Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 409, 2012 г.

Н. Я. Кирпичникова, М. М. Попов

ЛУЧЕВОЙ МЕТОД В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ НА "ТОНКОМ" КОНУСЕ С МАЛЫМ УГЛОМ ПРИ ВЕРШИНЕ

Введение

Настоящая статья инициирована работой [1], в которой к осесимметричной задаче дифракции плоской волны на прямом круговом конусе с малым углом при вершине применяется техника, развиваемая для дифракции на сильно вытянутом и выпуклом теле вращения, см. [2]. Однако, эти задачи мало похожи и поэтому полученные в [1] формулы вызывают вопросы. Отметим наиболее существенные различия. В случае строго выпуклого тела вращения возникает граница свет-тень, и лучи падающей волны касаются поверхности тела в точках этой границы. Некоторая окрестность границы свет-тень образует область Фока, которая играет существенную роль в построении дифрагированного поля. В случае с конусом такой области Фока не возникает. Далее, в области Фока возникают специфические масштабы локальных координат, и эти масштабы определяют шкалу функций $k^{-m/3}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, где k есть волновое число, по которым строится асимптотика волнового поля. Сохранение этих масштабов в случае конуса в работе [1] вызывает, по меньшей мере, вопросы к ее авторам.

И последнее, в осесимметричной задаче дифракции на конусе помимо падающей волны имеется еще две: отраженная и волна, порожденная наличием угловой точки границы – вершиной конуса. В рассматриваемой статье [1] асимптотика строится при условии, что $kz \gg 1$, где z является расстоянием до вершины конуса. В этом случае представляется невозможным описать волну от вершины конуса, а значит, остается только падающая и отраженная волны. Однако их естественно описывать лучевым методом в коротковолновом приближении.

Ключевые слова: дифракция на конусе, лучевой метод, отраженные волны, условия применимости лучевого метода.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант 11-01-00407А).

В данной заметке мы строим лучевым методом два члена асимптотики отраженной волны и на их основе устанавливаем условие применимости этой асимптотики для малых углов при вершине конуса. При этом мы получаем явные формулы , не содержащие специальных функций и не имеющие ничего общего с формулами из [1].

§1. Описание задачи

Рассмотрим прямой круговой конус, полученный вращением луча $x = az$, $a = \tan\theta$, $z \geqslant 0$ вокруг оси z. Уравнение его в декартовых координатах x, y, z имеет, очевидно, вид $\sqrt{x^2+y^2} = r = az$. Будем считать, что волновое поле $U(x,y,z)$ вне конуса описывается уравнением Гельмгольца $(\Delta+k^2)U = 0$, где k есть волновое число. Падающая на конус плоская волна U^{inc} имеет вид $U^{\text{inc}} = \exp\{ikz\}$, а на внешней поверхности конуса Γ должно выполняться краевое условие Дирихле $U|_\Gamma = 0$.

Следуя работе [1], мы будем рассматривать волновое поле далеко, в терминах числа длин волн, от вершины конуса, т.е. при условии $kz \gg 1$. В этом предположении получить волну, возбуждаемую вершиной конуса, находящейся в начале координат $x = y = z = 0$, не представляется возможным. Поэтому мы не останавливаемся на условиях, которые нужно накладывать на волновое поле в вершине конуса. Таким образом, речь может идти о построении лишь отраженной волны. Это удобно проводить в координатах φ, s, n, где φ – азимутальный угол в сечении конуса плоскостью $z = \text{const}$, $s = \sqrt{1+a^2}\,z$ есть длина образующей конуса (геодезической), отсчитываемой от его вершины, n – длина внешней нормали.

Связь этих координат с декартовыми находится следующим образом. Пусть $\mathbf{R}_M = x\mathbf{e}_x + y\mathbf{e}_y + z\mathbf{e}_z$ является радиус-вектором точки M в исходных декартовых координатах, а $\mathbf{R}_\Gamma$ – радиус-вектор точек на поверхности конуса Γ, параметризуемыми координатами s и φ:

$$\mathbf{R}_\Gamma = \frac{as}{\sqrt{1+a^2}}(\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y) + \frac{s}{\sqrt{1+a^2}}\mathbf{e}_z. \tag{1.1}$$

Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор внешней нормали к конусу, тогда

$$\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}}(\cos\varphi\,\mathbf{e}_x + \sin\varphi\,\mathbf{e}_y) - a\mathbf{e}_z.$$

