Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 409, 2012 г.

Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов

МЕТОД ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЛЕОНТОВИЧА–ФОКА В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ НА ВЫТЯНУТЫХ ТЕЛАХ

Введение

В последнее время опубикован ряд статей о коротковолновой дифракции на вытянутых телах, (см. [1, 2] и библиография в них).

Фактически задача в них ставится в упрощенном варианте: рассеиватель представляет собой строго выпуклое тело вращения, а падающая плоская волна распространяется вдоль оси вращения, т.е. рассматривается осесимметричная задача. Волновое поле изучается в окрестности границы свет-тень (область Фока), и в теневой части этой зоны, где возникают волны соскальзывания. Вытянутость тела характеризуется отношением продольного радиуса кривизны геодезических линий (меридианов), ортогональных к границе свет-тень на поверхности рассеивателя, к поперечному радиусу кривизны границы свет-тень. При этом оба радиуса кривизн считаются большими по сравнению с длиной падающей волны. Это наводит на мысль использовать метод параболического уравнения Леонтовича–Фока. В обсуждаемых работах, (см. [1, 2]) действительно декларируется использование метода параболического уравнения и сохраняются масштабы Фока для локальных координат в области Фока, но при этом предложенное параболическое уравнение существенно отличается от уравнения Фока.

Отметим, что метод В. А. Фока (см. [3]) базируется на следующих эвристических положениях:

а) нужно правильно выделить множитель, описывающий наибыстрейшие осцилляции волнового поля. В данном случае это, очевидно,

---

Ключевые слова: дифракция коротких волн на вытянутом теле вращения, уравнение Леонтовича–Фока, волны соскальзывания, согласование локальных асимптотик.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант 11-01-00407А).

$\exp\{iks\}$, где k есть волновое число, а s является длиной дуги меридиана (геодезической), т.к. геодезическая совпадает с направлением луча падающей волны в точке касания его с границей свет-тень;

b) после разложения коэффициентов уравнения в области Фока, нужно выделить асимптотически главные слагаемые в уравнении;

c) подобрать масштабы координат так, чтобы эти главные слагаемые стали бы одного порядка при $k \to \infty$ в полученном параболическом уравнении.

Подчеркнем, что выбор масштабов имеет принципиальное значение, так как он определяет шкалу функций, в которой строится асимптотика решения, и в фиксированной шкале функций не может быть разных асимптотик одной и той же функции или разных асимптотик решения рассматриваемой задачи. К сожалению, в упомянутой работе [1] мы не находим обсуждения двух последних пунктов, (см. по этому поводу наиболее дискуссионную работу [2]).

В данной статье предложен альтернативный подход к задаче о коротковолновой дифракции на вытянутом теле. При этом мы тоже, как и в статье [1], рассматриваем осесимметричный случай дифракции плоской волны на строго выпуклом теле вращения. В целях упрощения мы предполагаем, что волновое поле удовлетворяет уравнению Гельмгольца и краевым условиям Дирихле на поверхности рассеивателя.

Предлагаемый метод основывается на классическом методе параболического уравнения, но представляет собой двухмасштабное асимптотическое разложение по двум независимым параметрам: фоковскому параметру $\mathbf{M}_0 = (k\rho(0)/2)^{1/3}$ и новому параметру $\mathbf{\Lambda}_0 = \rho(0)/f(0)$, характеризующему вытянутость рассеивателя. Здесь $\rho(0) = \rho_0$ и $f(0)$ являются главными радиусами кривизн поверхности рассеивателя вдоль меридиана и экватора на границе свет-тень соответственно. В работе также строятся волны соскальзывания, возникающие в теневой части поверхности за областью Фока.

Это двухмасштабное разложение позволяет получить формулы для расчета волнового поля, в частности, тока на поверхности тела, при различных соотношениях между параметрами $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{\Lambda}_0$, удовлетворяющими условию $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{M}_0^{2-\varepsilon}$. Параметр ε содержится в промежутке $0 < \varepsilon < 2$. При этом используется классический метод параболического уравнения Фока и волновое поле описывается в терминах функций

Эйри и интегралов от них. Однако при $\varepsilon = 0$ происходит существенная перестройка операторов в рекуррентных системах уравнений как в области Фока, так и в области волн соскальзывания. При этом оказывается, что в области Фока коэффициенты в возникающих рекуррентных уравнениях становятся сингулярными.

§1. Формулировка задачи

Мы предполагаем, что поверхность $\partial\Sigma$ рассеивателя Σ образована вращением плоской, выпуклой кривой

$$x = f(z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi$$

вокруг оси z декартовой системы координат x, y, z, а сечение $\partial\Sigma$ плоскостью $z = 0$ есть экватор и совпадает с границей свет-тень падающей плоской волны $U^{\text{inc}} = \exp(ikz)$.

Волновое поле U удовлетворяет уравнению Гельмгольца и условию Дирихле на поверхности $\partial\Sigma$ тела вращения

$$(\Delta + k^2)U = 0, \quad U|_{\partial\Sigma} = 0. \tag{1.1}$$

Мы будем рассматривать волновое поле вблизи $\partial\Sigma$, в зоне Фока и в затененной части, где формируются волны соскальзывания. На поверхности тела берем ортогональную сетку линий главных кривизн – меридианы и параллели; в окрестности тела к ним добавляется длина n вдоль внешней нормали $\mathbf{n}$. Длину вдоль меридианов обозначим через s и отсчитываем от экватора. Связь между s и z определяется равенством

$$s = \int\limits_0^z \sqrt{1 + (f'(z))^2}\, dz. \tag{1.2}$$

Для единичного вектора внешней нормали $\mathbf{n}$ справедливо следующее выражение

$$\mathbf{n} = (1 + (f'(z))^2)^{-1/2}(\cos\varphi\, \mathbf{e}_x + \sin\varphi\, \mathbf{e}_y - f'(z)\, \mathbf{e}_z), \tag{1.3}$$

где $\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$ есть орты декартовой системы координат, φ является азимутом. Система координат s, n, φ ортогональна и регулярна в рассматриваемой области; квадрат элемента длины dS^2 имеет вид

$$dS^2 = h_s^2 ds^2 + dn^2 + h_\varphi^2 d\varphi^2,$$

где коэффициенты Ламе h_s и h_φ описываются формулами

$$h_s = 1 - n\frac{f''(z(s))}{[1+(f'(z(s)))^2]^{3/2}} = 1 + \frac{n}{\rho(s)},$$

$$h_\varphi = f(z(s)) + \frac{n}{\sqrt{1+(f'(z(s)))^2}}. \tag{1.4}$$

Отметим, что в формулах (1.4) координата z рассматривается как функция s, получаемая обращением равенства (1.2), а функция $\rho(s)$ является радиусом кривизны меридиана в точке s. Нас интересует осесимметричное решение задачи (1.1), т.е.решение, для которого выполнено условие $\dfrac{\partial U}{\partial \varphi} \equiv 0$. При этом решение ищется в виде

$$U = \exp(iks)W(s,n),$$

где множитель $\exp(iks)$ описывает главные осцилляции волнового поля, а W называется функцией ослабления. Уравнение для W можно представить в виде

$$[(\Delta + k^2)e^{iks}W] = e^{iks}g\left\{\frac{\rho_0^2}{4\mathbf{M}_0^4}(AW + BW)\right\} = 0, \tag{1.5}$$

в котором $g = (4\mathbf{M}_0^4)/\rho_0^2$, а операторы A и B равны

$$AW = k^2(1-h_s^{-2})W + \left(2ik\frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial^2 W}{\partial s^2}\right)h_s^{-2} + \frac{\partial^2 W}{\partial n^2}$$

$$-\left(ikW + \frac{\partial W}{\partial s}\right)h_s^{-2}\frac{\partial \ln h_s}{\partial s} + \frac{\partial W}{\partial n}\frac{\partial \ln h_s}{\partial n}, \tag{1.6}$$

$$BW = \frac{1}{h_\varphi}\left[\frac{df}{ds}\frac{1}{h_s}\left(ikW + \frac{\partial W}{\partial s}\right) + \frac{\partial h_\varphi}{\partial n}\frac{\partial W}{\partial n}\right]. \tag{1.7}$$

Подчеркнем,что оператор A соответствует двумерной задаче дифракции на выпуклой кривой в сечении $\varphi = \mathrm{const}$, а оператор B содержит в себе всю специфику трехмерной исходной задачи и представляет наибольший интерес. Что касается двумерной задачи, то детальное построение главного члена асимптотики содержится в книге В. А. Фока [3], а математически четкая и обоснованная схема дальнейших приближений имеется в книгах [4, 5].

