

В. А. Козлов, С. А. Назаров

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТЕЧЕНИЯ КРОВИ В АРТЕРИЯХ И ВЕНАХ

### ВВЕДЕНИЕ

**1. Предварительное обсуждение предмета исследования.** В настоящей работе предложена одномерная асимптотическая модель течения крови в тонкостенных узких упругих сосудах – артериях и венах. Для последних учтены и их взаимодействие с окружающими тканями и внутренние механизмы препятствия кровотоку, т.е. создана модель венозно-мышечного помпирования, которая и является основным результатом работы. Дело в том, что в отличие от артерий, где быстрое и обильное течение крови обусловлено большим перепадом давления, вызванного интенсивной работой сердца, в венах процессы возврата крови протекают в замедленном режиме, при незначительных перепадах давления (в 7–10 раз более слабых, чем в артериях), но в большей степени именно за счет внешних воздействий: гравитационных сил (способствующих оттоку крови от мозга, но препятствующих ее поднятию в нижних конечностях прямоходящих особей), расширению–сжатию легких в грудине и другой мышечной активности человека или животного (см. монографии [1, 2] и др. публикации по теме).

Как известно (см. [3–5] и др.), даже большие скорости течения жидкостей в очень тонких трубах, к которым как раз и следует отнести кровеносные сосуды, порождают весьма малые числа Рейнольдса, что позволяет отбросить в (нелинейных) уравнениях Навье-Стокса конвективные члены и перейти к линейным уравнениям Стокса. Подчеркнем особо, что по своей природе кровь является многокомпонентной вязкоупругой жидкостью, и потому привлечение единственно нелинейного конвективного члена (как делают некоторые авторы; см. обзор в монографии [2, гл. 3]) не способствуют более адекватному описанию системы кровообращения, тем более ее венозной части. Кроме того,

---

*Ключевые слова:* моделирование тонкостенных кровеносных сосудов, многослойные упругие стенки, уравнение Рейнольдса.

для вен вялость течения и медленная изменяемость внешних воздействий позволяют пренебречь инерционными членами как в системе теории упругости, так и в уравнениях движения жидкости (см. анализ размерностей и масштабирование в п.1 §2). Тем не менее, даже в этом упрощенном варианте определяющих соотношений достаточно неожиданно предельное дифференциальное уравнение типа уравнения Рейнольдса оказывается *параболическим*, что обусловлено исключительно взаимодействием упругих и гидродинамических полей в системе “кровь–сосуд–мышца”. При моделировании артерий, стенки которых в здоровом состоянии обладают исключительно жесткими упругими свойствами, удалить инерционные члены из системы теории упругости нельзя, и поэтому асимптотический анализ системы “кровь–сосуд” (без “мышцы” – см. ниже) приводит к обсуждаемой в §3 системе двух уравнений, *гиперболического* и *параболического*.

Обсудим различия в моделировании вен и артерий. С одной стороны, в случае вены заметное упрощение – возможность исключить одно дифференциальное уравнение из предельной системы – происходит в связи с удалением обоих, гидродинамического и упругого, инерционных членов их исходной задачи, причем малость второго – следствие вялости всего процесса возврата крови к сердцу. С другой стороны, усложнение той же модели вызвано двумя особенностями строения кровеносной системы. Во-первых, из-за достаточно малой относительной толщины стенок вены (в среднем в 10 раз меньшей, чем у артерии) и незначительного перепада давления в ней венозный кровоток осуществляется в значительной мере благодаря мышечному помпированию (в нижних конечностях, например, при ходьбе и беге, в грудине – при дыхании и т.п.), но движение крови по артерии обеспечивается исключительно работой сердца, а физические свойства ее стенок как раз защищают течение от внешних воздействий. В результате для артерий учет окружающей мышечной ткани не нужен; по понятной причине также можно пренебречь гравитационными силами. Вместе с тем, в отличие от артерий, гладкостенных сосудов по своему назначению – быстрой транспортировке крови, специальный механизм *двустворчатых венозных клапанов* противодействует неправильному (в сторону к сердцу) движению крови вдоль вены. Схематически действие этого механизма изображено на рис. 1, а–с. Ввиду своего мембранного строения клапаны не влияют на упругие свойства

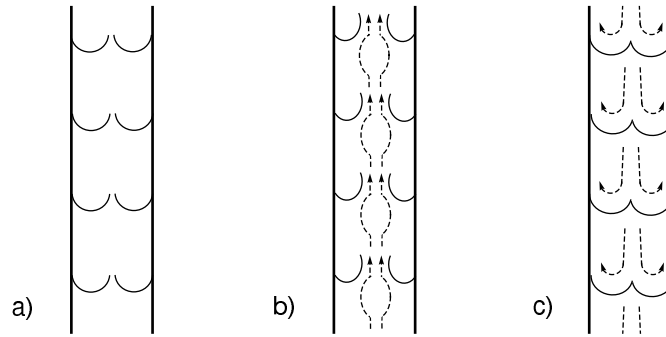


Рис. 1. Схема венозных клапанов (а): прохождение крови в сторону к сердцу (b) и препятствование ее противотоку (с).

стенок вены, однако они требуют постановки *односторонних связей* в предельном одномерном уравнении Рейнольдса (см. § 4).

В современной литературе математический анализ проводится исключительно для артерий и аорты (см., например, [5]), а венозному возврату крови уделяется весьма малое внимание, и в приемлемой степени исследован только эффект пережатия (коллапса) вены (см. [2, гл. 4], [6] и др.), который как раз не затрагивается в данной работе. Подчеркнем, что по восстановлению нормального кровотока слипание стенок быстро исчезает и поэтому в медицинской практике не рассматривается как сколь-нибудь серьезный риск. Кроме того, вены, в которых постоянно находится до 70–80 процентов всей крови, не только исполняют роль главного вместилища сосудистой системы, но, обладая переменной емкостью, под воздействием различных факторов определяют характер кровообращения в целом. Все перечисленные обстоятельства объясняют, почему основная часть статьи посвящена именно моделированию течения крови в венах.

**2. Определяющие соотношения.** В упругом цилиндре  $\Omega = \omega \times (-L, L)$  имеется тонкий круговой канал (ложе кровеносного сосуда)

$$\Theta_h^R = \{x = (y, z) = (y_1, y_2, z) : |z| < L, r = |y| < R(1 + h)\}. \quad (1)$$

Внутренняя поверхность тела  $\Omega_h^R = \Omega \setminus \overline{\Theta_h^R}$  (окружающая мышечная ткань) находится в идеальном контакте с тонкой ( $h \ll L^{-1}R$ ) круговой цилиндрической оболочкой  $\Xi_h^R = \Theta_h^R \setminus \overline{\Theta_0^R}$  (стенка сосуда), а по каналу  $\Theta_0^R$  (протока сосуда, заданная формулой (1) с  $h = 0$ ) осуществляется течение крови, подчиненное по предположению уравнениям Навье-Стокса

$$\partial_t v - \nu \Delta v + (v \cdot \nabla)v + \nabla p = g, \quad -\nabla \cdot v = 0 \quad \text{в } \Theta_0^R. \quad (2)$$

Здесь  $\nu > 0$  – коэффициент динамической вязкости жидкости, точкой обозначено скалярное произведение в евклидовом пространстве  $\mathbb{R}^3$ ,  $\nabla = \text{grad}$ ,  $\nabla \cdot = \text{div}$ ,  $\Delta = \nabla \cdot \nabla$  – оператор Лапласа,  $\partial_t = \partial/\partial t$  – производная по времени  $t$ ,  $v$  – вектор скоростей,  $p$  – давление, и  $g$  – постоянный вектор ускорения свободного падения (его направление не обязательно согласовано с осью  $z$ , а проекция  $g_z$  на эту ось может быть как положительной, так и отрицательной; ср. п. 2 § 4).

Упругий материал мышцы  $\Omega_h^R$  считается *трансверсально изотропным* с осью изотропии  $z = x_3$ , т.е. декартовы компоненты тензоров напряжений  $\{\sigma_{mn}\}$  и деформаций  $\{\varepsilon_{mn}\}$  связаны следующим законом Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{jk} &= 2\mu\varepsilon_{jk} + \delta_{j,k}(\lambda\varepsilon_{11} + \lambda\varepsilon_{22} + \alpha\varepsilon_{33}), \quad j, k = 1, 2, \\ \sigma_{j3} &= \sigma_{3j} = 2\beta\varepsilon_{3j}, \quad j = 1, 2, \\ \sigma_{33} &= \vartheta\varepsilon_{33} + \alpha(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}). \end{aligned} \quad (3)$$

При этом  $\delta_{j,k}$  – символ Кронекера,  $\lambda \geq 0$  и  $\mu > 0$  – постоянные Ламе в плоскостях, перпендикулярных оси  $z$ ,  $\beta > 0$  – продольный модуль сдвига, а упругие модули  $\alpha \geq 0$  и  $\vartheta > 0$  далее не востребованы. Деформации вычисляются по обычным линейаризованным формулам Коши

$$\varepsilon_{mn} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_m}{\partial x_n} + \frac{\partial u_n}{\partial x_m} \right), \quad m, n = 1, 2, 3, \quad (4)$$

где  $u_j$  и  $u_3$  – проекции вектора смещений на оси  $x_j = y_j$  и  $x_3$ .