Теперь связь между этими системами координат следует из равенства

$$\mathbf{R}_M = \mathbf{R}_\Gamma + n \cdot \mathbf{n}. \tag{1.2}$$

Вычисляя квадрат элемента длины $dS^2 = (d\mathbf{R}_M, d\mathbf{R}_M)$, получаем, что

$$dS^2 = ds^2 + dn^2 + \left(\frac{as+n}{\sqrt{1+a^2}}\right)^2 d\varphi^2, \tag{1.3}$$

а коэффициенты Ламе равны соответственно $h_s = 1$, $h_n = 1$, $h_\varphi = \dfrac{as+n}{\sqrt{1+a^2}}$.

Из равенства (1.2) получаем также, что

$$z = (\mathbf{R}_\Gamma, \mathbf{e}_z) + n(\mathbf{n}, \mathbf{e}_z) = \frac{s - an}{\sqrt{1+a^2}}, \tag{1.4}$$

и падающая плоская волна в координатах s, n, φ принимает следующий вид

$$U^{\text{inc}} = \exp(ikz) = \exp\left\{ik\frac{s-an}{\sqrt{1+a^2}}\right\} \equiv \exp(ik\tau_{\text{inc}}). \tag{1.5}$$

§2. Построение отраженной волны

С геометрической точки зрения схема построения отраженной волны выглядит весьма просто. Действительно, множество лучей падающей волны, образующих цилиндрическую поверхность с осью симметрии $x = y = 0$ и радиуса p, падает на конус и, отражаясь по закону Снеллиуса, образует конус отраженных лучей при любом $p > 0$, p можно назвать прицельным параметром. Как известно, лучевой метод не применим в некоторой окрестности угловых точек границы, и эта геометрическая схема сама по себе не дает условий применимости метода. В связи с этим мы строим два члена лучевого разложения для отраженной волны и условие применимости метода находим из закона сохранения асимптотического характера лучевого ряда, см. по этому поводу, например, [3].

Итак, отраженную от конуса волну U^{ref} ищем в виде

$$U^{\text{ref}} = e^{ik\tau_{\text{ref}}} \sum_{m=0} \frac{A_m}{(ik)^m}. \tag{2.1}$$

Нетрудно видеть, что $\tau_{\rm ref}$ определяется выражением

$$\tau_{\rm ref} = \frac{s + an}{\sqrt{1 + a^2}}, \tag{2.2}$$

где длина s вдоль отраженного луча отсчитывается от точки отражения $s_p = p/\sin\theta$ падающих на конус лучей. Действительно, на поверхности конуса , т.е. при $n = 0$, эйконалы $\tau_{\rm ref}$ и $\tau_{\rm inc}$ совпадают и выполняется закон Снеллиуса для отраженных лучей.

Подставляя выражение (2.1) в уравнение Гельмгольца, находим рекуррентную систему относительно функций A_m

$$MA_0 = 0; \quad MA_m + LA_{m-1} = 0, \quad m = 1, 2, \ldots . \tag{2.3}$$

Операторы M и L в (2.3) имеют следующий вид

$$MA = 2(\nabla\tau_{\rm ref}, \nabla A) + (\nabla \ln h_\varphi, \nabla\tau_{\rm ref})A,$$

$$LA = \Delta A + (\nabla \ln h_\varphi, \nabla A). \tag{2.4}$$

Символами ∇ и Δ обозначены соответственно градиент и оператор Лапласа в ортогональных координатах s и n.

Непосредственной подстановкой в первое из уравнений (2.3) проверяется, что его решением является $A_0 = \psi_0/\sqrt{h_\varphi}$ при $s \geqslant s_p$. Произвольная постоянная ψ_0 находится из граничного условия Дирихле при $n = 0$ и равна $\psi_0 = -\sqrt{s_p \sin\theta} = -\sqrt{\frac{as_p}{1+a^2}}$.

Окончательно, для главного члена лучевого ряда (2.1) получаем следующее выражение

$$e^{ik\tau_{\rm ref}} A_0 = -\sqrt{\frac{as_p}{as + n}} \exp\left(ik\frac{s + an}{\sqrt{1 + a^2}}\right). \tag{2.5}$$

Обратимся далее к построению второго члена A_1 лучевой асимптотики (2.1). В рассматриваемом случае падения плоской волны и краевого условия Дирихле нам нужно , очевидно, построить лишь частное решение неоднородного уравнения (2.3) для $m = 1$, которое обращается в нуль в точках отражения на поверхности конуса, т.е. на окружности $s = s_p$.