При построении решения приходится получать явные аналитические формулы для трех членов асимптотического разложения этого решения, что приводит, к сожалению, к весьма громоздким вычислениям.

Отметим, что математическая обоснованность этой схемы следует из того, что коротковолновая асимптотика в задачах дифракции на строго выпуклом теле в целом математически обоснована, см. [6–8].

§2. Падающее волновое поле в области Фока

Область Фока является по терминологии В. М. Бабича "зародышем". Зная волновое поле в этой области, можно построить асимптотику волнового поля в окрестности предельного луча и в затененной части рассеивателя. В данном случае эта зона представляет собой кольцеобразную область в окрестности границы свет-тень (в окрестности экватора), в которой координаты s и n считаются малыми.

Далее коэффициенты в уравнении (1.5) нужно разложить по степеням s и n и перейти к масштабированным (растянутым)переменным σ и ν

$$\sigma = \frac{k^{1/3}s}{2^{1/3}\rho_0^{2/3}} = \frac{\mathbf{M}_0 s}{\rho_0}, \quad \nu = \frac{2^{1/3}k^{2/3}n}{\rho_0^{1/3}} = \frac{2n\mathbf{M}_0^2}{\rho_0}, \tag{2.1}$$

где ρ_0 является радиусом кривизны геодезических (меридианов) на границе свет-тень (экватор), т.е. при $s = 0$, а через $\mathbf{M}_0$ обозначен большой безразмерный параметр Фока $\mathbf{M}_0 = \left(\frac{k\rho_0}{2}\right)^{1/3}$, по которому и строится асимптотическое разложение. Обратные формулы для s и n представим в виде

$$s = \rho_0 \frac{\sigma}{\mathbf{M}_0}, \quad n = \frac{\rho_0}{2}\frac{\nu}{\mathbf{M}_0^2}. \tag{2.2}$$

Остановимся на некоторых ключевых моментах, позволяющих несколько упростить вычисления.

1) Коэффициенты Ламе (1.4) рассматриваются как функции длины геодезических s, что требует обращения функции (1.2). В области Фока мы нуждаемся в их разложении по степеням z и s соответственно, т.е.

$$s = \sum_{n=1}^{N} \alpha_n z^n + O(z^{N+1}), \quad z = \sum_{n=1}^{N} \beta_n s^n + O(s^{N+1}). \tag{2.3}$$

Коэффициенты α_n элементарно находятся из формулы (1.2), а β_n выражаются через α_n путем обращения ряда для s. Для вычисления трех членов асимптотики волнового поля в равенствах (2.3) должно быть $N = 5$. Очевидно, что $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ и, что существенно для дальнейшего, $\alpha_2 = \beta_2 = 0$. Из равенства (1.2) вытекает также, что

$$\frac{dz}{ds} = \frac{1}{\sqrt{1 + (f'(z(s)))^2}}$$

и поэтому h_φ можно представить в виде

$$h_\varphi(s, n) = f(z(s)) + n\frac{dz}{ds}, \tag{2.4}$$

что удобно использовать при вычислениях.

2) Коэффициент Ляме h_s можно считать заданным в виде $h_s = 1 + \dfrac{n}{\rho(s)}$, где $\rho(s)$ есть радиус кривизны геодезической в точке s. Тогда коэффициенты разложения $\rho^{-1}(s)$ по степеням s можно выразить через производные от $f(z(s))$ в силу равенства

$$\frac{1}{\rho(s)} = \frac{-f''(z(s))}{[1 + (f'(z(s)))^2]^{3/2}}. \tag{2.5}$$

Так, например, из формулы (2.5) и равенств (2.3) получаем

$$f'_z(0) = 0, \quad f_z^{(2)} = f''_{zz}(0) = -\frac{1}{\rho_0}, \quad f_z^{(3)} = f'''_{zzz}(0) = -\frac{d}{ds}\frac{1}{\rho}\bigg|_{s=0}, \ldots .$$

3) Обратимся далее к падающей плоской волне $U = \exp(ikz)$. Нам потребуется ее разложение в локальных координатах s и n в области Фока для построения отраженной (дифрагированной) волны U^r ввиду краевого условия (1.1) на поверхности $\partial\Sigma$ рассеивателя. Вывод его основывается на формуле связи координаты z с координатами s и n

$$z = z(s) + n(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z) = z(s) + n\frac{-f'(z(s))}{\sqrt{1 + [f'(z(s))]^2}}, \tag{2.6}$$

в которой $\mathbf{e}_z$ есть единичный орт оси z исходной декартовой системы координат. Разлагая правую часть по степеням s, получаем

$$z = s + \left(-\frac{s^3}{3!\rho_0^2} + \frac{ns}{\rho_0} \right) + \left(\frac{3\rho_0' s^4}{4!\rho_0^3} - \frac{ns^2\rho_0'}{2!\rho_0^2} \right) + \left(\frac{\alpha s^5}{5!\rho_0^4} - \frac{\beta n s^3}{3!\rho_0^3} \right) + O(s^6, ns^4). \quad (2.7)$$

Здесь и ниже во всех формулах, относящихся к области Фока, функции от s вычислены в точке $s = 0$: $\rho(s)|_{s=0} = \rho_0$, $\rho'(s)|_{s=0} = \rho_0'$, $\rho''(s)|_{s=0} = \rho_0''$.

Коэффициенты α, β равны

$$\alpha = 4\rho_0\rho_0'' - 11{\rho_0'}^2 + 1, \quad \beta = \rho_0\rho_0'' - 2{\rho_0'}^2 + 1. \quad (2.8)$$

Переходя в разложении (2.7) от s, n к масштабированным (растянутым) координатам σ, ν, обнаруживаем, что все слагаемые, заключенные в круглые скобки, будут одного порядка по волновому числу k, и порядок каждой последующей скобки получается из предыдущей умножением на $k^{-1/3}$. Это порождает следующее разложение для функции ослабления W^{inc} падающей плоской волны

$$U^{\text{inc}} = e^{iks}W^{\text{inc}}, \quad W^{\text{inc}} = \sum_{m=0} W_m^{\text{inc}} k^{-m/3}, \quad (2.9)$$

где $W_m^{\text{inc}} = W_0^{\text{inc}} P_m^{\text{inc}}$ и P_m^{inc} суть полиномы по σ и ν. Заметим, что разложение (2.9) может быть представлено по отрицательным степеням большого безразмерного параметра Фока $\mathbf{M}_0 = (k\rho_0/2)^{1/3}$. Для этого нужно использовать явные формулы для коэффициентов β_q, $q = 3, 4, 5, \ldots$ и производных функции $f(z)$ по z при $z = 0$, вытекающих из равенств (2.5).

В данной статье вычислены три члена асимптотики в разложении вида (2.9) для падающей и отраженной волн. Для того, чтобы не загружать работу слишком громоздкими формулами, опустим многие промежуточные выкладки, заменяя их словесными комментариями к их выводу. Надеемся, что такой подход к статье не сделает ее менее читабельной.

Главное слагаемое в (2.9) имеет простой вид

$$W_0^{\text{inc}}(\sigma, \nu) = \exp\left\{ i\left(\sigma\nu - \frac{\sigma^3}{3} \right) \right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta} v(\zeta - \nu) d\zeta, \quad (2.10)$$

где $v(\zeta-\nu)$ есть вещественнозначная функция Эйри в определении Фока, так как полином P_0^{inc} оказывается равным единице. Второе слагаемое в разложении падающей волны несколько сложнее, так как

$$P_1^{\mathrm{inc}} = i\left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/3}\frac{\rho_0'}{4}(\sigma^4-2\sigma^2\nu).$$

Полином P_2^{inc} уже содержит σ^8 и ν^4 и оказывается громоздким, однако, он легко восстанавливается при разложении $\exp(ikz)$ с учетом формулы (2.7).

Отметим важный для дальнейшего технический момент. В масштабированных координатах σ и ν задача построения отраженной волны в области Фока решается в полуплоскости $\{-\infty<\sigma<\infty,\ \nu>0\}$. Поэтому удобно σ отделить в виде преобразования Фурье, как это представлено в равенстве (2.10). Такое преобразование осуществляется на базе следующего формального равенства

$$(-i\sigma)^m\exp\left\{i\left(\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}\right)\right\} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta}\frac{d^m}{d\zeta^m}v(\zeta-\nu)d\zeta. \qquad (2.11)$$

По поводу математического обоснования этого равенства и регуляризации интегралов мы отсылаем читателя к книге [5].

