

А. А. Мацковский

КОРОТКОВОЛНОВЫЙ ТОЧЕЧНЫЙ ИСТОЧНИК КОЛЕБАНИЙ ВБЛИЗИ НЕОДНОРОДНОЙ ПОЛУПЛОСКОСТИ

§1. ВВЕДЕНИЕ

В 1960-х годах В. С. Булдыревым (см. [2, 6]) была исследована так называемая головная волна интерференционного типа. Математическая техника работ [2, 6] исключительно сложна. Наша цель – исследовать “волну Булдырева” в максимально простой ситуации. Также исследование имеет цель облегчить рассмотрение волновых полей этого типа в более сложных ситуациях.

Пусть двумерная плоскость разделена на две полуплоскости, границей разделения которых является прямая. Обозначим через x – декартову координату вдоль этой прямой а через z – ортогогнальную ей ось.

Полуплоскость с положительными значениями параметра z далее будем называть - область I, вторую полуплоскость соответственно – область II.

Пусть $A^j(x, z)$ – волновое поле в полуплоскости с номером j ($j = I$ или II). Мы предполагаем, что колебания – гармонические (соответствующий множитель $e^{-i\omega t}$ мы всюду опускаем) и волновой процесс описывается уравнениями

$$\Delta A^I + k^2 A^I = -\delta(x)\delta(z - z_0), \quad (z > 0, z_0 > 0, \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}), \quad (1)$$

$$\Delta A^{II} + k^2(\alpha_1 + \alpha_2 z)A^{II} = 0, \quad (z < 0), \quad (2)$$

$$\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}; \quad 0 < \alpha_1 < 1, \alpha_2 > 0, \quad (3)$$

где дельта функция, в правой части уравнения (1) соответствует точечному источнику колебаний, расположенному в точке области I с координатами $x = 0$ и $z = z_0$.

Ключевые слова: дифракция, головная волна, шепчущая галерея, точечный источник, неоднородная среда, коротковолновая асимптотика.

Работа выполнена при поддержке Лаборатории им. П. Л. Чебышева СПбГУ, грант Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

Краевые условия при $z = 0$ – это классические условия непрерывности волнового поля и его первой производной:

$$A^I(x, 0) = A^{II}(x, 0), \quad (4)$$

$$\frac{\partial A^I(x, z)}{\partial z} = \frac{\partial A^{II}(x, z)}{\partial z}, \quad z = 0. \quad (5)$$

Здесь и в дальнейшем мы не оговариваем к какому классу функций принадлежат A^I , A^{II} и т.п. Соответствующие уточнения сделать нетрудно, но это сильно удлинит нашу статью.

Условия (3) обеспечивают положительность так называемой эффективной кривизны (термин введен В. С. Булдыревым, см. [2, 6]) границы раздела полупространств I и II:

$$\frac{1}{P(x)} = \frac{1}{\rho(x)} - \frac{1}{c_2(x)} \left(\frac{\partial c_2(x, z)}{\partial z} \right)_{z=0} > 0, \quad (6)$$

где $P(x)$ – эффективный радиус кривизны границы раздела в точке x , $\frac{1}{\rho(x)}$ – кривизна границы в точке x ,

$$c_2(x) = \lim_{z \rightarrow 0} c_2(x, z),$$

$c_2(x, z)$ – скорость распространения волн в области II.

В случае, если на границе раздела эффективная кривизна положительна, имеют место следующие явления: лучи, выходящие из источника колебаний под углами, меньшими угла полного внутреннего отражения, порождают в неоднородной среде области II преломленные криволинейные лучи, многократно отражающиеся от этой границы (см. рис. 1). Такие лучи образуют так называемый эффект шепчущей галереи. Выделение волн шепчущей галереи из общего решения описанной выше задачи дифракции является целью данной работы.

При $z \leq -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ выражение $\alpha_1 + \alpha_2 z$ перестаёт быть положительным. В статье исследуется волновое поле лишь при $z > -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}$, где идут волновые процессы, порождающие так называемую головную волну интерференционного типа, которую мы будем для краткости называть “волна Булдырева”. Целью нашей работы является изучение этой волны. Настоящая статья – первый шаг к этой цели.