Для построения используем тот факт, что рекуррентную систему (2.3) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений вдоль отраженных лучей. Направление этих лучей определяется направлением $\nabla\tau_{\rm ref}$, а уравнение для них имеет вид

$$\frac{s - s_p}{\cos\theta} = \frac{n}{\sin\theta} = \tau - \tau_p. \tag{2.6}$$

Здесь $\tau - \tau_p$ есть длина вдоль отраженного луча, а τ_p есть значение эйконала в точке отражения. Будем искать A_1 в следующем виде

$$A_1 = A_0 F_1, \tag{2.7}$$

где F_1 искомая функция от τ, а $A_0 = \psi_0 (h_\varphi)^{-1/2}$ есть главное асимптотическое приближение в разложении (2.1). Тогда из второго уравнения (2.3) получаем, что

$$\frac{d}{d\tau} F_1 = -\frac{1}{2} A_0^{-1} L A_0,$$

и искомое решение описывается формулой

$$F_1(\tau) = -\frac{1}{2} \int\limits_{\tau_p}^{\tau} A_0^{-1} L A_0 \, d\tau, \tag{2.8}$$

в которой подынтегральная функция теперь рассматривается на отраженных лучах, т.е. как функция τ. Несложные вычисления приводят к равенству $A_0^{-1} L A_0 = 1/4 h_\varphi^{-2}$. Далее, используя уравнение отраженных лучей (2.6), получим, что на лучах $h_\varphi = s_p \sin\theta + (\tau - \tau_p) \sin 2\theta$ и $dh_\varphi = \sin 2\theta d\tau$. Это позволяет вычислить интеграл (2.8) в явном виде

$$F_1(\tau) = -\frac{1}{8 \cos\theta \, s_p \, \sin^2\theta} \frac{\tau - \tau_p}{\left[\frac{s_p}{\cos\theta} + 2(\tau - \tau_p)\right]}. \tag{2.9}$$

Полученная формула дает возможность установить условия применимости лучевого метода для конуса в зависимости от угла при вершине 2θ, волнового числа k и расстояния до вершины конуса s_p.

Это условие выводится из требования, чтобы лучевой ряд (2.1) сохранял асимптотический характер, т.е. чтобы несколько первых членов последовательности $|A_m| k^{-m}$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, были убывающими, см., например, [3]. Далее потребуем, чтобы $|A_m| k^{-1} \ll |A_0|$ при данных значениях волнового числа, угла 2θ в вершине конуса и расстояния s_p до неё. При этом из формул (2.7) и (2.9) вытекает следующее условие $8 \cos\theta \, \sin^2\theta \, k s_p \gg 1$, поскольку

$$\frac{\tau - \tau_p}{\left[\frac{s_p}{\cos\theta} + 2(\tau - \tau_p)\right]} < \frac{1}{2}$$

при любых $\tau - \tau_p > 0$. Для “тонкого” конуса с малым углом при вершине условие применимости разложения (2.1) можно представить в виде $2\,(2\theta)^2 \, k s_p \gg 1$.

Литература

1. И. В. Андронов, Д. Буш, *Дифракция на узком круговом конусе как на сильно вытянутом теле.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 12–22.
2. И. В. Андронов, *Дифракция на сильно вытянутом теле вращения.* — Акуст. ж. РАН **57**, No. 2 (2011), 147–152.
3. M. M. Popov, *Ray theory and Gaussian beam method for Geophyscists.* — EDUFBA, Salvador–Bahia (2002), 158.

Kirpichnikova N. Ya., Popov M. M. Ray method applied to the plane wave diffraction by "thin" cone with small angle at the apex.

This paper is initiated by the article [1], where mathematical technique of short wave diffraction by a convex prolate body is being applied to the plane wave diffraction by a thin cone with small angle at the apex. The wave field is studied there under condition $kz \gg 1$, where k is the wave number and z is the distance to the apex, therefore the wave generated by the apex can hardly be involved into consideration. For description of the two rest waves, the incident and reflected ones, it seems natural to make use of the ray method. In this paper, two terms of ray series are constructed and validity condition of ray method is deduced. Obtained formulae have explicit form and do not contain any special functions.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: nkirp@pdmi.ras.ru
E-mail: mpopov@pdmi.ras.ru

Поступило 27 ноября 2012 г.