Используя уравнение Эйри $v''(t)=tv(t)$, равенство (2.11) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(-i\sigma)^m&\exp\left\{i\left(\sigma\nu-\frac{\sigma^3}{3}\right)\right\}\\ &=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta}[P_m(\zeta,\nu)v(\zeta-\nu)+Q_m(\zeta,\nu)v'(\zeta-\nu)]d\zeta, \qquad (2.12)\end{aligned}$$

в которой многочлены P_m и Q_m по ζ и ν быстро усложняются с ростом m.

Таким образом для $W_1^{\mathrm{inc}}(\sigma,\nu)$ получаем следующую формулу

$$\begin{aligned}&W_1^{\mathrm{inc}}(\sigma,\nu)\\ &\quad= i\left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/3}\frac{\rho_0'}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta}\left[(\zeta^2-\nu^2)v(\zeta-\nu)+2v'(\zeta-\nu)\right]d\zeta, \qquad (2.13)\end{aligned}$$

в которой $v'(\zeta-\nu)$ есть производная от $v(t)$ по аргументу t.

Теперь третий $W_2^{\rm inc}$ и дальнейшие члены разложения падающей волны в области Фока приобретают следующую структуру, см. (2.12). Например, слагаемое при $m = 2$ в разложении (2.9) представляется в виде

$$W_2^{\rm inc}(\sigma,\nu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{2/3}\int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{i\sigma\zeta}[P_2(\zeta,\nu)v(\zeta-\nu)+Q_2(\zeta,\nu)v'(\zeta-\nu)]d\zeta. \quad (2.14)$$

Здесь полиномы $P_2(\zeta,\nu)$ и $Q_2(\zeta,\nu)$ таковы:

$$P_2 = \frac{8\alpha}{5!}(\zeta-\nu)+i\frac{\beta}{3!}\nu-\frac{{\rho_0'}^2}{8}[4\zeta+3(\zeta-\nu)+1/4(\zeta-\nu)^4+\nu(\zeta-\nu)^3+\nu^2(\zeta-\nu)^2];$$

$$Q_2 = \frac{2\alpha}{5!}(\zeta-\nu)^2+i\frac{\beta}{3!}\nu(\zeta-\nu)-\frac{{\rho_0'}^2}{4}[3/2(\zeta-\nu)^2+3\nu(\zeta-\nu)+\nu^2];$$

а коэффициенты α,β определены равенствами (2.8).

Формулы для $W_m^{\rm inc}(\sigma,\nu)$, $m = 0,1,2$ дают нам представление об аналитической структуре отраженного поля.

§3. Область Фока. Построение отраженной волны

Отраженную волну $U^{\rm ref} = e^{iks}W^{\rm ref}$ мы будем строить в виде асимптотического ряда по степеням $k^{-m/3}$, $m = 0,1,2,\ldots$, аналогично ряду (2.9)

$$W^{\rm ref} = \sum_{m=0} W_m^{\rm ref}k^{-m/3}. \quad (3.1)$$

Первый шаг состоит в выводе рекуррентной системы уравнений для последовательного вычисления коэффициентов $W_m^{\rm ref}$ функции ослабления $W^{\rm ref}$. После разложения коэффициентов исходного уравнения Гельмгольца по степеням s,n и перехода к масштабированным переменным σ, ν, см. (2.1), результат можно записать в виде

$$(\Delta+k^2)e^{iks}W = e^{iks}g\sum_{m=0} k^{(-m)/3}L_mW = 0, \quad (3.2)$$

где общий множитель g равен $g = (4\mathbf{M}_0^4)/(\rho_0^2)$, а L_m, $m = 0,1,2,\ldots$, являются дифференциальными операторами по σ и ν (I-го и II-го порядков), содержащие множителями многочлены по σ и ν. С ростом m

явные формулы для операторов заметно усложняются и вывод их требует хотя и простых, но громоздких вычислений. Далее мы приведем их явный вид для $m = 0, 1, 2$.

Подставляя в (3.2) разложение (3.1)для функции ослабления W^{ref} и приравнивая нулю коэффициенты при одинаковых степенях k, получим искомую рекуррентную систему

$$\begin{aligned} &L_0 W_0^{\mathrm{ref}} = 0, \\ &L_0 W_1^{\mathrm{ref}} + L_1 W_0^{\mathrm{ref}} = 0, \\ &L_0 W_2^{\mathrm{ref}} + L_1 W_1^{\mathrm{ref}} + L_2 W_0^{\mathrm{ref}} = 0 \quad \text{и т.д.}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

для последовательного построения функций W_m^{ref}. Уравнения (3.3) должны решаться одновременно с краевыми условиями на поверхности рассеивателя при $\nu = 0$

$$(W_m^{\mathrm{ref}} + W_m^{\mathrm{inc}})|_{\nu=0} = 0, \quad m = 0, 1, 2, \ldots,$$

вытекающими из условий Дирихле в (1.1), и некоторыми условиями при $\nu \to +\infty$, такими, что W^{ref} описывают волну, уходящую от тела вращения. Подробно эти условия обсуждаются в [3–5].

Заметим, что поскольку падающая волна удовлетворяет уравнению Гельмгольца, то функции W_m^{inc} автоматически удовлетворяют уравнениям (3.3), и это может использоваться для контроля правильности вычислений.

Главной особенностью уравнений (3.3) в рассматриваемом нами случае вытянутого тела по сравнению с традиционным методом параболического уравнения Фока является то обстоятельство, что операторы L_m содержат новый большой параметр $\mathbf{\Lambda}_0 = \rho(0)/f(0)$, характеризующий степень вытянутости рассеивателя в окрестности экватора. Подчеркнем, что в наших вычислениях параметр $\mathbf{\Lambda}_0$ считается независимым от большого параметра Фока $\mathbf{M}_0 = (k\rho(0)/2)^{1/3}$ и он является ограниченным сверху, так как тело вращения должно быть строго выпуклым и по исходному предположению $kf(0) \gg 1$.

Наша ближайшая цель состоит в том, чтобы выяснить, как параметр $\mathbf{\Lambda}_0$ входит в уравнения (3.3). Для этого обратимся к формулам (1.5)–(1.7). Как уже отмечалось, выделенная часть A в операторе Гельмгольца в точности совпадает с двумерной задачей рассеяния падающей плоской волны на кривой $x = f(z)$, т.е. в сечении тела вращения плоскостью $\varphi = \mathrm{const}$, поэтому она не содержит поперечного радиуса

кривизны поверхности $\partial\Sigma$ (не содержит h_φ). Таким образом, остается рассмотреть как преобразуется в области Фока часть B оператора Гельмгольца, определенная формулой (1.7).

Из явных формул (1.4), (2.4)для коэффициентов Ламе h_s и h_φ получаем, что

$$\frac{\partial h_\varphi}{\partial n} = \frac{dz(s)}{ds}, \quad \frac{\partial h_\varphi}{\partial s} = f'(z(s))\frac{dz(s)}{ds} + n\frac{d^2z(s)}{ds^2}$$

и их разложения по степеням s и n не содержат поперечный радиус кривизны $f(0)$. Это же справедливо, очевидно, и для разложения h_s^{-2} по степеням s и n. Итак, все коэффициенты, входящие в квадратные скобки оператора B, раскладываются в области Фока лишь по отрицательным степеням параметра $\mathbf{M}_0$. С этой целью перейдем от s и n к переменным σ и ν в квадратных скобках и выделим из них общий множитель g, входящий в формулу (3.2). После несложных вычислений получаем

$$g^{-1}\left[\frac{1}{h_s^2}\frac{\partial h_\varphi}{\partial s}\left(ikW + \frac{\partial W}{\partial s}\right) + \frac{\partial h_\varphi}{\partial n}\frac{\partial W}{\partial n}\right] = \frac{\rho_0}{2\mathbf{M}_0^2}\left[-i\sigma W + \frac{\partial W}{\partial \nu} + O\Big(\frac{1}{\mathbf{M}_0}\Big)\right]. \quad (3.4)$$