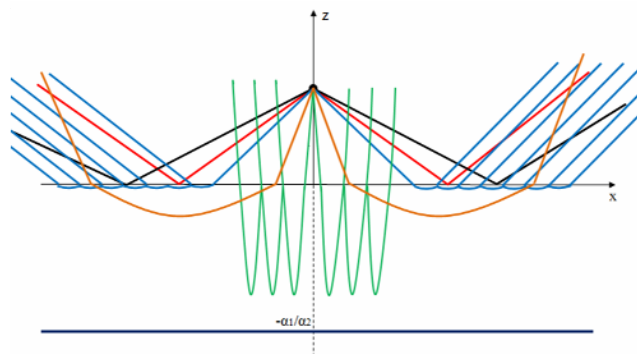


Рис. 1. Форма лучей вышедших из точечного источника колебаний.

§2. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ РАССЕЯНИЯ В ВИДЕ КОНТУРНОГО ИНТЕГРАЛА

Представим поле в области I в виде

$$A^I = A^{\text{inc}} + A^{\text{refl}},$$

где в качестве A^{inc} мы обозначили поле падающей от источника волны, а A^{refl} – отраженное поле. Вместо A^{II} далее будем писать A^{refl} .

Проинтегрируем левые и правые части уравнений (1) и (2) с весом $\exp i\xi x$ по переменной x . В результате получим следующие уравнения:

$$\begin{aligned} \widehat{A}_{zz}^I + (k^2 - \xi^2)\widehat{A}^I &= -\delta(z - z_0), \\ \widehat{A}_{zz}^{II} + (k^2\alpha_2 z - (\xi^2 - k^2\alpha_1))\widehat{A}^{II} &= 0. \end{aligned}$$

Эти уравнения и принцип предельного поглощения имеют следствием следующую формулу для поля точечного источника колебаний:

$$\widehat{A}^{\text{inc}} = -\frac{e^{i|z-z_0|\sqrt{k^2-\xi^2}}}{2i\sqrt{k^2-\xi^2}}.$$

Здесь ветвь корня выбрана таким образом, что при $\xi \in (-k, k)$ $\sqrt{k^2 - \xi^2} > 0$ и разрезы проведены из точек $-k$ и k вертикально вниз и вверх соответственно.

Общее решение соответствующего однородного уравнения в области I имеет вид

$$\widehat{A}^{\text{одн}} = c_1 e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} z} + c_2 e^{-i\sqrt{k^2 - \xi^2} z}.$$

Таким образом, пользуясь принципом предельного поглощения, получаем выражение для отраженной волны в области I:

$$\widehat{A}^{\text{refl}} = c(\xi) e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} z},$$

и следовательно, полное поле в этой области можно записать в виде

$$\widehat{A}^I = -\frac{e^{i|z - z_0|\sqrt{k^2 - \xi^2}}}{2i\sqrt{k^2 - \xi^2}} + c(\xi) e^{i\sqrt{k^2 - \xi^2} z}. \quad (7)$$

Решение уравнения (2) в области II можно получить следующим образом: сделаем замену $r = \frac{(\xi^2 - \alpha_1 k^2) - \alpha_2 k^2 z}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}}$. Тогда исходное уравнение преобразуется в уравнение Эйри:

$$\widehat{A}_{rr} = r \widehat{A}.$$

Общее решение полученного уравнения имеет вид:

$$\widehat{A}(r) = c_1(\xi) w_1(r) + c_2(\xi) w_2(r),$$

где $w_1(r)$, $w_2(r)$ – функции Эйри в определении В. А. Фока (см. [1]). Функции w_j определяются своей асимптотикой при $r \rightarrow -\infty$:

$$w_1(r) = |r|^{-\frac{1}{4}} e^{i\left(\frac{2}{3}|r|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|r|^{\frac{2}{3}}}\right)\right),$$

$$w_2(r) = |r|^{-\frac{1}{4}} e^{-i\left(\frac{2}{3}|r|^{\frac{3}{2}} + \frac{\pi}{4}\right)} \left(1 + O\left(\frac{1}{|r|^{\frac{2}{3}}}\right)\right).$$

Поэтому общий вид волнового поля в нижней полуплоскости:

$$\widehat{A}(z, \xi) = c_1(\xi) w_1\left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} - (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} z\right) + c_2(\xi) w_2\left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} - (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} z\right).$$