На внутренней поверхности стенки сосуда назначены условия динамического прилипания

$$v = \partial_t u \quad \text{на } \Gamma_0^R. \quad (5)$$

Упомянутая поверхность задана формулой  $\Gamma_h^R = \{x \in \partial\Theta_h^R : |z| < L\}$  с параметром  $h = 0$ .

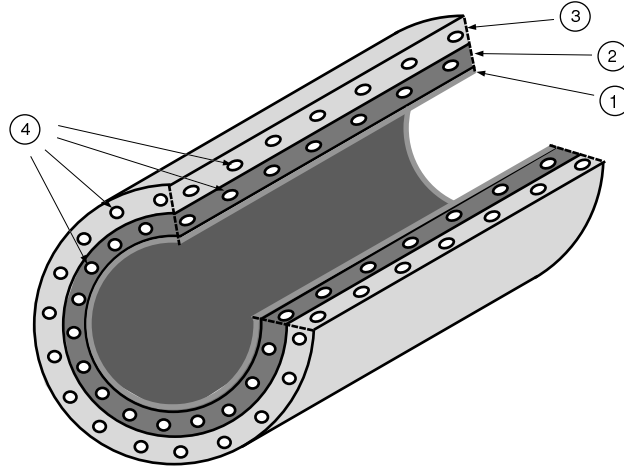


Рис. 2. Стенки кровеносных сосудов, состоящие из интимы — внутренней средней оболочки (2) и адвентиции — внешней оболочки (3). Первая является тонкой пленкой, но последние две содержат семейства коллагеновых волокон, сечения (4) которых изображены на рис. 2, а схема расположения — на рис. 3.

Условия идеального контакта<sup>1</sup> вдоль поверхности  $\Gamma_h^R$  выписывать не будем, а воспользуемся результатами [7] асимптотического анализа упругих композитных стенок сосудов и заменим их (условия контакта) условиями в напряжениях на предельной ( $h = 0$ ) поверхности  $\Gamma_0^R$ . Дело в том, что стенки артерий и вен тонкие, но эластичные и слабо подверженные разрыву в здоровом состоянии (впрочем легко иссекаемые скальпелем). Эти наблюдения позволяют считать упругий материал, заполняющий объем  $\Omega_0^R$ , однородным, а реакцию тонкой

<sup>1</sup>На самом деле контакт, разумеется, не идеальный: в ложе артерии и вены имеются разрыхленные прослойки, способствующие правильному функционированию этих кровеносных сосудов. Так, они отгораживают стенки артерий от внешних воздействий и препятствуют поперечному растяжению вен, в связи с чем помпирование крови в них приходится в основном на фазу сокращения (сжатия) мышцы (см. п. 3 § 4). Модель многослойных стенок сосудов, разработанная в публикации [7], позволяет учесть и упомянутые прослойки, однако их в данной статье отдельно не рассматриваем.

оболочки  $\Xi_h^R$  на растяжение в продольном и круговом направлениях (она, конечно же, никак не реагирует на изгиб; ср. абсолютно неправильную модель стенки сосуда в статье [8]) учтем, приняв следующие соотношения на границе протоки сосуда  $\Gamma_0^R$ :

$$\begin{aligned}\sigma_{rr} + h(\kappa_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \kappa_{\varphi z}\varepsilon_{zz}) + hR\gamma_w\partial_t^2 u_r &= \gamma_b F_r, \\ \sigma_{\varphi r} - h\frac{\partial}{\partial\varphi}(\kappa_{\varphi\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \kappa_{\varphi z}\varepsilon_{zz}) - hR\frac{\partial}{\partial z}\kappa\varepsilon_{\varphi z} + hR\gamma_w\partial_t^2 u_\varphi &= \gamma_b F_\varphi, \\ \sigma_{zr} - hR\frac{\partial}{\partial z}(\kappa_{z\varphi}\varepsilon_{\varphi\varphi} + \kappa_{zz}\varepsilon_{zz}) - h\frac{\partial}{\partial\varphi}\kappa\varepsilon_{z\varphi} + hR\gamma_w\partial_t^2 u_z &= \gamma_b F_z.\end{aligned}\quad (6)$$

Укажем механическую интерпретацию соотношений (6): усилия ( $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi r}$ ,  $\sigma_{zr}$ ) и  $\gamma_b F$ , приложенные к стенке сосуда со стороны мышцы и жидкости соответственно, уравновешены внутренними напряжениями в стенке сосуда. Кроме того, поясним обозначения. Во-первых,  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\varphi r}$ ,  $\sigma_{zr}$  и  $\varepsilon_{\varphi\varphi}$ ,  $\varepsilon_{zz}$ ,  $\varepsilon_{\varphi z}$  — компоненты тензора напряжений в мышце и тензора деформаций стенки, записанные в цилиндрической системе координат  $(r, \varphi, z)$ , причем  $y_1 = r \cos \varphi$  и  $y_2 = \sin \varphi$ ,

$$\begin{aligned}\varepsilon_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{r\varphi} = \varepsilon_{\varphi r} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r} \right), \\ \varepsilon_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \\ \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{zr} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \\ \varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{z\varphi} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right), \quad \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},\end{aligned}\quad (7)$$

$u_r$ ,  $u_\varphi$  и  $u_z$  — проекции вектора смещений на оси упомянутой системы, а напряжения находятся согласно закону Гука (см. формулы (3) и далее п. 4§2). Во-вторых,  $\gamma_b > 0$  и  $\gamma_w > 0$  — плотности крови и упругого материала стенки, а  $F$  — вектор гидродинамической силы с компонентами

$$\begin{aligned}F_r &= p + \nu \frac{\partial v_r}{\partial r}, \quad F_\varphi = \frac{\nu}{2} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial v_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial v_\varphi}{\partial r} - \frac{v_\varphi}{R} \right), \\ F_z &= \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right).\end{aligned}\quad (8)$$

Наконец, в левых частях уравнений (6) фигурируют элементы симметричной положительно определенной матрицы (постоянных) эффективных упругих модулей [7] стенки сосуда

$$h \begin{pmatrix} \kappa_{\varphi\varphi} & \kappa_{\varphi z} & 0 \\ \kappa_{z\varphi} & \kappa_{zz} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Строение матрицы указывает на ортотропию осредненных свойств стенки, представляющей собой довольно сложный композит (рис. 2 и 3) как в случае артерии, так и в случае вены (см., например, монографию [2, гл. 3] и статьи [9–11]). Главными осями ортотропии служат оси  $\varphi$  и  $z$ . Явные формулы для эффективных модулей приведены в публикации [7]. Они получены на основе процедур осреднения периодических композитов и понижения размерности в тонкостенных конструкциях, а симметричное строение ламинированной стенки здорового и неповрежденного сосуда обеспечивает блочно-диагональную структуру матрицы (9). Ее нижний правый элемент  $h\kappa$ , интерпретируемый как осредненный модуль сдвига, вместе с элементами  $h\kappa_{zz}$  и  $h\kappa_{z\varphi} = h\kappa_{\varphi z}$  исчезает из финальных формул, где, как и следовало ожидать, главенствующую роль играет модуль на растяжении в окружном направлении

$$K = h\kappa_{\varphi\varphi}. \quad (10)$$

Подчеркнем, что за счет расширения в радиальном направлении объем здоровой вены может возрасти почти в два раза (см., например, описание функционирования венозной системы человека в монографии [1]).

## §1. АСИМПТОТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

**1. Анализ размерностей и масштабирования.** Основными размерными параметрами в системе “кровь-сосуд-мышца” служат полу-длина  $L$  рассматриваемого участка сосуда (сравнимая с характерным размером сечения  $\omega$  мышцы), временной период  $T$ , а также  $\{M_w, \gamma_w\}$  и  $\{M_m, \gamma_m\}$  – пары (*модуль упругости, плотность*) для материалов стенки сосуда и окружающей ткани. Для артерии следует считать, что обратная величина  $1/T$  – частота пульса, а для вены в качестве  $T$  приходится брать период  $T_m$  нагружения мышцы или величину  $[p]^{-1/2}L$ , где  $[p] > 0$  – (малый) перепад давления на участке  $[-L, L] \ni z$ . В случае артерии  $T = T_a$  – малый параметр, а для вены  $T = T_v$  – большой

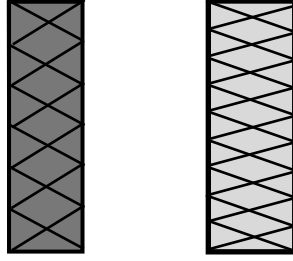


Рис. 3. Приближительная схема расположения коллагеновых волокон в средней (а) и внешней (б) оболочках. Принципиальное значение имеет различие углов намотки, описанное, например в [2, гл. 3] и [9–11]. Процедура осреднения подобных композитов разработана в [12, 13] и реализована в [7] для определения эффективных упругих свойств стенок кровеносных сосудов.

