда передается содержащейся в нем ячейке, а центральной ячейке присваивается ранг 0. Ячейки ранга $k \in \mathbb{N}$ соединяем между собой и с ячейками ранга $k-1$ посредством отверстий ω_k^j в общих гранях, полученных сжатием введенных ранее областей ω^j в $\alpha_k > 0$ раз; здесь

$$\alpha_k \in (0, 1) \text{ и } \alpha_k \rightarrow 0 \text{ при } k \rightarrow \infty.$$

Полученную в результате область обозначим Π и поставим в ней спектральную задачу Дирихле (6). Просматривая материал предыдущих разделов еще раз, видим, что нет никаких препятствий для вывода утверждений, аналогичных теореме из п. 2.

Тиражирование ячеек можно производить не во всех направлениях, а лишь в некоторых, заполняя ячейками не все пространство, как только что было сделано, а слой

$$\{x \in \mathbb{R}^d : x_j \in \mathbb{R}, j = d' + 1, \dots, d, \quad |x_k| < l_k/2, k = 1, \dots, d'\}$$

с какой-то коразмерностью $d' \in (1, d)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 12-01-00348), а также гранта 139545 Academy of Finland в рамках проекта “Functional analysis and applications”.

ЛИТЕРАТУРА

1. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве*. изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1980,.
2. С. А. Назаров, *Лагуна в существенном спектре задачи Неймана для эллиптической системы на периодической области*. — Функциональный анализ и его приложения **43** No. 3 (2009), 92–95.
3. С. А. Назаров, *Пример множественности лагун в спектре периодического волновода*. — Матем. сборник **201**, No. 4 (2010), 99–124.
4. S. A. Nazarov, K. Ruotsalainen, and J. Taskinen, *Essential spectrum of a periodic elastic waveguide may contain arbitrarily many gaps*. — *Applicable Anal.* **89**, No. 1 (2010), 109–124.
5. О. А. Ладыженская, *Краевые задачи математической физики*. Наука, М., 1973.
6. В. А. Кондратьев, *Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими или угловыми точками*. — Труды Московск. матем. общества **16** (1963), 219–292.
7. С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Эллиптические задачи в областях с кусочно гладкой границей*. Наука, М., 1991.
8. С. А. Назаров, *Полиномиальное свойство самосопряженных эллиптических краевых задач и алгебраическое описание их атрибутов*. — Успехи матем. наук **54**, No. 5 (1999), 77–142.
9. М. Ш. Бирман, Г. Е. Скворцов, *О квадратичной суммируемости старших производных решения задачи Дирихле в области с кусочно гладкой границей*. — Известия ВУЗ’ов. Матем. No. 5 (1962), 11–21.

10. С. А. Назаров, *Самосопряженные расширения оператора задачи Дирихле в трехмерной области с ребром.* — Сибирский журнал индустриальной математики **11**, No. 1 (2008), 80–95.

Nazarov S. A., J. Taskinen J. Structure of the spectrum of the periodic family of identical cells connected through apertures of reducing sizes.

A waveguide is constructed such that the Dirichlet problem for the Laplace operator gets the essential spectrum implying a countable set of points in the real positive semi-axis. The waveguide is obtained by joining identical cells through apertures in their common walls. Size of the apertures decreases at distance from the “central” cell. It is shown that the first point of the essential spectrum is a limit of an infinite sequence of eigenvalues of the problem from its discrete spectrum. A hypothesis on the structure of the discrete spectrum inside spectral gaps is formulated and other open questions are mentioned.

ИПМаш РАН,
Большой пр. 61, В.О.,
199178, С.-Петербург,
С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский проспект, дом 28,
Старый Петергоф, 198504 С.-Петербург,
Россия

Поступило 21 ноября 2012 г.

E-mail: `srgnazarov@yahoo.co.uk`

University of Helsinki,
Department of Mathematics and Statistics,
P.O.Box 68 FIN-00014, Helsinki, Finland

E-mail: `jari.taskinen@helsinki.fi`