Потребуем, чтобы $\widehat{A}^{\text{refr}} \rightarrow 0$ при $z \rightarrow -\infty$, тогда получаем поле рефрагированной волны:

$$\widehat{A}^{\text{refr}} = s(\xi) v\left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} - (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} z\right), \quad (8)$$

где $v(t)$ – решение уравнения Эйри, представляющее собой линейную комбинацию функций $w_1(t)$ и $w_2(t)$:

$$v(t) = \frac{w_1(t) - w_2(t)}{2i}.$$

Подставляя выражения (7) и (8) в краевые условия, получаем линейную систему двух уравнений с неизвестными функциями $s(\xi)$ и $c(\xi)$. Изучая свойства определителя этой системы, как функции переменных $k, \xi, \alpha_1, \alpha_2$, легко прийти к выводу о том, что линейная система является невырожденной и имеет единственное решение. Опуская некоторые выкладки, выпишем полученные выражения для отраженного A^{refl} и рефрагированного A^{refr} полей формулы (9) и (10) соответственно:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-i\xi x + i(z+z_0)\sqrt{k^2 - \xi^2}} (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} v' \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} \right) - i\sqrt{k^2 - \xi^2} v \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} \right)}{2i\sqrt{k^2 - \xi^2} (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} v' \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} \right) + i\sqrt{k^2 - \xi^2} v \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} \right)} d\xi, \quad (9)$$

$$\frac{-\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\xi x + i(z+z_0)\sqrt{k^2 - \xi^2}} v \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} - (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} z \right) d\xi}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} v' \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} \right) + i\sqrt{k^2 - \xi^2} v \left(\frac{\xi^2 - \alpha_1 k^2}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{2}{3}}} \right)}. \quad (10)$$

В соответствии с выбором ветви корня $\sqrt{k^2 - \xi^2}$, интегрирование по вещественной оси в (9) и (10) происходит с обходом вверх(вниз) точки $\xi = -k$ ($\xi = +k$).

2.1. Об аналитической структуре функций $s(\xi)$ и $c(\xi)$. Для удобства дальнейших вычислений перейдем к новой переменной p , сделав замену

$$\xi = kp.$$

Введем функцию

$$D(p) = (\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} v' (t(p)) + ik\sqrt{1 - p^2} v (t(p)),$$

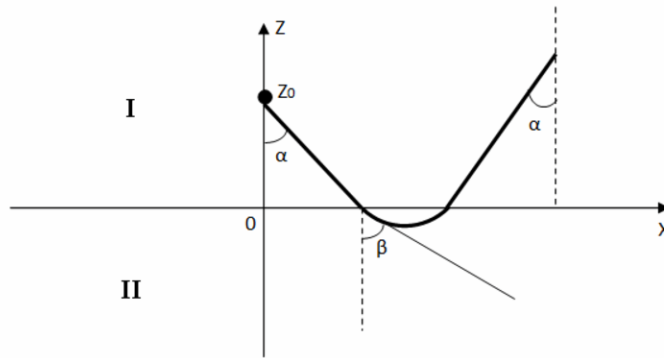


Рис. 2. Форма луча вышедшего из источника колебаний и испытавшего преломление на границе раздела сред.

где $t(p) = \left(\frac{k}{\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}}(p^2 - \alpha_1)$. Ветвь корня выбрана таким образом, что при $\xi \in (-1, 1)$ $\sqrt{1 - p^2} > 0$ и разрезы проведены из точек -1 и 1 вертикально вниз и вверх соответственно. Функция $D(p)$ присутствует в знаменателе как функции $s(p)$, так и функции $c(p)$. Приведем важную для дальнейших построений лемму, доказательство которой в этой статье опускается:

Лемма 1. $D(p)$ является аналитической функцией в областях $\Omega_2 = \{p \in \mathbb{C} : p = re^{i\phi}, r > 0, \frac{\pi}{2} < \phi < \pi\}$ и $\Omega_4 = -\Omega_2$ (второй и четвертый квадранты комплексной плоскости p соответственно) и кроме того, не имеет нулей в этих областях.

Из Леммы 1 и структуры выражений для функций $s(\xi)$ и $c(\xi)$ следует

Утверждение 1. В плоскости с указанными выше разрезами функции $s(p)$ и $c(p)$ мероморфны. Все полюса этих функций находятся в открытых квадрантах I и III.