Обратимся теперь к коэффициенту $h_\varphi(s,n)$. Раскладывая правую часть в равенстве (2.4) по степеням s и переходя к масштабированным переменным σ и ν, получаем последовательно

$$\begin{aligned} h_\varphi(\sigma,\nu) &= f(0) - \frac{s^2}{2\rho_0} + n + \frac{s^3\rho_0'}{3!\rho_0^2} + \frac{s^4(\rho_0\rho_0'' - 2\rho_0'^2 + 1)}{3!\rho_0^3} - \frac{s^2 n}{2\rho_0^2} + O(s^5) \\ &= f(0)\Bigg\{1 + \frac{\mathbf{\Lambda}_0}{2\mathbf{M}_0^2}\Bigg[(\nu - \sigma^2) + \frac{\sigma^3\rho_0'}{12\mathbf{M}_0} \\ &\qquad + \frac{\sigma^2}{2\mathbf{M}_0^2}\left(\frac{\sigma^2}{3!}(\rho_0\rho_0'' - 2\rho_0'^2 + 1) - \nu\right) + O(\mathbf{M}_0^{-3})\Bigg]\Bigg\}, \end{aligned} \quad (3.5)$$

где выражение в квадратных скобках представляет собой разложение по целым отрицательным степеням параметра Фока $\mathbf{M}_0$. Отсюда получаем для h_φ^{-1} следующее разложение

$$h_\varphi^{-1}(\sigma,\nu) = \frac{1}{f(0)}\sum_{m=0}(-1)^m\left(\frac{\mathbf{\Lambda}_0}{2\mathbf{M}_0^2}\right)^m\left[(\nu - \sigma^2) + O\Big(\frac{1}{\mathbf{M}_0}\Big)\right]^m. \quad (3.6)$$

Напомним, что параметр $\mathbf{\Lambda}_0$ характеризует вытянутость тела вращения в окрестности экватора. Наконец, подставляя (3.4) и (3.6) в формулу (1.7) для части B исходного оператора, приходим к следующей структуре операторов L_m в отношении независимого дополнительного параметра $\mathbf{\Lambda}_0$: он входит в рекуррентную систему (3.3) лишь в виде отношения $\mathbf{\Lambda}_0/\mathbf{M}_0^2$ и его целых степеней и появляется первый раз лишь в третьем из уравнений (3.3). Далее, с уменьшением радиуса кривизны $f(0)$ экватора параметр $\mathbf{\Lambda}_0$ растет и тем самым в этом отношении $\mathbf{\Lambda}_0$ начинает компенсировать влияние большого параметра Фока $\mathbf{M}_0$. Отсюда вытекает, что решение рекуррентной системы (3.3) будет сохранять асимптотический характер по $\mathbf{M}_0$ при условии

$$\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{M}_0^{2-\varepsilon}, \tag{3.7}$$

где ε любое положительное число из интервала $0 < \varepsilon < 2$. Это условие представляет собой ограничение на возможность применения классического метода параболического уравнения Фока для задачи дифракции падающего волнового поля на строго выпуклом теле вращения в окрестности границы свет-тень (область Фока).

Отметим, что возможность положить $\varepsilon = 0$ в (3.7) требует дополнительных исследований.

Обратимся далее к рекуррентной системе (3.3), решением которой является отраженная волна. В рассматриваемом нами трехмерном случае алгоритм или метод ее нахождения остается таким же, как и в двумерном случае. Мы вкратце изложим его, следуя работам [3–5] и опуская многие нетривиальные математические детали, касающиеся, например, регуляризации возникающих интегралов путем деформации контуров интегрирования и т.д. .

Первое из уравнений (3.3) $L_0 W_0^{\mathrm{ref}} = 0$, после сокращения на общий множитель g принимает вид

$$\left(i\frac{\partial}{\partial\sigma} + \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + \nu\right) W_0^{\mathrm{ref}} = 0. \tag{3.8}$$

В нем разделяются переменные σ и ν, и по ν возникает уравнение Эйри.

Решение берется в виде

$$W_0^{\mathrm{ref}} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta} B_0(\zeta) w_1(\zeta - \nu) d\zeta, \tag{3.9}$$

где $B_0(\zeta)$ некоторая, пока произвольная функция, а $w_1(\zeta-\nu)$ функция Эйри в определении Фока [3]. Выбор именно этой функции определяется принципом предельного поглощения, который заключается в том, что при малой положительной мнимой части волнового числа k, $\operatorname{Im} k > 0$, функция $w_1(\zeta-\nu)$ стремится к нулю при $\nu \to +\infty$, см. [3]. Можно также сказать при этом, что формула (3.9)описывает уходящую от рассеивателя волну при $\nu \to +\infty$.

Функция $B_0(\zeta)$ определяется из краевого условия $W_0^{\mathrm{inc}} + W_0^{\mathrm{ref}} = 0$ при $\nu = 0$:

$$B_0(\zeta) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)}.$$

Тем самым W_0^{ref} находится однозначно.

Полное поле в главном асимптотическом приближении в области Фока имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} U_0(s,n) &= e^{iks} W_0(\sigma,\nu) = e^{iks}(W_0^{\mathrm{inc}} + W_0^{\mathrm{ref}}) \\ &= \frac{e^{iks}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{\mathcal{L}} e^{i\sigma\zeta} \left[v(\zeta-\nu) - \frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} w_1(\zeta-\nu) \right] d\zeta. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь контур интегрирования $\mathcal{L}$ идет по лучу $\arg\zeta = 2\pi/3$ от бесконечности до 0 и по лучу $\arg\zeta = -\pi/3$ от нуля до бесконечности.

Остальные уравнения (3.3) являются неоднородными уравнениями и нам необходимо строить общее решение каждого из них, при этом общее решение однородного уравнения будет вида (3.9) со своей неизвестной функцией $B_m(\zeta)$, $m = 1, 2, \ldots$. Частное решение строится в виде аналогичном формуле (2.14), но вместо функции $v(\zeta-\nu)$ и ее производной $v'(\zeta-\nu)$ нужно взять $w_1(\zeta-\nu)$ и $w_1'(\zeta-\nu)$ по тем же соображениям, что и в главном члене отраженной волны.

Ниже мы приведем явные формулы для операторов $\widetilde{L}_m$, которые возникают из L_m в уравнениях (3.3) после выделения координаты σ с помощью преобразования Фурье по формуле (2.11) с учетом того факта, что функцию $v(\zeta-\nu)$ заменим на $w_1(\zeta-\nu)$, а контур интегрирования заменим на соответствующий регуляризирующий контур:

$$\widetilde{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial\nu^2} + (\nu-\zeta); \tag{3.11}$$

$$\widetilde{L}_1 = -i\left(\frac{2}{\rho}\right)^{1/3} \rho'\nu \frac{\partial}{\partial\zeta}; \tag{3.12}$$

$$\widetilde{L}_2 = \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{2/3}\left[\frac{\rho_0\rho_0'' - 2\rho_0'^2}{2}\nu\frac{\partial^2}{\partial\zeta^2} - \frac{3\nu^2}{4}\right.$$
$$\left. + \nu\zeta - \frac{1}{4}\zeta^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\nu} + \frac{\mathbf{\Lambda}_0}{2}\left(\frac{\partial}{\partial\zeta} + \frac{\partial}{\partial\nu}\right)\right]. \quad (3.13)$$

Опуская порой громоздкие вычисления, окончательно выпишем формулы для отраженного поля в области Фока:

$$W_0^{\mathrm{ref}}(\sigma,\nu) = -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta}\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)}w_1(\zeta-\nu)d\zeta; \quad (3.14)$$

$$W_1^{\mathrm{ref}}(\sigma,\nu) = \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/3}\frac{i\rho_0'}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta}\{B_1(\zeta)w_1(\zeta-\nu)$$
$$+P_1^{(2)}\nu^2 w_1(\zeta-\nu) + (Q_1^{(1)}\nu + Q_1^{(0)})w_1'(\zeta-\nu)\}d\zeta. \quad (3.15)$$

Здесь коэффициенты B_1, $P_1^{(2)}$, $Q_1^{(1)}$ и $Q_1^{(0)}$ имеют вид

$$B_1(\zeta) = \left[-\frac{\zeta^2 v(\zeta)}{4w_1(\zeta)} + \frac{1}{2}\frac{1}{w_1^2(\zeta)} - \frac{2}{3}\frac{\zeta w_1'(\zeta)}{w_1^3(\zeta)}\right];$$
$$P_1^{(2)}(\zeta) = \frac{v(\zeta)}{4w_1(\zeta)}; \quad Q_1^{(1)}(\zeta) = \frac{1}{3w_1^2(\zeta)}; \quad (3.16)$$
$$Q_1^{(0)}(\zeta) = \left(\frac{2\zeta}{3w_1^2(\zeta)} - \frac{v(\zeta)}{2w_1(\zeta)}\right).$$