параметр: именно это обстоятельство, точнее формула  $T_a/T_v \ll 1$ , и предопределяет различия в асимптотическом анализе упомянутых кровеносных сосудов.

Помимо малого безразмерного параметра  $h > 0$ , относительной толщины стенки сосуда, возникает еще один, опять-таки безразмерный, натуральный малый параметр задачи

$$\delta = R/L, \quad (11)$$

а именно, относительный радиус сосуда. Наконец, введем времениподобный параметр

$$\tau = \delta^2 t. \quad (12)$$

Малость безразмерных чисел Рейнольдса и Стокса

$$\text{Re} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{T} \delta L^2 \quad \text{и} \quad \text{St} = \frac{1}{\nu} \frac{1}{T} \delta^2 L^2 = \delta \text{Re} \quad (13)$$

обеспечивает ламинарность и медленную изменяемость течения крови, т.е. позволяет отбросить из уравнений Навье-Стокса (2) инерционный  $\partial_t v$  и конвективный  $(v \cdot \nabla)v$  члены. Интересно, что в режиме нормальной работы артерий и вен величины  $\delta_a/T_a$  и  $\delta_v/T_v$  имеют одинаковые порядки. Таким образом, предположение  $\text{Re} \ll 1$  означает, что рассматриваемый прямолинейный участок артерии расположен на некотором удалении от сердца, т.е. за изгибом аорты, где эффекты



турбулентности затухают и некоторая стабилизация потока означает, что его изменимость можно описывать при помощи “медленного” времени (12). Подчеркнем, что параметры  $\delta_a$  и  $\delta_v$  для артерии и вены находятся в отношении  $\delta_a \gg \delta_v$ .

Обсудим три числа Вомерслея

$$Wb = (St)^{1/2}, \quad Ww = \frac{\delta}{T} \left( \frac{\gamma_w}{M_w} \right)^{1/2}, \quad Wm = \frac{\delta}{T} \left( \frac{\gamma_m}{M_m} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

жидкостное и два упругих – для материалов стенки сосуда и окружающей мышцы. Первое из них мало ввиду ограничений на числа Стокса и Рейнольдса из формулы (13). В случае вены оба упругих числа Вомерслея также оказываются малыми, и поэтому уравнения теории упругости можно считать квазистатическими – зависящими от  $\tau$  параметрически. В случае артерии числом Вомерслея  $Ww$  пренебречь нельзя (напоминаем, что отношение  $T_v/T_a$  велико), однако окружающая ткань в расчет не принимается из-за исключительной жесткости на растяжение упругих стенок артерий. Поэтому далее полагаем  $Wm = 0$ , т.е. исключаем инерционный член  $\gamma_m \partial_t^2 u$  из системы теории упругости в теле  $\Omega_h^R$ , но проводим асимптотический анализ при  $Ww > 0$ , переходя к  $Ww = 0$  только при окончательной обработке асимптотики течения крови в вене.

Несмотря на тонкостенность вены также являются очень прочным материалом (недаром жилы животных еще в недавние времена применялись в качестве скрепляющих и связующих средств – нитей, веревья и пр.). Таким образом, будем считать, что даже при наличии малого множителя  $h$  эффективные упругие модули, составляющие матрицу (9), сравнимы по порядку с упругими модулями в законе Гука (8), т.е.

$$K = M_w \approx M_m. \quad (15)$$

Вместе с тем, эксперименты (см. [1, 2] и др.) показывают, что упругий модуль  $K$  стенки вены на растяжение в несколько раз превосходит постоянную Ламе  $\mu$  (см. формулы (10) и (3)), что, в частности, вызвано упоминавшейся ранее рыхлостью прослойки (венозного ложа) в системе “вена-мышца”.

Объем коллагеновых волокон, определяющих в целом упругие свойства стенок сосудов (см. явные формулы в работе [7]), в несколько раз больше в артериях, чем в венах (ср. монографию [2]). Поэтому стенки артерий, которые к тому же имеют большую толщину, являются более жесткими, чем стенки вен, а значит, соотношение (15) превращается

в такое:

$$K = M_w \gg M_m. \quad (16)$$

Именно это сравнение позволяет исключить последнюю компоненту при моделировании системы “кровь-артерия-мышца”.

Сведем полудлину  $L$  к единице, т.е. сделаем координаты и все геометрические параметры безразмерными. Наконец, предположим, что внешние нагрузки и внутренние напряжения создают в сплошном (без канала сосуда) теле  $\Omega$  поля смещений  $u^\bullet(y, z; \tau)$  и напряжений  $\sigma^\bullet(y, z; \tau)$ , характеризующиеся медленной (в сравнении с большим параметром  $\delta^{-1}$ ; см. формулу (11)) изменяемостью во всех пространственных направлениях и во времени (12).

**2. Асимптотические анзацы.** Применим к сформулированной в п.2 §1 задаче асимптотические методы [14] и [3, 4] (см. также монографию [15]). В первую очередь введем растянутые поперечные координаты

$$\eta = \delta^{-1}y, \quad (17)$$

но сохраним за продольной координатой  $z$  прежний масштаб. Замена переменных  $(y, z) \mapsto (\eta, z)$  сопровождается асимптотическим расщеплением трехмерной задачи теории упругости на плоскую (для вектора  $u_\ddagger = (u_1, u_2)$  поперечных смещений) и антиплоскую (для скаляра  $u_3$  продольного смещения). Некоторое более сложное расщепление допускают и уравнения Стокса

$$-\nu \Delta v + \nabla p = g, \quad -\nabla \cdot v = 0 \quad \text{в } \Theta_0^R \quad (18)$$

(ср. нестационарные уравнения Навье-Стокса без инерционного и конвективного членов). Примем сопутствующие асимптотические анзацы

$$u^\delta(y, z; \tau) = u^\bullet(y, z; \tau) + \delta u^0(\eta, z; \tau) + \delta^2 u'(\eta, z; \tau) + \dots, \quad (19)$$

$$\sigma^\delta(y, z; \tau) = \sigma^\bullet(y, z; \tau) + \sigma^0(\eta, z; \tau) + \delta \sigma'(\eta, z; \tau) + \dots, \quad (20)$$

$$p^\delta(y, z; \tau) = x \cdot g + p^0(z; \tau) + \delta p'(\eta, z; \tau) + \delta^2 p''(\eta, z; \tau) \dots, \quad (21)$$

$$v^\delta(y, z; \tau) = \delta^2 v^0(\eta, z; \tau) + \delta^3 v'(\eta, z; \tau) + \dots \quad (22)$$

Многоточием обозначены члены, несущественные для предпринимаемого асимптотического анализа. Первые слагаемые в правых частях (19), (20) и (21), как уже упоминалось, порождены внешними воздействиями – соответственно деформацией мышц и силой тяжести. Остальные слагаемые в анзацах (19)–(22) подлежат определению при помощи асимптотических процедур [14] и [3, 4], причем множители при

разных членах, т.е. степени малого параметра (11), заранее подобраны так, чтобы эти процедуры привели к построению предельной задачи.

**3. Анализ жидкостных составляющих.** Подставим разложения (21) и (23) в соотношения (18) и (5), а в последнем из них учтем формулы (19) и (12). Соберем коэффициенты при одинаковых степенях малого параметра  $\delta$  и получим рекуррентную последовательность краевых задач в единичном круге  $\mathbb{B} = \{\eta \in \mathbb{R}^2; \rho := |\eta| < 1\}$  (растянутое сечение протоки сосуда). Поскольку  $g$  – постоянный вектор и верны равенства

$$\nabla(x \cdot g) = g, \quad \nabla_\eta p^0 = 0,$$

первая из задач выглядит следующим образом:

$$-\nu \Delta_\eta v_\ddagger^0 + \nabla_\eta p' = 0, \quad -\nabla_\eta \cdot v_\ddagger^0 = 0 \text{ в } \mathbb{B}, \quad v_\ddagger^0 = \partial_\tau u_\ddagger^\bullet|_{y=0} \text{ на } \partial\mathbb{B}, \quad (23)$$

$$-\nu \Delta_\eta v_3^0 + \partial_z p^0 = 0 \text{ в } \mathbb{B}, \quad v_3^0 = \partial_\tau u_3^\bullet|_{y=0} \text{ на } \partial\mathbb{B}. \quad (24)$$