§3. ТРАЕКТОРИЯ ДВИЖЕНИЯ ЛУЧЕЙ, ВЫШЕДШИХ ИЗ ИСТОЧНИКА ИЗЛУЧЕНИЯ

Рассмотрим луч, вышедший из источника излучения, находящегося в точке с координатами $(0, z_0)$ (см. рис. 2.) Пусть этот луч вышел под углом $0 < \alpha < \alpha_c$, где α_c - предельный угол полного внутреннего отражения. В силу постоянства волнового числа k в области I, в начале своего движения луч будет двигаться по прямолинейной траектории. На границе раздела произойдет его отражение и преломление в область II. Отраженный по закону Снеллиуса луч продолжит двигаться в области I в положительном по z направлении. Исследуем траекторию движения преломленного луча. Искомая траектория является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\vec{s}_0}{c} \right) = \nabla \left(\frac{1}{c} \right), \quad (11)$$

где $\vec{s}_0 = (\cos \phi, \sin \phi)$ - единичный вектор, направление которого совпадает с направлением распространения луча. Скорость распространения волн в нижней полуплоскости равна

$$c(z) = \frac{\omega}{k(z)},$$

следовательно,

$$\frac{1}{c(z)} = \frac{k}{\omega} \sqrt{\alpha_1 + \alpha_2 z}.$$

Выполняя дифференцирование в (11), приходим к системе дифференциальных уравнений с неизвестными функциями $\phi(s)$, $z(s)$, где s - натуральный параметр естественной параметризации траектории луча:

$$\begin{cases} -2\dot{\phi} \sin \phi \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 z) + \cos \phi \cdot \alpha_2 \dot{z} = 0, \\ 2\dot{\phi} \cos \phi \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 z) + \sin \phi \cdot \alpha_2 \dot{z} = \alpha_2. \end{cases} \quad (12)$$

Точка над функцией в формулах (12) обозначает дифференцирование по переменной s . Обозначим за β угол преломления луча из верхней полуплоскости в нижнюю. Зная угол падения α , вычислив коэффициент преломления $n = \frac{k(z=-0)}{k(z=+0)}$, этот угол может быть вычислен по формуле Снеллиуса

$$\sin \beta = \frac{\sin \alpha}{\sqrt{\alpha_1}}.$$

Решая систему (12), мы приходим к результату

$$|\cos \phi| = \frac{c |\sin \beta|}{\sqrt{1 + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z}}. \quad (13)$$

Проанализируем полученное выражение. При $z = 0$ угол ϕ должен быть равен $\frac{\pi}{2} - \beta$, откуда находим неизвестную константу $c = 1$.

Зададимся вопросом, есть ли такая точка на траектории, касательная в которой параллельна границе раздела сред. Если бы такая точка существовала, это бы означало, что луч, прошедший в нижнюю полуплоскость, движется так, что начиная с некоторого момента вновь пересекает границу раздела сред, впоследствии отражаясь от нее и преломляясь в верхнюю полуплоскость. Эта точка определяется из уравнения

$$\operatorname{tg} \phi(z) = 0.$$

Пользуясь (13) находим

$$\operatorname{tg} \phi(z) = -\frac{\sqrt{1 - \cos^2 \phi}}{|\cos \phi|},$$

следовательно, z – координата точки, начиная с которой луч начинает свое обратное движение в сторону границы, определяется формулой

$$z^* = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \cos^2 \beta. \quad (14)$$

Вычислим расстояние, которое проходит луч в нижней полуплоскости. Интегрируя тождество $\operatorname{tg} \phi = \frac{dz}{dx}$, имеем

$$x(z) = x(0) - \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \sin \beta \int_{\cos^2 \beta}^{\cos^2 \beta + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z} \frac{dp}{\sqrt{p}},$$

$$x(z) - x(0) = 2 \sin \beta \cdot \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \left[|\cos \beta| - \sqrt{\cos^2 \beta + \frac{\alpha_2}{\alpha_1} z} \right]. \quad (15)$$

Выражение $2 \cdot (x(z^*) - x(0))$ есть не что иное, как длина проекции пути, пройденного лучем в области II на ось x , которую мы обозначим l_x . Подставляя (14) в (15), находим:

$$l_x = \frac{4}{\alpha_2} |\sin \alpha| \sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha}. \quad (16)$$