Далее

$$W_2^{\mathrm{ref}}(\sigma,\nu) = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{2/3}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{i\sigma\zeta}\left\{B_2(\zeta)w_1(\zeta-\nu)\right.$$
$$\left. + \left[\sum_{j=1}^{4} P_2^{(j)}(\zeta)\nu^j\right]w_1(\zeta-\nu) + \left(\sum_{j=0}^{3} Q_2^{(j)}(\zeta)\nu^j\right)w_1'(\zeta-\nu)\right\}d\zeta. \quad (3.17)$$

Здесь и ниже во всех формулах, относящихся к области Фока, функции ρ, ρ', ρ'' от s вычислены в точке $s=0$. Ввиду громоздкости формул, приведенных ниже, ρ, ρ', ρ'' входящие в эти формулы, не содержат нижнего индекса. Тогда коэффициенты полиномов по ν равны

$$P_2^{(4)}(\zeta) = \frac{\rho'^2 v(\zeta)}{32w_1(\zeta)}; \quad P_2^{(2)}(\zeta) = \left[\frac{(6\rho\rho'' + \rho'^2)}{24}\frac{1}{w_1^2(\zeta)} - \frac{\rho'^2\zeta^2 v(\zeta)}{16w_1(\zeta)}\right];$$

$$P_2^{(3)}(\zeta) = \left(\frac{-\rho'^2 w_1'(\zeta)}{9w_1^3(\zeta)}\right); \quad P_2^{(1)}(\zeta) = \left[\frac{(-4\rho\rho''+\rho'^2+4)}{40}\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \frac{\rho'^2\zeta}{6w_1^2(\zeta)}\right];$$

$$Q_2^{(3)}(\zeta) = \frac{\rho'^2}{12w_1^2(\zeta)}; \quad Q_2^{(2)}(\zeta) = \left[\frac{(\rho'^2-4\rho\rho''-6)}{40}\frac{v(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \frac{\rho'^2}{6}\frac{\zeta}{w_1^2(\zeta)}\right];$$

$$Q_2^{(1)}(\zeta) = \left[\frac{(\rho'^2+\rho\rho''+4)}{30}\frac{\zeta v(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \frac{5\rho'^2}{36}\frac{\zeta^2}{w_1^2(\zeta)} + \frac{(\rho'^2+3\rho\rho'')}{9}\frac{w_1'(\zeta)}{w_1^3(\zeta)} - \frac{2\rho'^2}{3}\frac{\zeta w_1'^2(\zeta)}{w_1^4(\zeta)}\right];$$

$$Q_2^{(0)}(\zeta) = \left[\frac{(23\rho'^2+8\rho\rho''+2)}{120}\frac{\zeta^2 v(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \frac{5\rho'^2}{18}\frac{\zeta^3}{w_1^2(\zeta)} - \frac{4\rho'^2}{3}\frac{\zeta^2 w_1'^2(\zeta)}{w_1^4(\zeta)} + \frac{(11\rho'^2+6\rho\rho'')}{9}\frac{\zeta w_1'(\zeta)}{w_1^3(\zeta)} - \left(\frac{\mathbf{\Lambda}_0}{2} + \frac{(11\rho'^2+6\rho\rho'')}{12}\right)\frac{1}{w_1^2(\zeta)}\right];$$

$$B_2(\zeta) = -Q_2^{(0)}(\zeta)\frac{w_1'(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \left[\frac{(23\rho'^2+8\rho\rho''+2)}{120}\frac{\zeta^2 v'(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \frac{(17\rho'^2+32\rho\rho''+8)}{120}\frac{\zeta v(\zeta)}{w_1(\zeta)} + \frac{\rho'^2}{32}\frac{\zeta^4 v(\zeta)}{w_1(\zeta)}\right]. \quad (3.18)$$

Построенное таким образом двухмасштабное разложение для поля в области Фока позволяет получить приближенные формулы для расчета волнового поля, которые зависят от относительной силы двух больших параметров задачи $\mathbf{M}_0$ и $\mathbf{\Lambda}_0$. Это определяется величиной ε в формуле (3.7), которая зависит от конкретных параметров исходной задачи, а именно, от k, ρ_0 и $f(0)$ в окрестности границы свет-тень, т.е. в области Фока. Ниже мы приведем такие приближенные формулы для тока на поверхности рассеивателя для двух значений $\varepsilon = 1/2$ и $\varepsilon = 1$.

Напомним, что током I на $\partial\Sigma$ в рассматриваемой задаче называется следующая величина

$$I = \frac{\partial}{\partial n}(U^{\mathrm{inc}} + U^{\mathrm{ref}})\Big|_{n=0} = e^{iks}\frac{2\mathbf{M}_0^2}{\rho_0}\frac{\partial}{\partial\nu}(W^{\mathrm{inc}} + W^{\mathrm{ref}}). \quad (3.19)$$

При $\varepsilon = 1/2$ главное слагаемое от части B исходного оператора имеет порядок $\mathbf{M}_0^{-1/2}$, как это вытекает из формул (3.4) и (3.6). Следовательно, слагаемые в приведенных выше формулах (3.17) для W_2^{ref}, содержащие множитель $\mathbf{\Lambda}_0/\mathbf{M}_0^2$ следует поместить сразу за главным

слагаемым W_0^{ref} разложения (3.1), так как второй член этого асимптотического разложения W_1^{ref} имеет уже более высокий порядок малости $\mathbf{M}_0^{-1}$. В этом приближении мы приходим к следующей формуле для тока:

$$I \simeq e^{iks}\frac{2\mathbf{M}_0^2}{\rho_0}\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\sigma\zeta}}{w_1(\zeta)}\,d\zeta\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{\mathbf{\Lambda}_0}{\mathbf{M}_0^2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sigma\zeta}\left[\frac{w_1'^2(\zeta)}{w_1^3(\zeta)}-\frac{\zeta}{w_1(\zeta)}\right]d\zeta\right\}. \quad (3.20)$$

Если же мы положим $\varepsilon = 1$, то к этой формуле следует добавить ток, получаемый от второго члена асимптотики полного поля $W_1^{\mathrm{inc}} + W_1^{\mathrm{ref}}$, поскольку $\mathbf{\Lambda}_0/\mathbf{M}_0^2$ имеет порядок $\mathbf{M}_0^{-1}$, как и второе слагаемое асимптотики. Дифференцируя по ν сумму $W_1^{\mathrm{inc}} + W_1^{\mathrm{ref}}$ и полагая $\nu = 0$, получим

$$\frac{\partial}{\partial\nu}(W_1^{\mathrm{inc}} + W_1^{\mathrm{ref}})\Big|_{\nu=0} = \frac{1}{4\sqrt{\pi}}\frac{i\rho'(0)}{\mathbf{M}_0}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{i\sigma\zeta}\left\{\zeta^2\frac{v(\zeta)w_1'(\zeta)}{w_1(\zeta)}\right.$$
$$\left.-2(1+\zeta)v(\zeta)-\frac{5}{3}\frac{\zeta^2}{w_1(\zeta)}-\frac{2}{3}\frac{w_1'(\zeta)}{w_1^2(\zeta)}+\frac{8\zeta}{3}\frac{w_1'^2(\zeta)}{w_1^3(\zeta)}\right\}d\zeta \quad (3.21)$$

и это выражение должно быть добавлено в правую часть (3.20).

Обратим внимание на результат, непосредственно вытекающий из предыдущего. От силы вытянутости тела вращения в области Фока, т.е. от относительной силы параметров $\mathbf{\Lambda}_0$ и $\mathbf{M}_0$ зависит шкала функций, по которой строится асимптотика, так как появляются слагаемые порядка $\mathbf{M}_0^{-\varepsilon}{=}O(k^{-\varepsilon/3})$ и их целочисленные степени. При $\varepsilon = 1$ шкала функций есть $O(k^{-m/3})$, в точности совпадающая с той , что возникает в классической задаче Фока.

§4. Волновое поле в затененной части области Фока

Напомним, что граница свет-тень на $\partial\Sigma$ соответствует $s = 0$ и при малом n с ростом s точка наблюдения попадает в затененную часть вблизи рассеивателя. В локальных растянутых координатах σ и ν это условие соответствует $\sigma \to +\infty$ и ограниченным ν. В этом

случае волновое поле может быть получено с помощью вычетов из интегралов для полного поля, см. [3,5].