Здесь  $\nabla_\eta = (\partial/\partial\eta_1, \partial/\partial\eta_2)$  и  $\Delta_\eta = \nabla_\eta \cdot \nabla_\eta$  – градиент и оператор Лапласа в координатах  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  на плоскости  $\mathbb{R}^2$ , а  $u^\bullet|_{y=0}$  – след  $u^\bullet(0, 0, z; \tau)$  на оси цилиндра  $\Theta_0^R$  вектора смещений в мышечной ткани, порожденного внешними воздействиями и по определению гладкого и заданного всюду в сплошном теле  $\Omega$  (см. конец п.1 §2). Поскольку правая часть  $\partial_\tau u_\ddagger^\bullet(0, 0, z; \tau)$  краевого условия в плоской задаче Стокса (23) не зависит от поперечных переменных (17), имеем

$$v_\ddagger^0(\eta, z; \tau) = \partial_\tau u_\ddagger^\bullet(0, 0, z; \tau), \quad p'(\eta, z; \tau) = p'(z; \tau).$$

Кроме того, решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона (24) принимает вид

$$v_3^0(\eta, z; \tau) = \partial_\tau u_3^\bullet(0, 0, z; \tau) + \frac{1}{4\nu}(\rho^2 - 1)\partial_z p^0(z; \tau). \quad (25)$$

Итак,

$$v^0(\eta, z; \tau) = \partial_\tau u^\bullet(0, 0, z; \tau) + \frac{1}{4\nu}(\rho^2 - 1)\partial_z p^0(z; \tau)e_3, \quad (26)$$

где  $e_3 = (0, 0, 1)$  – орт оси  $x_3 = z$ .

Множителем при  $\partial_z p^0(z; \tau)$  в правой части (26) служит классический профиль Пуазейля, т.е. согласно представлению (22) поток крови

через сечение сосуда вычисляется по формуле

$$\delta^2 \int_{\mathbb{B}} v_3^\delta(\delta\eta, z; \tau) d\eta = \pi\delta^4 \partial_\tau u_3^\bullet(0, 0, z; \tau) - \frac{\pi\delta^4}{8\nu} \partial_z p^0(z; \tau) + O(\delta^5). \quad (27)$$

Коэффициент  $\delta^2$  при первом интеграле учитывает проведенное растяжение координат.

Очередная задача из упомянутой рекуррентной последовательности выглядит так:

$$-\nu \Delta_\eta v_\ddagger' + \nabla_\eta p'' = 0, \quad -\nabla_\eta \cdot v_\ddagger' = \partial_z v_3^0 \text{ в } \mathbb{B}, \quad (28)$$

$$v_\ddagger' = \partial_\tau u_\ddagger' + (\eta \cdot \nabla_y) \partial_\tau u_\ddagger^\bullet|_{y=0} \text{ на } \partial\mathbb{B},$$

$$-\nu \Delta_\eta v_3' = -\partial_z p' \text{ в } \mathbb{B}, \quad v_3' = \partial_\tau u_3' + (\eta \cdot \nabla_y) \partial_\tau u_3^\bullet|_{y=0} \text{ на } \partial\mathbb{B}. \quad (29)$$

Сами решения задач (28) и (29) далее не понадобятся. Выпишем условие разрешимости плоской задачи Стокса (28), в которой фигурирует младший член  $\delta^2 p''(\eta, z; \tau)$  анзаца (21):

$$\begin{aligned} 0 &= - \int_{\mathbb{B}} \nabla_\eta \cdot v_\ddagger'(\eta, z; \tau) d\eta + \int_{\partial\mathbb{B}} v_\rho'(\eta, z; \tau) ds_\eta \\ &= \int_{\mathbb{B}} \partial_z v_3^0(\eta, z; \tau) d\eta + \int_{\mathbb{S}} (\partial_\tau u_\rho'(\eta, z; \tau) \\ &\quad + \eta \cdot (\eta \cdot \nabla_y) \partial_\tau u_\ddagger^\bullet(0, 0, z; \tau)) d\varphi. \end{aligned} \quad (30)$$

Подчеркнем, что  $\eta = (\eta_1, \eta_2)$  – единичный вектор внешней нормали на единичной окружности  $\mathbb{S} = \partial\mathbb{B}$ ,  $d\varphi$  – элемент длины дуги на ней,  $v_\rho'$  – радиальная компонента вектора скоростей,

$$\begin{aligned} v_\rho'(\eta, z; \tau) &= v_1'(\eta, z; \tau) \cos \varphi + v_2'(\eta, z; \tau) \sin \varphi, \\ v_\varphi'(\eta, z; \tau) &= -v_1'(\eta, z; \tau) \sin \varphi + v_2'(\eta, z; \tau) \cos \varphi, \end{aligned} \quad (31)$$

а равенство (30) возникло в результате применения формулы Остроградского–Гаусса в задаче (28). Принимая во внимание формулы Коши (4) для деформаций

$$\varepsilon_{ii}^\bullet(y, z; \tau) = \frac{\partial u_i^\bullet}{\partial y_i}(y, z; \tau), \quad i = 1, 2, \quad \varepsilon_{zz}^\bullet(y, z; \tau) = \frac{\partial u_3^\bullet}{\partial z}(y, z; \tau),$$

а также простые интегралы

$$\int_{\mathbb{S}} \eta_1^2 d\varphi = \int_{\mathbb{S}} \eta_2^2 d\varphi = \pi, \quad \int_{\mathbb{S}} \eta_1 \eta_2 d\varphi = 0,$$

подставим соотношение (25) в условие разрешимости (30) (без средней части) и получим следующее дифференциальное уравнение для функции  $p^0$ :

$$0 = -\frac{\pi}{8\nu} \partial_z^2 p^0(z; \tau) + \pi \partial_\tau \varepsilon_{zz}^\bullet(0, 0, z; \tau) + \partial_\tau \int_{\mathbb{S}} u'_\rho(\eta, z; \tau) d\varphi + \pi \partial_\tau (\varepsilon_{11}^\bullet(0, 0, z; \tau) + \varepsilon_{22}^\bullet(0, 0, z; \tau)). \quad (32)$$

Отметим, что множитель при  $\partial_z^2 p^0(z; \tau)$  найден по формуле

$$\frac{1}{4\nu} \int_{\mathbb{B}} (\rho^2 - 1) d\eta = \frac{\pi}{2\nu} \int_0^1 (\rho^2 - 1) \rho d\rho = -\frac{\pi}{8\nu}.$$

Осталось вычислить интеграл по окружности от  $u'_\rho$ , который в силу вытекающего из (7) равенства

$$\varepsilon'_{\varphi\varphi}|_{\rho=1} = \partial_\varphi u'_\varphi|_{\rho=1} + u'_\rho|_{\rho=1}$$

и изотропного закона Гука (ср. первую строку списка (3))

$$\sigma'_{\rho\rho} = 2\mu\varepsilon'_{\rho\rho} + \lambda(\varepsilon'_{\rho\rho} + \varepsilon'_{\varphi\varphi}), \quad \sigma'_{\varphi\varphi} = 2\mu\varepsilon'_{\varphi\varphi} + \lambda(\varepsilon'_{\rho\rho} + \varepsilon'_{\varphi\varphi}) \quad (33)$$

приобретает вид

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{S}} u'_\rho(\eta, z; \tau) d\varphi &= \int_{\mathbb{S}} \varepsilon'_{\varphi\varphi}(\eta, z; \tau) d\varphi \\ &= \frac{1}{2\mu} \int_{\mathbb{S}} \left( \sigma'_{\varphi\varphi}(\eta, z; \tau) - \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} (\sigma'_{\varphi\varphi}(\eta, z; \tau) + \sigma'_{\rho\rho}(\eta, z; \tau)) \right) d\varphi. \end{aligned} \quad (34)$$

**4. Анализ упругих составляющих.** Как уже упоминалось в п. 2 § 2, растяжение координат в поперечных направлениях приводит к расщеплению трехмерной задачи теории упругости. Таким образом, для определения нормального смещения  $u'_\rho$  (ср. первую формулу (31)) в интеграле из правой части (32) требуется решить плоскую задачу теории

упругости во внешности круга. Ввиду предположения о трансверсальной изотропии материала мышцы рассматриваемая плоская среда становится изотропной. Уравнения равновесия, т.е. двумерную систему Ламе

$$-\frac{\partial}{\partial \eta_1} \sigma'_{11} - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \sigma'_{12} = 0, \quad -\frac{\partial}{\partial \eta_1} \sigma'_{21} - \frac{\partial}{\partial \eta_2} \sigma'_{22} = 0 \text{ на } \mathbb{R}^2 \setminus \bar{\mathbb{B}} \quad (35)$$

(напоминаем, что слагаемые  $\gamma_m \partial_t^2 u'_i$  отброшены ввиду малости третьего числа Вомерслея (14)) нужно дополнить краевыми условиями на окружности  $\mathbb{S} = \partial \mathbb{B}$ , которые выведем из уравнений (6) движения стенок сосуда. Сначала заметим, что в силу формул (8) и (21) правые части (6) приобретают вид

$$\begin{aligned} \gamma_b F_r^\delta(y, z; \tau) &= \gamma_b (z g_3 + p^0(z; \tau)) + \dots, \\ \gamma_b F_\varphi^\delta(y, z; \tau) &= \dots, \quad \gamma_b F_z^\delta(y, z; \tau) = \dots, \end{aligned} \quad (36)$$