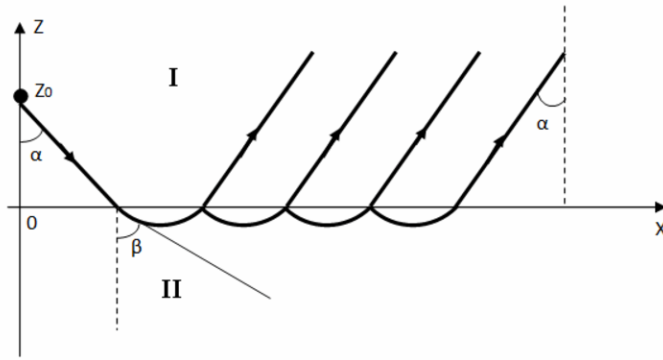


Рис. 3. Многократное переотражение лучей от внутренней границы раздела сред

§4. ВЫДЕЛЕНИЕ ВОЛН ШЕПЧУЩЕЙ ГАЛЕРЕИ

В предыдущем разделе было показано, что в случае падения луча на рассматриваемую границу раздела сред, под углом $0 < \alpha < \alpha_c$, этот луч преломится в область II, и пройдя в ней некоторое расстояние снова достигнет границы раздела, на которой произойдет повторное отражение и преломление в область I. Таким образом, рассматриваемый луч, в результате бесконечного числа переотражений в области II, порождает бесконечный набор лучей вышедших под углом α из области II в область I (см. рис. 3.) Такие лучи образуют волны, называемые волнами шепчущей галереи. В этом разделе мы предложим метод, позволяющий из точного решения рассматриваемой задачи дифракции (9), выделить часть, соответствующую этим волнам.

Перепишем (9) в виде,

$$A^{\text{refl}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp e^{ik[(z+z_0)\sqrt{1-p^2}-px]}}{\sqrt{1-p^2}} \cdot W(p), \quad (17)$$

$$W(p) = \frac{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} v'(t(p)) - ik\sqrt{1-p^2} v(t(p))}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} v'(t(p)) + ik\sqrt{1-p^2} v(t(p))}. \quad (18)$$

Здесь, как и в предыдущих формулах, $t(p) = \left(\frac{k}{\alpha_2}\right)^{\frac{2}{3}}(p^2 - \alpha_1)$. Воспользуемся представлением для функции Эйри $v(t)$

$$v(t) = \frac{w_1(t) - w_2(t)}{2i},$$

и представим $W(p)$ в виде

$$W(p) = Q(p) \cdot F(p), \quad (19)$$

$$Q(p) = \frac{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} w_2'(t(p)) - ik\sqrt{1-p^2} w_2(t(p))}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} w_2'(t(p)) + ik\sqrt{1-p^2} w_2(t(p))}, \quad (20)$$

$$F(p) = \frac{1 - \frac{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} w_1'(t(p)) - ik\sqrt{1-p^2} w_1(t(p))}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} w_2'(t(p)) - ik\sqrt{1-p^2} w_2(t(p))}}{1 - \frac{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} w_1'(t(p)) + ik\sqrt{1-p^2} w_1(t(p))}{(\alpha_2 k^2)^{\frac{1}{3}} w_2'(t(p)) + ik\sqrt{1-p^2} w_2(t(p))}}. \quad (21)$$

Дробное выражение в числителе и знаменателе (21) обозначим $q_-(p)$ и $q_+(p)$ соответственно, тогда вычитая и прибавляя единицу в (21), имеем

$$F(p) = \frac{q_+(p) - q_-(p)}{1 - q_+(p)} + 1. \quad (22)$$

Зададимся целым числом $N > 1$ и преобразуем (22), пользуясь формулой геометрической прогрессии:

$$F(p) = (q_+(p) - q_-(p)) \cdot \sum_{i=0}^{N-1} q_+^i + \frac{q_+(p) - q_-(p)}{1 - q_+(p)} q_+^N + 1. \quad (23)$$

В итоге (17) можно представить в виде суммы из $N + 1$ интегралов:

$$A^{\text{reff}} = \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{A}_i^g + \tilde{A}_N^h + \tilde{A}^r. \quad (24)$$

В силу аналитических свойств подынтегрального выражения в (17), контур интегрирования одновременно всех N интегралов в (24) можно продеформировать так, как это показано на рис. 4. Новый контур \tilde{L} , представим в виде объединения контуров $\tilde{L} = R_- \cup L_- \cup L \cup L_+ \cup R_+$ (см. рис. 4.)