Действительно, путь интегрирования в выражении для полного поля во всех порядках асимптотического разложения можно взять в виде контура, идущего по двум лучам: по лучу из точки $-\infty$ в точку $\zeta = 0$ вдоль прямой $\arg\zeta = 2\pi/3$, а второй луч проходит по положительной полуоси $\mathrm{Re}\,\zeta \geqslant 0$ от $\zeta = 0$ до $+\infty$. В верхней полуплоскости $\mathrm{Im}\,\zeta > 0$ экспонента $\exp\{i\sigma\zeta\}$ быстро убывает при больших положительных σ, так как $|\exp\{i\sigma\zeta\}|{=}\exp\{-\sigma\mathrm{Im}\,\zeta\}$ и контур интегрирования удобно поднять в верхнюю полуплоскость. При этом выделятся вычеты в полюсах подынтегральных выражений, которые возникают в корнях функции Эйри $w_1(\zeta)$, расположенных на луче $\arg\zeta = \pi/3$. К сожалению, с ростом номера асимптотического разложения решения W_m^{ref}, $m = 0, 1, 2, \ldots$, эти вычисления также быстро становятся громоздкими, что можно видеть из формул (3.14)–(3.17). В этих формулах у коэффициентов $B_0(\zeta)$, $P_1^{(2)}(\zeta)$, $P_2^{(j)}(\zeta)$, $j = 1, 2, 3, 4$ полиномов по ν при функциях $w_1(\zeta - \nu)$ и у коэффициентов $Q_1^{(j)}(\zeta)$, $j = 0, 1$, $Q_2^{(j)}(\zeta)$, $j = 0, 1, 2, 3$ полиномов по ν при производных функций $w_1'(\zeta - \nu)$ возрастают степени функции $w_1(\zeta)$ в знаменателях, а значит и порядок полюсов. Подчеркнем, что падающее поле не дает вклада в этой области, так как не содержит $w_1(\zeta)$ в знаменателях.

Ниже мы приводим результаты вычислений для трех членов асимптотического разложения. Особо отметим, что эти формулы необходимы для однозначного построения волн соскальзывания, возникающих в затененной области рассеивателя:

$$U(s,n) = e^{iks}\left[W_0(\sigma,\nu) + \frac{W_1(\sigma,\nu)}{k^{1/3}} + \frac{W_2(\sigma,\nu)}{k^{2/3}} + O(k^{-1})\right],$$

$$W_0(\sigma,\nu) = -i\,2\sqrt{\pi}\sum_{q=1}\frac{e^{i\sigma\zeta_q}}{[w_1'(\zeta_q)]^2}w_1(\zeta_q - \nu); \tag{4.1}$$

$$\frac{W_1(\sigma,\nu)}{k^{1/3}} = \frac{2\sqrt{\pi}\rho'}{\mathbf{M}_0}\sum_{q=1}\frac{e^{i\sigma\zeta_q}}{[w_1'(\zeta_q)]^2}$$

$$\times\left\{\left(\frac{\nu^2}{12} - \frac{\sigma^2\zeta_q}{3} + \frac{i\sigma}{6} + \frac{\zeta_q^2}{4}\right)w_1(\zeta_q - \nu) - \frac{i\sigma\nu}{3}w_1'(\zeta_q - \nu)\right\}; \tag{4.2}$$

$$\frac{W_2(\sigma,\nu)}{k^{2/3}} = \frac{i2\sqrt{\pi}}{\mathbf{M}_0^2}\sum_{q=1}\frac{e^{i\sigma\zeta_q}}{[w_1'(\zeta_q)]^2}\Big\{\mathcal{B}_2(\sigma,\zeta_q)w_1(\zeta-\nu)$$

$$+\Big[\sum_{j=1}^{4}P_2^{(j)}(\sigma,\zeta_q)\nu^j\Big]w_1(\zeta-\nu)+\mathcal{Q}_2^{(0)}(\sigma,\zeta_q)w_1'(\zeta-\nu)$$

$$+\Big(\sum_{j=1}^{3}Q_2^{(j)}(\sigma,\zeta_q)\nu^j\Big)w_1'(\zeta-\nu)+\frac{\mathbf{\Lambda}_0}{4}[\nu-\sigma^2]w_1(\zeta_q-\nu)\Big\}. \tag{4.3}$$

Коэффициенты $\mathcal{B}_2(\sigma,\zeta_q)$, $P_2^{(j)}(\sigma,\zeta_q)\nu^j$, $j=1,2,3,4$ и $\mathcal{Q}_2^{(0)}(\sigma,\zeta_q)$, $Q_2^{(l)}(\sigma,\zeta_q)\nu^l$, $l=1,2,3$ при функции Эйри и ее производной есть полиномы по σ,ν,ζ_q соответствующих степеней. Эти коэффициенты получены из коэффициентов $B_2(\zeta)$, $P_2^{(j)}(\zeta)$, $j=1,2,3,4$ и $Q_2^{(l)}(\zeta)$, $l=0,1,2,3$ формул (3.17) и (3.18) после нахождения вычетов в полюсах подынтегральных выражений, т.е. в корнях функции Эйри $w_1(\zeta)$. Заметим, что это соответствие нарушается в коэффициенте $Q_2^{(0)}$, входящего и в коэффициент B_2, тем, что из него извлечено слагаемое, содержащее множитель $\mathbf{\Lambda}_0/\mathbf{M}_0^2$, (см. формулу (4.3)).

§5. Волны соскальзывания

При построении волн соскальзывания, (см. [4, 5, 9]) предполагается, что в отличие от области Фока длина дуги геодезической удовлетворяет условию $s=O(1)$, а масштабированная нормаль ν определяется равенством $\nu(n,s)=k^{2/3}2^{1/3}\rho^{-1/3}\,n$, в котором $\rho(s)$ есть радиус кривизны геодезической в точке s. Большой параметр $\mathbf{M}=(k\rho(s))^{1/3}2^{-1/3}$ теперь зависит от длины дуги s, и условие $\mathbf{M}\gg 1$ приводит, вообще говоря, к ограничению на допустимый интервал изменения s. Таким образом мы оказываемся в пограничном слое лишь по нормали, так как предполагается, что $\nu(n,s)=O(1)$ при $k\to\infty$.

Решение уравнения Гельмгольца разыскивается в виде

$$U=\exp\{iks+ik^{1/3}\Phi(s)\}\sum_{m=0}V_m(s,\nu)k^{-m/3}, \tag{5.1}$$

в котором

$$\Phi(s)=\frac{\zeta}{2^{1/3}}\int_0^s\rho^{-2/3}(s)\,ds \tag{5.2}$$

и постоянная разделения ζ оказывается в дальнейшем корнем функции Эйри w_1, т. е. $w_1(\zeta) = 0$. Для искомых функций V_l получаем рекуррентную систему уравнений

$$\mathcal{L}_0 V_0 = 0, \quad \mathcal{L}_0 V_1 + \mathcal{L}_1 V_0 = 0, \quad \mathcal{L}_0 V_2 + \mathcal{L}_1 V_1 + \mathcal{L}_2 V_0 = 0, \ldots, \tag{5.3}$$

где $\mathcal{L}_j$, $j = 0, 1, 2, 3, \ldots$ есть дифференциальные операторы, содержащие производные по s и ν. Ниже мы приводим явные формулы для первых четырех из них

$$\mathcal{L}_0 = \frac{\partial^2}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta), \quad \mathcal{L}_1 = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{1/3} \frac{i\rho}{2} \left[2\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \ln f}{\partial s}\right], \tag{5.4}$$

$$\mathcal{L}_2 = \left(\frac{2}{\rho}\right)^{2/3} \left\{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial \nu}\Big(1 + \mathbf{\Lambda})\Big) - \frac{3\nu^2}{4} + \zeta\nu - \frac{\zeta^2}{4}\right\}, \tag{5.5}$$

$$\mathcal{L}_3 = \left(\frac{2}{\rho}\right)\frac{i\rho}{2}\left[\left(\frac{\zeta}{2} - \nu\right)\left(2\frac{\partial}{\partial s} + \frac{\partial \ln f}{\partial s}\right) - \frac{\zeta\rho'}{3\rho} + \nu\left(\frac{\partial \ln \rho}{\partial s} - \frac{\partial \ln f}{\partial s}\mathbf{\Lambda}\right)\right]. \tag{5.6}$$

В последних уравнениях появляется параметр $\mathbf{\Lambda}(s) = \rho(s)/f(s)$, характеризующий вытянутость рассеивателя вращения. В данном случае параметр тоже является функцией длины дуги s геодезической на $\partial\Sigma$. Для вытянутого тела следует считать, что $\mathbf{\Lambda}(s) \gg 1$.