где  $g_3$  – проекция силы тяжести на продольную ось  $x_3$  сосуда, а многочлием, как обычно, обозначены младшие члены. Кроме того, из левой части (6) можно удалить деформации  $\varepsilon'_{zz} = \partial_z u'_3$ , так как вдоль оси  $z$  растяжение не проводилось, а значит, производные по поперечным направлениям преваляют над  $\partial_z$ . Иными словами, в левых частях первых двух строк (6) остаются выражения

$$\sigma'_{\rho\rho} + K \varepsilon'_{\varphi\varphi} + G \partial_\tau^2 u'_\rho \quad \text{и} \quad \sigma'_{\varphi\rho} - K \partial_\varphi \varepsilon'_{\varphi\varphi} + G \partial_\tau^2 u'_\varphi, \quad (37)$$

в которых

$$G = hR\delta^5 \gamma_w. \quad (38)$$

Отметим, что третья строка системы (6) не понадобится. Наконец, нужно еще учесть упругие поля  $u^\bullet$  и  $\sigma^\bullet$ , порожденные внешними воздействиями. Они оставляют аналогичные (37) невязки, которые перенесем направо и в результате при учете формул (36)–(38) получим соотношения

$$\begin{aligned} \sigma'_{\rho\rho} + K \varepsilon'_{\varphi\varphi} + G \partial_\tau^2 u'_\rho &= \gamma_b (z g_3 + p^0) - \sigma_{\rho\rho}^\bullet - K \varepsilon_{\varphi\varphi}^\bullet, \\ \sigma'_{\varphi\rho} - K \partial_\varphi \varepsilon'_{\varphi\varphi} + G \partial_\tau^2 u'_\varphi &= -\sigma_{\varphi\rho}^\bullet + K \partial_\varphi \varepsilon_{\varphi\varphi}^\bullet \quad \text{на } \mathbb{S}. \end{aligned} \quad (39)$$

Несмотря на усложненное строение краевых условий в задаче (35), (39), можно, пользуясь классическими формулами (см., например, [16, §11.2]) для решения задачи теории упругости в плоскости, ослабленной круговым отверстием, найти явные выражения для величин  $u'_\rho$  и

$\varepsilon'_{\varphi\varphi}$  на окружности  $\mathbb{S}$  и тем самым вычислить интеграл (34). Дело в том, что согласно связям

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{\bullet} &= \sigma_{11}^{\bullet} \cos^2 \varphi - 2\sigma_{12}^{\bullet} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{22}^{\bullet} \sin^2 \varphi, \\ \sigma_{\varphi\varphi}^{\bullet} &= \sigma_{11}^{\bullet} \sin^2 \varphi + 2\sigma_{12}^{\bullet} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{22}^{\bullet} \cos^2 \varphi,\end{aligned}\quad (40)$$

$$\sigma'_{\varphi\rho} = \sigma_{11}^{\bullet} \sin \varphi \cos \varphi + \sigma_{12}^{\bullet} (\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi) - \sigma_{22}^{\bullet} \sin \varphi \cos \varphi,$$

аналогичным формулам (7) для полярных компонент тензора деформаций и формулам (31) для компонент  $u_{\rho}^{\bullet}$  и  $u_{\varphi}^{\bullet}$  вектора смещений, решение системы уравнений (35) в соответствии с краевыми условиями (39) следует искать в виде<sup>2</sup>

$$\begin{aligned}\sigma'_{\rho\rho} &= a_1 \rho^{-2} + 2a_2 \rho^{-2} \cos 2\varphi + a_3 \rho^{-4} \cos 2\varphi + a_4 \rho^{-4} \sin 2\varphi, \\ \sigma'_{\varphi\varphi} &= -a_1 \rho^{-2} - a_3 \rho^{-4} \cos 2\varphi - a_4 \rho^{-4} \sin 2\varphi, \\ \sigma'_{\varphi\rho} &= a_2 \rho^{-2} \sin 2\varphi + a_3 \rho^{-4} \sin 2\varphi - a_4 \rho^{-2} \cos 2\varphi.\end{aligned}\quad (41)$$

Коэффициенты  $a_q(z; \tau)$ ,  $q = 1, \dots, 4$ , определяются в результате вычисления деформации  $\varepsilon'_{\varphi\varphi}$  и смещений  $u'_{\rho}$ ,  $u'_{\varphi}$ , подстановки полученных выражений вместе с анзацами (41) в краевые условия (39) и приравнявая слева и справа коэффициентов при 1 и  $\cos 2\varphi$ ,  $\sin 2\varphi$ . Возникающая тем самым система линейных алгебраических уравнений с четырьмя неизвестными имеет решение, однако для вычисления интеграла (34) требуется найти только коэффициент  $a_1(z; \tau)$  – интегралы от  $\cos 2\varphi$  и  $\sin 2\varphi$  по окружности  $\mathbb{S}$  аннулируются. Обозначив многоточием любую линейную комбинацию функций  $\cos 2\varphi$  и  $\sin 2\varphi$ , в соответствии с законом Гука (33) переписываем первые два соотношения (40) в виде

$$\begin{aligned}\sigma_{\rho\rho}^{\bullet} &= \frac{1}{2}(\sigma_{11}^{\bullet} + \sigma_{22}^{\bullet}) + \dots, \quad \sigma_{\varphi\varphi}^{\bullet} = \frac{1}{2}(\sigma_{11}^{\bullet} + \sigma_{22}^{\bullet}) + \dots \\ \Rightarrow \quad \varepsilon_{\varphi\varphi}^{\bullet} &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^{\bullet} + \varepsilon_{22}^{\bullet}) + \dots = \frac{1}{4(\lambda + \mu)}(\sigma_{11}^{\bullet} + \sigma_{22}^{\bullet}) + \dots\end{aligned}$$

и также получаем, что

$$\sigma'_{\rho\rho} = a_1 \rho^{-2} + \dots, \quad \sigma'_{\varphi\varphi} = -a_1 \rho^{-2} + \dots$$

<sup>2</sup>Нетрудно убедиться в том, что напряжения, фигурирующие в (41) коэффициентами при  $a_1$ ,  $a_2$  и  $a_3$ ,  $a_4$ , удовлетворяют системе Ламе (35), переписанной в полярных координатах.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \varepsilon'_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{2\mu}\sigma'_{\varphi\varphi} + \dots = -\frac{a_1}{2\mu}\rho^{-2} + \dots; \\ \varepsilon'_{\varphi\varphi} = \partial_\varphi u'_\varphi + u'_\rho \text{ на } \mathbb{S} &\Rightarrow u'_\rho = -\frac{a_1}{2\mu} + \dots \text{ на } \mathbb{S}. \end{aligned}$$

В результате обнаруживаем, что для интеграла (34) верна формула

$$\bar{u}(z; \tau) := \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{S}} u'_\rho(\eta, z; \tau) d\varphi = -\frac{1}{2\mu} a_1(z; \tau), \quad (42)$$

а вытекающее из первой строки (39) уравнение для коэффициента  $a_1(z; \tau)$  при использовании новой неизвестной (42) выглядит следующим образом:

$$-2\mu\bar{u} + K\bar{u} + G\partial_\tau^2 \bar{u} - \gamma_b \bar{p} = \gamma_b z g_3 - (K + 2(\lambda + \mu))\bar{\varepsilon}^\bullet. \quad (43)$$

Здесь введены обозначения

$$\bar{p}(z; \tau) = p^0(z; \tau), \quad (44)$$

$$\bar{\varepsilon}^\bullet(z; \tau) = \frac{1}{2}(\varepsilon_{11}^\bullet(0, 0, z; \tau) + \varepsilon_{22}^\bullet(0, 0, z; \tau)), \quad (45)$$

причем  $\bar{\varepsilon}^\bullet(z; \tau)$  – деформация равномерного сжатия/растяжения мышцы на оси  $z$ .

Наконец, вместо уравнения (32) получаем

$$\partial_\tau \bar{u}(z; \tau) - \frac{1}{16\nu} \partial_z^2 \bar{p}(z; \tau) = -\frac{1}{2} \partial_\tau \partial_z \bar{u}_z^\bullet(z; \tau) - \partial_\tau \bar{\varepsilon}^\bullet(z; \tau), \quad (46)$$

где  $\partial_z \bar{u}_z^\bullet(z; \tau)$  – продольная деформация мышцы на оси  $z$ ,

$$\partial_z \bar{u}_z^\bullet(z; \tau) = \varepsilon_{zz}^\bullet(0, 0, z; \tau). \quad (47)$$

Именно определение неизвестных (44), (42) и вывод дифференциальных уравнений (46), (43) и являлся целью применения асимптотической процедуры понижения размерности для сформулированной в п. 2 § 1 задачи.