Рассмотрим одно из слагаемых суммы (24), вида \tilde{A}_n^g . Выражение для \tilde{A}_n^g представляет собой интеграл по $\tilde{L} = R_- \cup L_- \cup L \cup L_+ \cup R_+$.

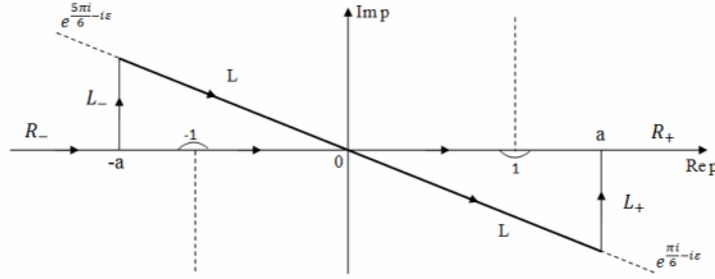


Рис. 4. Деформация контура интегрирования ($a > 1$, $0 < \epsilon < \frac{\pi}{3}$.)

Обозначим A_n^g часть этого интеграла, соответствующую интегралу по контуру L:

$$A_n^g = \frac{1}{2\pi i} \int_L dp \frac{e^{ik[(z+z_0)\sqrt{1-p^2}-px]}}{\sqrt{1-p^2}} \cdot Q(p) \cdot (q_+(p) - q_-(p)) \cdot q_+^n(p), \quad (25)$$

и исследуем поведение этой функции, при $|k| \rightarrow \infty$. Для этого заметим, что на всех точках рассматриваемого контура L верно:

$$|t(p)| \gg 1, \quad \pi < \arg t(p) < \frac{5\pi}{3}. \quad (26)$$

Известно, что при таких значениях функции $t(p)$ верны следующие асимптотические формулы для функций Эйри $w_1(t(p))$ и $w_2(t(p))$:

$$w_1(t(p)) \sim -it^{-\frac{1}{4}} e^{-\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|^{\frac{3}{2}}}\right) \right),$$

$$w_2(t(p)) \sim t^{-\frac{1}{4}} e^{\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}} \left(1 + O\left(\frac{1}{|t|^{\frac{3}{2}}}\right) \right).$$

Следовательно,

$$q_-(p) \sim \frac{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \cdot e^{-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}},$$

$$q_+(p) \sim \frac{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \cdot e^{-\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}}.$$

Введем функции $a_-(p)$ и $a_+(p)$:

$$a_-(p) = \frac{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}},$$

$$a_+(p) = \frac{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

Подставляя полученные асимптотические выражения в (25) и пренебрегая членами более высокого порядка малости по параметру $\frac{1}{k}$, имеем

$$A_n^g \sim \frac{1}{2\pi i} \int_L dp e^{ik \left[(z+z_0)\sqrt{1-p^2} - px + \frac{4(n+1)}{3\alpha_2} (\alpha_1 - p^2)^{3/2} \right]} \cdot (1+a_+)(1-a_+)a_+^n. \quad (27)$$

На концах контура L , подынтегральное выражение убывает экспоненциально, поэтому, не умаляя общности можно положить

$$L = \left\{ p \in \mathbb{C} : p = re^{\frac{i(5\pi-\epsilon)}{6}}, r \in (-\infty, \infty) \right\}.$$

Для оценки интеграла вида (27), при больших значениях параметра k , можно использовать метод перевала. Исходя из фазы экспоненты в подынтегральном выражении (27), запишем уравнение на седловые точки:

$$\frac{p(z+z_0)}{\sqrt{1-p^2}} + x + \frac{4(n+1)}{\alpha_2} (\alpha_1 - p^2)^{\frac{1}{2}} = 0. \quad (28)$$

Решение этого уравнения можно отгадать. Подставим в (28) $p = \sin \alpha$, где α – угол падения луча, однозначно определяемый по координатам точки наблюдения (x, z) (см. рис. 3), и выразим x из получающегося равенства:

$$x = -(z+z_0) \operatorname{tg} \alpha + \frac{4}{\alpha_2} |\sin \alpha| \sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha}. \quad (29)$$