К системе уравнений (5.3) добавляются краевые условия на поверхности тела $V_m = 0$ при $\nu = 0$ и ниже формулируется аналог условия "излучения" такого, что $V_m \to 0$ при комплексных ν, уходящих на бесконечность. Метод решения рекуррентной системы уравнений (5.3) был предложен и разработан в работах [5], (глава 3), и [9]. Мы будем использовать этот метод в наших построениях.

Так же, как и в области Фока, считаем, что параметры $\mathbf{M}(s)$ и $\mathbf{\Lambda}(s)$ являются независимыми при решении рекуррентных уравнений (5.3), а приближенные формулы для расчета волнового поля предлагаются на основе оценки относительной силы этих больших параметров.

Существенную роль в этом играет структура части B оператора Гельмгольца, так как часть A в данном случае не содержит параметр $\mathbf{\Lambda}(s)$.

Поперечный радиус кривизны рассеивателя входит в часть B оператора Гельмгольца через коэффициент Ламе h_φ. Используя равенство

(2.4) и заменяя нормаль n на $\nu(n,s) = k^{2/3}2^{1/3}\rho^{-1/3}\,n$, получаем для h_φ следующее выражение

$$h_\varphi(s,\nu) = f(z(s))\left(1 + \frac{\mathbf{\Lambda}(s)\,\nu}{2\mathbf{M}^2(s)}\frac{dz}{ds}\right). \tag{5.7}$$

Отсюда вытекает, что при условии $\mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{M}^{2-\varepsilon}(s)$, $0 < \varepsilon < 2$, аналогичном условию (3.7) в области Фока, h_φ^{-1} можно представить в виде разложения по степеням

$$\frac{\mathbf{\Lambda}(s)\,\nu}{2\mathbf{M}^2(s)}\frac{dz}{ds},$$

а именно,

$$h_\varphi^{-1}(s,\nu) = \frac{1}{f(z(s))}\sum_{m=0}(-1)^m\left(\frac{\mathbf{\Lambda}(s)\,\nu}{2\mathbf{M}^2(s)}\frac{dz}{ds}\right)^m. \tag{5.8}$$

При этом рекуррентная система уравнений (5.3) сохранит асимптотический характер при $k \to \infty$. В случае $\varepsilon = 0$ получаем, что $\frac{\mathbf{\Lambda}(s)}{2\mathbf{M}^2(s)}\frac{dz}{ds} = O(1)$ при $k \to \infty$. Разложение (5.8) становится невозможным и в уравнениях (5.3) необходима радикальная перестройка операторов $\mathcal{L}_m$.

Обратимся далее к решению уравнений (5.3). Решение главного (однородного) уравнения $\mathcal{L}_0 V_0 = 0$ выбирается в виде

$$V_{0,q} = A_0(s)w_1(\zeta_q - \nu),$$

где $w_1(\zeta_q - \nu)$ есть функция Эйри, ζ_q есть корень функции Эйри с номером q, а $A_0(s)$ пока произвольная функция длины дуги s геодезической. Если начнем удаляться вдоль нормали от границы $\partial\Sigma$ ($|\nu| \to \infty$), то при $-\pi < \arg(-\nu) < -\pi/3$ функция $w_1(\zeta_q - \nu) \to 0$ убывает и тем самым удовлетворяет условию “излучения”. Следовательно, функция $V_{0,q}$ является ненулевым решением однородной задачи Штурма–Лиувилля с оператором Эйри, краевым условием Дирихле при $\nu = 0$ и условием “излучения” при $|\nu| \to \infty$ для любого $A_0(s)$.

Все последующие уравнения системы (5.3) являются неоднородными, для которых однородное уравнение имеет ненулевое решение. Это приводит к введению условия разрешимости на каждом шаге неоднородных задач Штурма–Лиувилля. Условие разрешимости для следующего приближения $V_{1,q}$ приводит к ортогональности правой части

$-\mathcal{L}_1 V_0$ уравнения $\mathcal{L}_0 V_1 + \mathcal{L}_1 V_0 = 0$ к решению однородного уравнения V_0:

$$\int\limits_l \mathcal{L}_1 V_0\, w_1(\zeta_q - \nu) d\nu = 0,$$

где интегрирование осуществляется по лучу $\arg \nu = \pi/3$, а выражение $\mathcal{L}_1 V_{0,q}$ имеет вид

$$\mathcal{L}_1 V_{0,q} = \left[2\frac{dA_0}{ds} + A_0 \frac{d \ln f(z(s))}{ds}\right] w_1(\zeta_q - \nu) + A_0 \nu w_1'(\zeta_q - \nu) \frac{2}{3} \frac{d \ln \rho(s)}{ds}.$$

После вычисления соответствующих интегралов возникает уравнение переноса для функции $A_0(s)$:

$$\frac{dA_0}{ds} + \left[\frac{1}{2}\frac{d \ln f(z(s))}{ds} + \frac{1}{6}\frac{d \ln \rho(s)}{ds}\right] A_0(s) = 0.$$

К этому уравнению следует добавить начальное значение $A_0(s)$ при $s = 0$

$$A_0(0) = -\frac{2\sqrt{\pi}\, i}{w_1'^2(\zeta_q)} \sqrt{f(0)}\, \sqrt[6]{\rho(0)}.$$

Оно возникает из требования "сшивания" волн соскальзывания с решением для отраженной волны в затененной части области Фока. Окончательная формула для главного члена асимптотики такова

$$V_{0,q}(s,\nu) = -\frac{2\sqrt{\pi}\, i}{w_1'^2(\zeta_q)} \sqrt{\frac{f(0)}{f(z(s)}} \sqrt[6]{\frac{\rho(0)}{\rho(s)}} w_1(\zeta_q - \nu). \tag{5.9}$$

Подобным же образом строятся последующие члены асимптотического разложения для волн соскальзывания. К сожалению, при этом вычисления становятся с каждым шагом все более громоздкими.

Следующее приближение $V_{1,q}(s,\nu)$ к решению задачи получим в виде

$$V_{1,q}(s,\nu) = A_0(s)\left[\alpha_1(s) + \nu^2 \frac{i\rho'}{12}\left(\frac{2}{\rho}\right)^{1/3}\right] w_1(\zeta_q - \nu). \tag{5.10}$$

Функция $A_1(s) = A_0(s)\alpha_1(s)$ найдена из уравнения переноса, которое является необходимым и достаточным условием разрешимости неоднородного уравнения

$$\int\limits_0^{\infty e^{i\pi/3}} [\mathcal{L}_1 V_1 \cdot V_0 + \mathcal{L}_2 V_0 \cdot V_0] d\nu = 0,$$

причем

$$\alpha_1(s) = \alpha_1(0) + \int\limits_0^s \frac{i\zeta_q^2}{60}\left(\frac{2}{\rho}\right)^{1/3}\left[\frac{8\rho''}{3} - \frac{16\rho'^{\,2}}{9\rho} - \frac{1}{\rho}\right]ds,$$

где начальное значение функции $\alpha_1(0)$ найдено из условий согласования решений в области полутени (область Фока) с областью тени при $\nu = O(1)$ и равно

$$\alpha_1(0) = \left(\frac{2}{\rho_0}\right)^{1/3}\frac{i\rho_0'\zeta_q^2}{4}.$$

Третье приближение асимптотического разложения к решению $V_{2,\,q}(s,\nu)$ имеет следующий вид

$$V_{2,\,q}(s,\nu) = \Bigg\{A_2(s)w_1(\zeta_q - \nu) + \left[\sum_{j=1}^{4} P_2^{(j)}(s,\zeta_q)\nu^j\right]w_1(\zeta_q - \nu) + \left(\sum_{j=0}^{3} Q_2^{(j)}(s,\zeta_q)\nu^j\right)w_1'(\zeta_q - \nu)\Bigg\}. \quad (5.11)$$

Нас интересуют в этом приближении к решению те слагаемые, которые содержат отношение радиусов кривизн $\mathbf{\Lambda}(s)$. Полином $P_2^{(2)}$ равен

$$P^{(2)} = P_4^{(2)}\nu^4 + P_2^{(2)}\nu^2 + \nu\left[Q_2^{(2)} - \left(\frac{2}{\rho}\right)^{2/3}A_0(s)\frac{1}{4}\mathbf{\Lambda}(s)\right]. \quad (5.12)$$

Полином $Q_2^{(j)}$ найден и не содержит отношения радиусов кривизн.