## §2. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ АРТЕРИИ

**1. Система уравнений и граничные условия.** Как уже упоминалось в п. 1 § 2, свойства стенок артерии позволяют пренебречь гравитационной силой и воздействиями со стороны окружающей мышечной ткани (см. сравнение (16)), т.е. в соотношениях (46) и (43) можно



считать параметры  $\bar{\varepsilon}^\bullet$ ,  $\bar{u}_z^\bullet$  и  $\mu, g_3$  равными нулю. Таким образом, одномерная модель артерии включает дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} \gamma_b \bar{p}(z; \tau) &= K \bar{u}(z; \tau) + G \partial_\tau^2 \bar{u}(z; \tau), \\ \partial_\tau \bar{u}(z; \tau) - \frac{1}{16\nu} \partial_z^2 \bar{p}(z; \tau) &= 0. \end{aligned} \quad (48)$$

При этом  $\gamma_b$  и  $\nu$  – плотность крови и коэффициент ее динамической вязкости, а  $K$  и  $G$  – упругие характеристики (10) и (38) стенки артерии.

Величины  $\bar{u}(z; \tau)$  и  $\bar{p}(z; \tau)$ , введенные равенствами (42) и (44), (21), имеют соответственно смысл относительного приращения радиуса артерии вследствие прохождения по ней крови и осредненного по сечению гидростатического давления в крови, причем согласно соотношению (27) поток через сечение  $\{x \in \Theta_0^R : x_3 = z\}$  находится по формуле

$$-\frac{\pi \delta^4}{8\nu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial z}(z; \tau). \quad (49)$$

Указанная физическая интерпретация неизвестных в системе (48) предопределяет граничные условия

$$\frac{\partial \bar{p}}{\partial z}(-L; \tau) = -\Phi(\tau), \quad \bar{p}(L; \tau) = p_*, \quad (50)$$

где  $\Phi(\tau)$  – величина, пропорциональная потоку крови (ср. выражение (49)), закачиваемому сердцем в артерию, а  $p_*$  – периферийное давление в кровеносной системе. Равномерное биение сердца требует постановки условий периодичности

$$\begin{aligned} \bar{u}(z; 0) &= \bar{u}(z; \tau_*), \quad \partial_\tau \bar{u}(z; 0) = \partial_\tau \bar{u}(z; \tau_*), \\ \bar{p}(z; 0) &= \bar{p}(z; \tau_*), \end{aligned} \quad (51)$$

в которых  $\tau_* = \delta^2 T_*$ , а  $1/T_*$  – частота пульса. Подчеркнем, что “медленный” времениподобный параметр (12), вообще говоря, не подходит для описания процесса функционирования артерии, и в уравнениях (48) удобно перейти к “нормальному” времени  $t$  или даже к “быстрому” времениподобному параметру. В данной статье соответствующее масштабирование не приводится, так как основное внимание уделяется моделированию вен, для которых характерно именно “медленное” время (12).

**2. Различные режимы работы артерии.** Разнообразие болезней сердечнососудистой системы делает осмысленными всевозможные предельные переходы для параметров уравнений (48). Соответствующий асимптотический анализ и численные эксперименты будут опубликованы в очередных статьях авторов, а в настоящем параграфе ограничимся описанием основных свойств модели и рассмотрением лишь одного простого, но поучительного примера в п. 3 § 3.

Пусть малым по сравнению с  $K\bar{u}$  оказывается член  $G\partial_\tau^2\bar{u}$ . Тогда  $\bar{u} = K^{-1}\gamma_b\bar{p}$  и система (48) сводится к скалярному параболическому уравнению

$$\frac{\gamma_b}{K} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau}(z; \tau) = \frac{1}{16\nu} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}(z; \tau). \quad (52)$$

С другой стороны, малость члена  $\gamma_b\bar{p}$  по сравнению с двумя другими в первой строке системы (48) обеспечивает возникновение гиперболического уравнения

$$G\partial_\tau^2\bar{u}(z; \tau) + K\bar{u}(z; \tau) = 0.$$

В результате система (48) приобретает черты, присущие как параболическим, так и гиперболическим уравнениям, решения которых обладают совершенно различными свойствами. Как будет показано в следующем разделе и в дальнейших публикациях авторов, в этих условиях нормальное функционирование артерии может происходить лишь при определенных ограничениях на параметры системы.

Статья [5] предлагает параболическое уравнение (52) в качестве одномерной модели артерии, но только потому, что в [5] с самого начала из определяющих соотношений были отброшены оба инерционных члена: жидкостной  $\partial_t v$  из уравнений Навье-Стокса (2) и упругий  $\gamma_w \partial_t^2 u$  из двумерной модели (6) эластичной стенки. В то же время даже упрощенное скалярное уравнение (52) может пояснить особенности работы артерии, физические свойства и механическое строение которой предназначены для скорейшего освобождения от крови, поступившей от сердца, и подготовки к приему следующей порции крови. Забыв на время об условиях периодичности (51), т.е. считая период  $\tau_*$  большим, заметим, что решение уравнения (52) с однородными ( $\Phi = 0$  и  $p_* = 0$ ) граничными условиями (50) раскладывается в ряд Фурье

$$\sum_{j=1}^{\infty} C_j \cos\left(\frac{\pi j}{2L}(z+L)\right) \exp\left(-\frac{K\pi^2 j^2}{64\nu\gamma_b L^2} \tau\right).$$

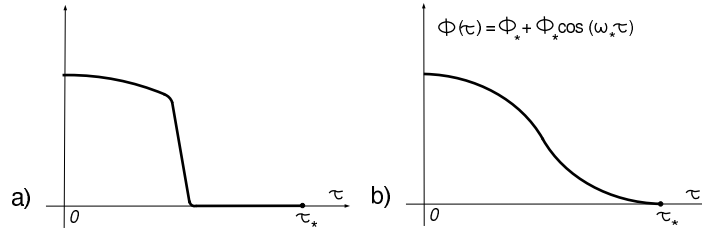


Рис. 4. Схема подачи крови сердцем в аорту (а) и приближающий ее график (б) функции  $\Phi$ .

Таким образом, быстрое затухание движения крови в артерии происходит при больших значениях модуля упругости (10) ее стенки.

**3. Пример.** Пусть в первом краевом условии (50) фигурирует функция

$$\Phi(\tau) = \Phi_* + \Phi_* \cos(\omega_* \tau), \quad (53)$$

где  $\omega_* = \pi/\tau_*$  и  $\Phi_* > 0$ . График функции (53) изображен на рис. 3, б. Он имитирует помпирование крови сердцем (рис. 3, а): сначала при полностью открытом клапане сердце обеспечивает почти постоянный поток через сечение аорты, затем – на ниспадающем коротком участке – сердечный клапан закрывается и, наконец, в последней фазе сердце находится в покое при захлопнутом клапане.

Решение задачи (48), (50) ищем в виде

$$\bar{p}(z; \tau) = P_0(z) + \operatorname{Re} (e^{-i\omega_* \tau} P_1(z)),$$

$$\bar{u}(z; \tau) = U_0(z) + \operatorname{Re} (e^{-i\omega_* \tau} U_1(z)).$$

Понятно, что

$$P_0(z) = \gamma_b^{-1} K U_0(z) = \Phi_*(L - z) + p_*.$$

Поскольку

$$P_1(z) = \gamma_b^{-1} (K - \omega_*^2 G) U_1(z)$$

благодаря первому уравнению (48), в предположении

$$K - \omega_*^2 G > 0 \quad (54)$$

приводим второе уравнение к виду

$$-\frac{i\omega_*\gamma b}{K - \omega_*^2 G} P_1(z) - \frac{1}{16\nu} \frac{\partial^2 P_1}{\partial z^2}(z) = 0.$$

Таким образом,

$$P_1(z) = \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm(1-i)A_*(z+L)}, \quad A_* = \sqrt{\frac{8\omega_*\gamma b\nu}{|K - \omega_*^2 G|}}, \quad (55)$$

причем коэффициенты  $C_{\pm}$  находятся из системы

$$(1-i)A_*(C_+ - C_-) = -\Phi_*, \quad C_+ e^{+2(1-i)A_*L} + C_- e^{-2(1-i)A_*L} = 0.$$

Для упрощения выражений будем считать произведение  $A_*L$  большим параметром задачи; тогда

$$C_- = (1+i) \frac{\Phi_*}{2A_*}, \quad |C_+| = O(e^{-4A_*L}).$$

В итоге находим, что

$$\begin{aligned} \bar{p}(z; \tau) &= p_* + \Phi_*(L-z) \\ &+ \frac{\Phi_*}{2A_*} e^{-A_*(z+L)} \operatorname{Re} \left( (1+i) e^{-i(\omega_*\tau - A_*(z-L))} \right) + \dots, \end{aligned} \quad (56)$$

где, как обычно, многоточие заменяет младшие по порядку члены. Заслуживает внимания два наблюдения. Как и следовало ожидать, из-за наличия экспоненциально затухающего множителя  $e^{-A_*(z+L)}$  во втором слагаемом из правой части (56) перенос крови осуществляется в основном первым, линейным и называемым *поршневой модой*, слагаемым – напомним формулу (49) для потока через сечение. Вместе с тем, во втором слагаемом фигурирует волна  $e^{-i(\omega_*\tau - A_*(z-L))}$ , бегущая в положительном направлении оси  $z$  (т.е. в сторону от сердца, расположенного за левым концом  $z = -L$  рассматриваемого участка артерии).