Первый член равенства (29) в точности состоит из суммы длины проекции пути, пройденного падающим лучем, и длины проекции пути луча, вышедшего в полуплоскость I в результате n -кратного преломления от границы раздела со стороны области II. Из формулы (16), полученной в разделе III, следует, что второй член полученного равенства в точности совпадает с длиной проекции пути луча, испытавшего n -кратное преломление в области II. Сумма длин этих

двух проекций совпадает с значением координаты x точки наблюдения. Таким образом, $p = \sin \alpha$ действительно является седловой точкой. Функция l_x в (16) имеет максимум по переменной α на интервале $(0, \alpha_c)$, а на концах интервала обращается в нуль. Поэтому, для фиксированной точки наблюдения могут существовать три ситуации: уравнение на седловую точку имеет два решения, одно или вообще не имеет решений при данном фиксированном n . Таким образом, для получения главного члена разложения A_n^g по степеням $\frac{1}{k}$, контур необходимо продеформировать так, чтобы он проходил через соответствующие седловые точки, затем вычислить приближенное значение интеграла с помощью метода перевала. Проведем эту процедуру, получаем асимптотическое выражение для волны шепчущей галереи:

$$A_n^g \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi ki}} \frac{e^{ikl}}{\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}} \frac{1}{\sqrt{\left| \frac{d^2 \Phi(\sin \alpha)}{dp^2} \right|}} \cdot p^I p^{II} (r^{II})^n, \quad (30)$$

где l – суммарная длина пути пройденного лучем от источника до точки наблюдения:

$$l = (z + z_0) \cos \alpha - x \sin \alpha + \frac{4n}{3\alpha_2} (\alpha_1 - \sin^2 \alpha)^{\frac{3}{2}},$$

$$\Phi(p) = i \left[(z + z_0) \sqrt{1 - p^2} - px + \frac{4n}{3\alpha_2} (\alpha_1 - p^2)^{\frac{3}{2}} \right],$$

$$p^I = \frac{2\sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}, \quad p^{II} = \frac{2\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}},$$

$$r^{II} = \frac{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} - \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}{\sqrt{\alpha_1 - \sin^2 \alpha} + \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}}.$$

Легко проверить, что p^I, p^{II} – коэффициенты прохождения из среды I в II и из среды II в I соответственно, а r^{II} – коэффициент отражения от границы раздела сред внутри области II. Таким образом, присутствие p^I в (30) соответствует однократному прохождению луча из области I в область II, p^{II} – из области II в область I, а $(r^{II})^n$ соответствует n -кратному отражению луча шепчущей галереи от поверхности раздела, со стороны области II (см. рис. 2.)

ЛИТЕРАТУРА

1. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн*. Наука, М., 1972.
2. В. С. Булдырев, *Интерференция коротких волн в задаче дифракции на неоднородном цилиндре произвольного сечения*, ИВУЗ **10**, No. 5 (1967).
3. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции*. ЛГУ, 1974.
4. V. M. Babich, *On asymptotics of a wave field near the origin of an interference head wave*. Electromagnetics in Advanced Applications, 2007.
5. V. B. Philippov, *Point source field near concave boundary*. — Zap. Nauchn. Semin. POMI **354** (2008), 212–219.
6. В. С. Булдырев, *Исследование функций Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре. I*. — Ж. вычисл. матем. физ. **4**, доп. к No. 4 (1964), 275–286
7. V. M. Babich, *Boundary layer approach to construct an interference head wave*. Days on Diffraction (2007).

Matskovskiy A. A. Short wave point source near a unhomogenous half-plane.

We consider the diffraction of waves produced by a point source by unhomogenous halfplane. The square of wave-number inside unhomogenous region is supposed to decrease lineary with increasing the distance from the devision boundary. The main aim of the article is to obtain the asymptotic of a whispering gallery waves as $k \rightarrow \infty$, where k is the wave-number in a homogenous region.

Лаборатория им. П. Л. Чебышева,
С.-Петербургский
государственный университет,
14 линия В. О., дом 29Б,
Санкт-Петербург 199178, Россия
E-mail: androbasm@rambler.ru

Поступило 5 декабря 2012 г.