Получим уравнение переноса для $A_2(s) = A_0(s)\alpha_2(s)$, т.е.для $\alpha_2(s)$. Приведем уравнение для $\alpha_2(s)$, учитывая лишь слагаемые с отношением радиусов кривизн:

$$\alpha_2(s) = \alpha_2(0) + \int\limits_0^s \frac{\zeta_q}{6}\left(\frac{2}{\rho(s)}\right)^{2/3}\frac{\partial \ln f}{\partial s}\mathbf{\Lambda}\,ds + \cdots. \quad (5.13)$$

Отметим следующие обстоятельства. В трехмерном случае построение волн соскальзывания связано с полем геодезических на поверхности рассеивателя, вышедших из границы свет-тень на $\partial\Sigma$ в направлении лучей падающей волны. В рассматриваемом осесимметрическом случае поле геодезических совпадает, очевидно, с меридианами на $\partial\Sigma$.

Характеристикой геометрического расхождения этого поля геодезических является множитель $\sqrt{f(0)/f(z(s))}$, который оказывается общим множителем для всех членов асимптотического разложения.

§6. Заключение

На основе анализа зависимости части B оператора Гельмгольца от параметров $\mathbf{M}(s)$ и $\mathbf{\Lambda}(s)$ установлено, что волновое поле в рассматриваемой осесимметрической задаче дифракции может быть описано в традиционной схеме метода параболического уравнения Леонтовича–Фока при условии $\mathbf{\Lambda}_0 = \mathbf{M}_0^{2-\varepsilon}$ в области Фока и аналогичного условия $\mathbf{\Lambda}(s) = \mathbf{M}(s)^{2-\varepsilon}$ в области волн соскальзывания, $0 < \varepsilon < 2$. Ответ также получается в терминах функций Эйри и интегралов от них. При этом шкала функций, в которой строится асимптотическое разложение зависит от параметра ε, величина которого должна определятся по конкретным значениям исходных параметров задачи: волнового числа k и геометрических характеристик поверхности рассеивателя $\rho(s)$ и $f(z(s))$.

Случай $\varepsilon = 0$ требует дополнительного исследования, так как при этом условии не могут быть использованы разложения (3.6) и (5.8) для коэффициента Ламе h_φ^{-1}. В этом случае происходит существенная перестройка операторов в рекуррентных системах уравнений как и в области Фока, так и в области волн соскальзывания.

Так при условии

$$\varkappa_0 = \frac{\mathbf{\Lambda}_0}{2\mathbf{M}_0^2} = O(1),$$

т.е. $\varepsilon = 0$, и при $k \to \infty$, получаем следующее выражение для оператора L_0 в первом из уравнений (3.3), сравнить с (3.8),

$$L_0 W_0 = i\frac{\partial W_0}{\partial \sigma} + \frac{\partial^2 W_0}{\partial \nu^2} + H(\sigma,\nu)\frac{\partial W_0}{\partial \nu} + (\nu - i\sigma H(\sigma,\nu))W_0 = 0,$$

в котором

$$H(\sigma,\nu) = \frac{\varkappa_0}{1+\varkappa_0(\nu-\sigma^2)} = \frac{1}{(\nu-\sigma^2)+1/\varkappa_0}.$$

Обратим внимание на то, что переменный коэффициент $H(\sigma,\nu)$ в этом уравнении оказывается сингулярным на ветвях параболы $\nu = \sigma^2 - 1/\varkappa_0$, $\nu \geqslant 0$. Сингулярными оказываются коэффициенты во всех последующих операторах рекуррентной системы (3.3), сравнить с работой [1]. Однако, можно убедиться, что в области Фока главный член

падающего поля удовлетворяет этому уравнению и остается гладкой функцией от σ и ν.

В случае волн соскальзывания уравнение для главного члена асимптотического разложения V_0 принимает вид

$$\frac{\partial^2 V_0}{\partial \nu^2} + (\nu - \zeta)V_0 + \frac{\varkappa(s)}{(1+\nu\varkappa(s))}\frac{\partial V_0}{\partial \nu} = 0,$$

где через $\varkappa(s)$ обозначена следующая функция от s

$$\varkappa(s) = \frac{\mathbf{\Lambda}(s)}{2\mathbf{M}^2(s)}\frac{dz}{ds}.$$

Здесь коэффициент при $\frac{\partial V_0}{\partial \nu}$ не имеет сингулярности.

Хотелось бы обратить внимание на дополнительные трудности задачи дифракции в целом на вытянутых телах, которые возникают при использовании методов коротковолновой асимптотики.

Рассмотрим, например, эллипсоид вращения

$$\frac{x^2+y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

вытянутый вдоль оси z, т.е. при $b > a$. При фиксированном волновом числе k с ростом b нарушаются условия применимости лучевого метода для описания дифракции на концах конуса $z = \pm b$, поскольку радиус кривизны R поверхности эллипсоида в этих точках убывает. При $kR \sim 1$ применение коротковолновых методов невозможно. Если в дополнении к этому возрастает угол между падающей волной и осью z, то граница свет-тень также приближается к вершинам $z = \pm b$ и становится невозможным применение метода параболического уравнения в области Фока.

Поэтому актуальным, на наш взгляд, является разработка такого комбинированного метода, когда используются прямые численные методы совместно с коротковолновой асимптотикой.

Авторы искренне благодарны А. П. Качалову за полезную дискуссию.

Литература

1. И. В. Андронов, *Дифракция на сильно вытянутом теле вращения.* — Акуст. ж. РАН **57**, No. 2, (2011), 147–152.
2. И. В. Андронов, Д. Буш, *Дифракция на узком круговом конусе как на сильно вытянутом теле.* — Зап. научн. семинаров ПОМИ **393** (2011), 12–22.

3. В. А. Фок, *Проблемы диффракции и распространения электромагнитных волн.* Изд-во “Советское радио”, М., 1970.
4. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн.* “Наука”, М., 1972.
5. В. М. Бабич, Н. Я. Кирпичникова, *Метод пограничного слоя в задачах дифракции.* Изд-во Ленингр. ун-та, Л., 1974.
6. В. С. Буслаев, *Коротковолновая асимптотика в задаче дифракции на гладких выпуклых контурах.* — Труды МИАН **XXIII**, No. 2, (1964), 14–117.
7. В. М. Бабич, *О коротковолновой асимптотике функции Грина для внешности ограниченной выпуклой области.* — ДАН СССР **146**, No. 3, (1962), ??–??.
8. В. Б. Филиппов, *О строгом оправдании коротковолновой асимптотики для задачи дифракции в зоне тени.* — Зап. научн. семин. ЛОМИ **34** (1973), 142–205.
9. Н. Я. Кирпичникова, *О распространении сосредоточенных вблизи лучей поверхностных волн в неоднородном упругом теле произвольной формы.* — Труды Матем. ин-та им. В.А. Стеклова **CXV**, No. 1, (1971), 114–130.

Kirpichnikova N. Ya., Popov M. M. Leontovich–Fock parabolic equation method in the problems of short-wave diffraction by prolate bodies.

Application of the parabolic equation to the problems of short-wave diffraction by prolate convex bodies in rotational symmetric case is considered. The wave field is constructed in the Fock's region and in the shaded part of the body where creeping waves appear. In the problems under consideration the following two large parameters arise: $\mathbf{M} = (k\rho/2)^{1/3}$ and $\mathbf{\Lambda} = \rho/f$, where k is wave number, ρ is radius of curvature along geodesic (meridians) and f is radius of curvature in the transversal direction. The first one is so-called Fock parameter and the second one $\mathbf{\Lambda}$ characterizes prolateness of the body. Under condition $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{M}^{2-\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 2$, the parabolic equation method in classical form is valid and describes the wave field in terms of Airy and integrals of it. In the case when $\varepsilon = 0$ some coefficients in the corresponding recurrent equations become singular and question of solvability of the equations in terms of regular and smooth functions remains open.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nkirp@pdmi.ras.ru
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 27 ноября 2012 г.