Условие (54) выполнено в случае здоровой – обладающей надлежащими упругими свойствами – артерии, однако многочисленные риски (истончение стенок сосудов при старении, их кальцинирование вследствие гиалиноза или кальциноза, диссенция или расщепление слоев стенки, разнообразные травматические или хирургические вмешательства, и пр.) могут привести к ослаблению упругих свойств стенок

артерии и, как следствие, изменить знак разности (54). Возникающее тем самым неравенство

$$K - \omega_*^2 G < 0 \quad (57)$$

может случиться и в здоровом организме при значительном учащении пульса, т.е. возрастании  $\omega_*$ .

При условии (57) соотношения (55) и (56) принимают вид

$$\begin{aligned} P_1(z) &= \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm(1-i)A_*(z+L)} = \sum_{\pm} C_{\pm} e^{\pm(1+i)A_*(z+L)}, \\ \bar{p}(z; \tau) &= p_* + \Phi(L - z) \\ &+ \frac{\Phi_*}{2A_*} e^{-A_*(z+L)} \operatorname{Re} \left( (1-i)e^{-i(\omega_*\tau + A_*(z+L))} \right) + \dots \end{aligned} \quad (58)$$

Первое слагаемое в правой части (58) такое же, как и ранее в формуле (56), однако во втором теперь фигурирует волна  $e^{-i(\omega_*\tau + A_*(z+L))}$ , бегущая в отрицательном направлении оси  $z$ , т.е. в сторону к сердцу.

Возникновение противотока в артерии, разумеется, явление ненормальное, но для точного выяснения его последствий требуются численные эксперименты при более адекватном, нежели (53) описании работы сердца.

### §3. ОДНОМЕРНАЯ МОДЕЛЬ ВЕНЫ

**1. Уравнение Рейнольдса и граничные условия.** Как упоминалось в п. 1 §2, для вен все три числа Вомерслея (14) оказываются малыми, а значит, в уравнении (43) можно пренебречь слагаемым  $G\partial_z^2 \bar{u}$ . В результате получаем, что

$$\bar{u}(z; \tau) = \frac{\gamma_b}{K - 2\mu} (\bar{p}(z; \tau) + z g_3) - \frac{K + 2(\lambda + \mu)}{K - 2\mu} \bar{\varepsilon}^{\bullet}(z; \tau), \quad (59)$$

и тем самым переделываем уравнение (46) в такое:

$$\frac{2\gamma_b}{K - 2\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial \tau}(z; \tau) - \frac{1}{8\nu} \frac{\partial^2 \bar{p}}{\partial z^2}(z; \tau) = f(z; \tau). \quad (60)$$

Здесь  $\gamma_b$  и  $\nu$  – плотность и коэффициент динамической вязкости крови,  $K$  – эффективный модуль (10) поперечного растяжения стенки вены, а  $\mu$  – модуль сдвига упругого материала мышцы.

Уравнение (60) следует назвать *нестационарным уравнением Рейнольдса* (ср. книгу [17]). Согласно формулам (43) и (59) его правая

часть принимает вид

$$f(z; \tau) = -\partial_\tau \partial_z \bar{u}_z^\bullet(z; \tau) + 4 \frac{\lambda + 2\mu}{K - 2\mu} \partial_\tau \bar{\varepsilon}^\bullet(z; \tau), \quad (61)$$

причем величины  $\bar{u}_z^\bullet$  и  $\bar{\varepsilon}^\bullet$  определены формулами (47) и (45) соответственно. Отметим, что взаимодействие стенок вены с мышцами уменьшает в уравнении (60) коэффициент при производной по времени (стенкам приходится раздвигать окружающую ткань), однако увеличивает в выражении (61) множитель при  $\partial_\tau \bar{\varepsilon}^\bullet(z; \tau)$ , т.е. усиливает внешнее воздействие – это способствует стабилизации потока и нормальному функционированию вены.

Уравнение (60) следует снабдить граничными условиями

$$\bar{p}(\pm L; \tau) = p^\pm(\tau) \mp \gamma_b g_3 L. \quad (62)$$

При этом упоминавшийся в п. 1 § 2 скачок давления  $[p]$  – среднее разности  $p^-(\tau) - p^+(\tau)$  по характерному промежутку времени. Как и в случае артерии, вместо начальных условий разумно выставлять условия периодичности, однако период связывать не с биением сердца, а с изменяемостью внешних воздействий (процессы сокращения мышц, дыхания и пр.).

Обращаем внимание на отличие краевых условий (62) для вены от краевых условий (50) для артерии.

## 2. Венозные клапаны и наложение односторонних связей.

Строение разных частей кровеносной системы тесно привязано к их предназначению и условиям их функционирования. Поэтому данные задачи (60), (62) нуждаются в уточнении для тех или иных частей венозного аппарата.

Как ни странно, самым простым образом устроено кровоснабжение головы, для которого не предусмотрено никаких упругих механизмов компенсации давления или препятствия противотоку крови, и именно поэтому мозг наиболее уязвим при гипертонических болезнях.

Каких-либо мускульных воздействий на обсуждаемую часть кровеносной системы – яремные и воротная вены – нет, т.е.  $f(z; \tau) = 0$  в уравнении (60), а возврат крови от мозга к сердцу осуществляется за счет перепада давления и сил гравитации, причем благодаря соотношениям (62) положительная (для рассматриваемых вен ось  $z$  направлена сверху вниз) проекция  $g_3$  гравитационной силы на ось  $z$  (направлена от головы к сердцу) способствует возрастанию перепада,

а значит, и увеличению потока через сечение канала  $Q_0^R$ , который, например, при постоянных  $p^\pm$  равен

$$\frac{\pi\delta^4}{8\nu} \left( \gamma_b g_z + \frac{[p]}{L} \right)$$

согласно формулам (27) и (49). Понятно, что при отрицательной проекции  $g_z$  отток крови от мозга затрудняется, и именно поэтому долгое пребывание вниз головой может привести к тяжелым последствиям.

Наиболее длинными являются подкожная и скрытая вены ног, а также бедренная и подколенная, отводящие кровь от нижних конечностей к сердцу. При этом ввиду прямохождения человека гравитационная сила направлена против тока крови, т.е. препятствует ее правильному движению. При большом  $L$ , но малом  $[p]$  разность  $p^0(-L; \tau) - p^0(+L; \tau)$  согласно краевым условиям (62) может оказаться отрицательной и вообще изменить направление движения крови. Для исключения этой возможности в организме имеются два основных механизма. Во-первых, фрагменты венозной системы (от середины голени и выше – до грудной части) снабжена *клапанами*, действие которых схематически изображено на рис. 1, а–с: будучи тонкими мембранами, они легко пропускают кровь в направлении к сердцу, но при обратном токе раскрываются и полностью (в здоровом состоянии) перекрывают канал. Во-вторых, последний член в правой части (61) уравнения Рейнольдса (60), происходящий от мышечной активности, также способствует движению крови. В отличие от обычного течения Пуазейля, однонаправленного по своему строению, сдавливание жесткостенной полый трубы порождает потоки в обе стороны, однако в живой и здоровой вене клапаны все-таки обеспечивают течение крови в правильном направлении.

Наличие клапанов приводит к необходимости постановки так называемых *односторонних связей*. В случае частого периодического насыщения вены (например, большой подкожной и бедренной) клапанами на участке  $[-L_-, L_+] \subset [-L, L]$  теория усреднения побуждает к постановке непрерывного ограничения

$$-\partial_z p^0(z; \tau) > 0, \quad z \in (-L_-, L_+). \quad (63)$$

В случае редкого расположения клапанов (например, в подкожных и скрытых венах рук) разумно накладывать точечные ограничения.

Пусть, например, имеется один клапан около точки  $z = 0$ . Тогда односторонние связи в момент времени  $\tau$  выглядят следующим образом:

$$\bar{p}(+0; \tau) \geq \bar{p}(-0; \tau), \quad -\partial_z \bar{p}(0; \tau) \geq 0, \quad (64)$$

$$(\bar{p}(+0; \tau) - \bar{p}(-0; \tau)) \partial_z \bar{p}(0; \tau) = 0$$

Условия (64) допускают две возможности:

$$\bar{p}(+0; \tau) = \bar{p}(-0; \tau), \quad -\partial_z \bar{p}(0; \tau) \geq 0 \quad (65)$$

или

$$\bar{p}(+0; \tau) \geq \bar{p}(-0; \tau), \quad -\partial_z \bar{p}(0; \tau) = 0, \quad (66)$$

Соотношения (65) означают, что клапан открыт и пропускает неотрицательный поток в направлении от точки  $z = -L$  к точке  $z = +L$ , причем давление с обеих сторон выровнено. При закрытом клапане выполнены соотношения (66): потока крови нет, а давление со стороны  $z > 0$  превалирует над давлением со стороны  $z < 0$ , что и обеспечивает смыкание створок клапана.

**3. Пример.** В общей ситуации математическая постановка задачи (60), (62) с односторонними связями (63) или (64) апеллирует к (нелинейному) вариационному неравенству (см., например, монографию [18]), однако при “удобных” данных

$$L_{\pm} = L, \quad g_z = 0, \quad p^{\pm}(\tau) = 0, \quad \partial_z \bar{u}_z^{\bullet}(z; \tau) = 0,$$

$$\bar{\varepsilon}^{\bullet}(z; \tau) = -A \cos(\omega\tau), \quad A > 0, \quad 0 < \omega \ll 1$$

задача (60), (62), (63) допускает приближенное решение

$$\bar{p}(z; \tau) = \bar{p}_0(\tau) - 16A\omega\nu \sin(\omega\tau) \frac{\lambda + 2\mu}{K - 2\mu} \begin{cases} (z + L)^2 & \text{при } \sin(\omega\tau) > 0, \\ (z - L)^2 & \text{при } \sin(\omega\tau) < 0. \end{cases}$$

Подчеркнем, что введенное условие малости частоты  $\omega$ , т.е. замедленность процесса, позволило удалить из левой части (60) производную  $\partial_{\tau} \bar{p}$ .

В любом случае  $\partial_z \bar{p}(z; \tau) \leq 0$  при всех  $z \in [-L, L]$ , т.е. кровь вынужденно движется по направлению к сердцу. При  $\sin(\omega\tau) > 0$ , т.е. на этапе сжатия, перекрыт клапан на уровне  $z = -L$  и кровь выдавливается вверх, а при  $\sin(\omega\tau) < 0$ , т.е. на этапе растяжения, перекрыт клапан на уровне  $z = L$  и происходит подсос крови из нижней части вены.



**4. Заключение.** Наличие в правой части (61) производной  $\partial_\tau$  показывает, что мышечно-венозное помпирование действительно только при динамическом, но не статическом нагружении. Поэтому “затекшие” ноги и руки излечиваются быстрыми и хаотическими движениями или растиранием. Клапаны легочной вены носят разве лишь рудиментарный характер, с чем и связан один из симптомов сердечной недостаточности – одышка: попытки восстановить снабжение сердца венозной кровью за счет частого дыхания не приводит к успеху именно из двусторонней направленности потока, порожденного внешней деформацией, внутри гладкостенного сосуда. В медицинской литературе отмечается, что прохождение крови по легочной вене обусловлено в значительной степени именно отмеченному в конце предыдущего раздела подсосу крови.

Многие болезни вен (оставляем в стороне весьма редкую *венозную аневризму* – вызванное травмой или неудачной хирургической операцией выпячивание стенок) возникают именно вследствие неправильной работы клапанов, сопровождающейся ухудшением упругих свойств стенок (наследственная несостоятельность, воспаления, травмы и т.п.). Стенки истончаются при старении, гипертония может проявиться в любом возрасте, объем прокачиваемой крови значительно увеличивается при беременности, профессиональная деятельность требует каждодневное стояние или сидение – все это и многие другие факторы приводят к увеличению внутреннего давления в венах, которое при дефектах клапанов, например, неполном смыкании створок, порождает обратные течения и застаивание крови, и как следствие, вызывает варикозы, наблюдаемые именно в районе насыщения вен клапанами, и тромбирование, зачастую влекущее за собой инфаркты, инсульты или даже некроз тканей вокруг закупоренных периферийных сосудов. Особенно подвержены варикозам прикожные вены, в частности и потому, что около поверхности обжимающее напряжение  $2(\lambda + \mu)\bar{\epsilon}^\bullet(z; \tau)$  обычно меньше, чем внутри мышечного материала.

Авторы благодарят врачей Колесникова Д. С., Назарову О. А. и аспиранта Софронову С. Л. за консультации по медицинским и биологическим вопросам. Работа второго автора финансово поддержана Российским фондом фундаментальных исследований (проект 12–01–00348) и университетом г. Линчёпинг (Швеция).

## ЛИТЕРАТУРА

1. W. J. Zwiebel and J. S. Pellerito, *Introduction to Vascular Ultrasonography*. 5th ed. Philadelphia, Elsevier, 2005.
2. Y. C. Fung, *Biomechanics. Circulation*. 2nd ed., Springer, New York–Berlin, 2011.
3. С. А. Назаров, *Асимптотика решения задачи Навье-Стокса о течении тонкого слоя жидкости*. — Сиб. матем. ж. **31**, No. 2 (1990), 131–144.
4. С. А. Назаров, К. И. Пилецкас, *Рейнольдсово течение жидкости в тонком трехмерном канале*. — Литовский матем. сб. **30**, No. 4 (1990), 772–783.
5. S. Čanič and A. Mikelič, *Effective equations modeling the flow of viscous incompressible fluid through a long elastic tube arising in the study of blood flow through small arteries*. — SIAM J. Applied Dynamical Systems. **2** (2003), 431–463.
6. J. B. Grotberg and O. E. Jensen, *Biofluid mechanics in flexible fluids*. — Annu. Rev. Fluid Mech. **36** (2004), 121–147.
7. В. А. Козлов, С. А. Назаров, *Поверхностная энтальпия и упругие свойства кровеносных сосудов*. — Докл. РАН **441**, No. 1 (2011), 38–43.
8. G. Panasenکو and R. Stavre, *Asymptotic analysis of the Stokes flow with variable viscosity in a thin elastic channel*. — Netw. Heterog. Media. **5**, No. 4 (2010), 783–812.
9. J. P. Dali and L. F. Donald, *The elastic symmetry of arterial segments in dogs*. — Circulation research. **24**, No 1 (1961), 1–8.
10. J. Ståhlhand, A. Klarbring, and M. Karlsson, *Towards in vivo aorta material identification and stress estimation*. — Biomechan Mechanobiol. **2** (2004), 169–186.
11. G. A. Holzapfel, *Collagen in Arterial walls: Biomechanical aspects // in Collagen: Structure and Mechanics*, ed. Fratzl P. New York, Berlin: Springer Science+Business Media, (2008), p. 285–324.
12. С. А. Назаров, Г. Х. Свирс, А. С. Слуцкий, *Осреднение тонкой пластины, усиленной периодическими семействами жестких стержней*. — Матем. сб. **202**, No. 8 (2011), 41–80.
13. S. Nazarov, A. Slutskiy, and G. Sweers, *Korn Inequalities for a Reinforced Plate*. — J. Elasticity. **106**, No. 1 (2012), 43–69.
14. В. Г. Мазья, С. А. Назаров, Б. А. Пламеневский, *Асимптотика решений задачи Дирихле в области с вырезанной тонкой трубкой*. — Матем. сб. **116**, No. 2 (1981), 187–217.
15. W. G. Mazja, S. A. Nazarov, and B. A. Plamenewski, *Asymptotische Theorie elliptischer Randwertaufgaben in singular gestörten Gebieten*. 1. Berlin: Akademie-Verlag (1991). (Английский перевод: Maz'ya V., Nazarov S., Plamenewskij B. Asymptotic theory of elliptic boundary value problems in singularly perturbed domains. Vol. 1. Basel, Birkhäuser Verlag (2000)).
16. Л. И. Седов, *Механика сплошной среды*. **2**, Наука, М., 1984.
17. Л. Д. Ландау, Е. М. Лившиц, *Гидродинамика*. Наука, М., 2001.
18. Ж.-Л. Лионс, *Некоторые методы решения нелинейных краевых задач*. Мир, М., 1972.

Kozlov V. A., Nazarov S. A. Asymptotic models of the blood flow in arterias and veins.

Asymptotic analysis is applied for obtaining one-dimensional models of the blood flow in narrow, thin-walled, elastic vessels. The models for arteries and veins essentially distinguish from each other, and the reason for this is the structure of their walls as well as the operationing conditions. Although the obtained asymptotic models are simple, they explain various effects known in medical practice, in particular, describe the mechanism of vein-muscle pumping of blood.

Department of Mathematics,  
Linkopings Universitet,  
581 83 Linkoping, Sweden  
*E-mail*: vlkoz@mai.liu.se

Поступило 26 ноября 2012 г.

ИПМаш РАН,  
Большой пр. 61, В.О.,  
199178, С.Петербург,  
Санкт-Петербургский  
государственный университет,  
Университетский проспект, дом 28,  
Старый Петергоф, 198504 С.Петербург,  
Россия  
*E-mail*: srgnazarov@yahoo.co.uk