

А. П. Качалов, С. А. Качалов

РАСЧЕТЫ РЕЛЕЕВСКИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ УПРУГИХ СРЕДАХ И ИМПЕДАНС

ВВЕДЕНИЕ

Данная статья посвящена релеевским волнам в слоистых анизотропных упругих средах. В этой статье мы, в основном, рассматриваем вычислительные аспекты этой проблемы. Она продолжает предыдущие статьи [1, 2]. Теоретическая часть описывает алгоритм расчета волн Релея в слоистых средах. Численные расчеты относятся к первой части этого алгоритма – вычислением релеевских волн в однородном полупространстве.

§1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим полупространство

$$\Omega = \mathbb{R}_+^3 = \{\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3) = (x^1, x^2, z); z \geq 0\},$$

заполненное анизотропной упругой средой плотностью $\rho = \rho(z)$ и упругими постоянными $c_{ijkl} = c_{ijkl}(z)$, которые становятся постоянными при больших z .

Поскольку мы планируем делать вычисления, мы разбиваем неоднородный слой на M однородных анизотропных упругих слоев, $\Omega^{(m)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z_m < z < z_{m+1}\}$, $z_m = mh$, $m = 0, 1, \dots, M-1$, лежащих на однородном анизотропном упругом полупространстве $\Omega^{(M)} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z > z_M\}$. Плотности и упругие постоянные в областях $\Omega^{(m)}$ обозначаются как $\rho^{(m)}$ и $c_{ijkl}^{(m)}$.

Рассмотрим гармонические упругие плоские волны, которые распространяются в направлении $\mathbf{t} = (1, 0, 0)$ со скоростью v , т.е.

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(x, z, t) &= \mathbf{U}(z) \exp\{-i\omega(t - x/v)\}, \\ \sigma_n &= \mathbf{S}(z) \exp\{-i\omega(t - x/v)\}. \end{aligned} \tag{1}$$

Ключевые слова: релеевская волна, импедансе, анизотропная упругая среда, слоистая среда, вычисления.

Работа над этой статьей была поддержана РФФИ грантом 11-01-00407А.

Случай произвольного вектора \mathbf{t} с помощью вращения системы координат можно свести к данному. Мы предполагаем, что на любой границе $z = z_m$, $m = 1, \dots, M$, выполняются естественные условия непрерывности векторов смещения и нормального напряжения. При $z \rightarrow \infty$ вектор смещения стремится к нулю и, наконец, на границе $z = z_0 = 0$ мы имеем, как обычно для релеевских волн, условие обращения в ноль нормальных напряжений,

$$\mathbf{S}(0) = 0. \quad (2)$$

Заметим, что соответствующее векторное поле на границе имеет вид:

$$\mathbf{u}(x, 0, t) = \mathbf{A} \exp\{-i\omega(t - x/v)\}. \quad (3)$$

Для удобства мы будем отмечать функции и константы в слое $\Omega^{(m)}$ с помощью индексов $^{(m)}$. Мы также будем иногда использовать нормализованную координату z' , $z' = z\omega/v$. Введем базисное пространство $L^2(\mathbb{R}_+, \rho)$ со скалярным произведением

$$(U, V) = \sum_{0 \leq m \leq M} (U^{(m)}, V^{(m)})_2, \quad (4)$$

где $(U^{(m)}, V^{(m)})_2$ – стандартное $L_2((z_m, z_{m+1}), \rho^{(m)})$ скалярное произведение на интервале (z_m, z_{m+1}) с весом $\rho^{(m)}$. Подставляя (1) в уравнения упругости, мы получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mathcal{M}\mathbf{U} = v^2\mathbf{U}, \quad (5)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{U}(z) &\in D(M) \\ &= \left\{ \mathbf{U}(z) \in W_2^2(\mathbb{R}_+), \mathbf{S}^{(m)}(z_{m+1}) = \mathbf{S}^{(m+1)}(z_{m+1}), \mathbf{S}^{(0)}(0) = 0 \right\}. \end{aligned}$$

Оператор M в любой области $\Omega^{(m)}$ имеет вид:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ik}^{(m)} U_k^{(m)} &= \mathcal{M}_{ik}^{(m)} \left(z', \frac{\partial}{\partial z'} \right) U_k^{(m)}(z') \\ &= \left(\rho^{(m)} \right)^{-1} \left\{ c_{i1k1}^{(m)} U_k^{(m)} - i \left(c_{i1k3}^{(m)} + c_{i3k1}^{(m)} \right) \frac{\partial U_k^{(m)}}{\partial z'} - c_{i3k3}^{(m)} \frac{\partial^2 U_k^{(m)}}{\partial z'^2} \right\}. \quad (6) \end{aligned}$$

Уравнения (5), (6) в $D(\mathcal{M})$ образуют задачу на собственные числа для оператора \mathcal{M} . Как и в случае неоднородного слоя [1, Лемма 1] Оператор \mathcal{M} является неотрицательным самосопряженным оператором в $L^2(\mathbb{R}_+, \rho)$. Каждая ненулевая собственная функция, которая является решением (5) есть релеевская волна в слоистой среде.

§2. ОПЕРАТОРЫ ИМПЕДАНСА И ОПЕРАТОРЫ ПЕРЕНОСА

Рассмотрим полупространство $\Omega^{(M)}$. Мы можем рассмотреть следующую граничную задачу

$$\mathcal{M}^{(M)} \mathbf{V}^{(M)} = v^2 \mathbf{V}^{(M)}, \quad \mathbf{V}^{(M)}(z_M) = \mathbf{A}, \quad (7)$$

для $v < v_{\min}^{(M)*}$. Здесь $v_{\min}^{(M)*}$ есть инфимум из тех v , что имеются объемные волны с такой скоростью в направлении \mathbf{t} в $\mathcal{M}^{(M)}$. В таком случае поверхностная волна не может удовлетворить граничному условию (7) для каждого \mathbf{A} . Если v не принадлежит Дирихле спектру для оператора $\mathcal{M}^{(M)}$, тогда имеется единственное убывающее решение $\mathbf{V}^{(M)}(z)$ для любого вектора \mathbf{A} . Это решение порождает оператор импеданса $Z^{(M)} : \mathbb{C}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$,

$$Z^{(M)} \mathbf{A} = \mathbf{S}^{(M)}(z_M). \quad (8)$$

Точно также, рассматривая убывающее при $z \rightarrow \infty$ решение $U^{(m,M)}(z)$ граничной задачи (7) для оператора \mathcal{M} в области $\Omega^{(m,M)} = \bigcup_{\mu=m}^M \Omega^{(\mu)}$ с условиями непрерывности на векторы смещения и нормального напряжения на каждой внутренней границе мы можем определить оператор импеданса $Z^{(m)}$ посредством формулы

$$Z^{(m)} \mathbf{A} = \mathbf{S}^{(m)}(z_m). \quad (9)$$

Обозначим также оператор импеданса $Z^{(0)}$ как Z .

Лемма 1. *Операторы $Z^{(m)}(v)$, $m = 0, \dots, M$, являются самосопряженными операторами (эрмитовыми матрицами) для $v < v_{\min}^{(M)*}$, $v \notin \sigma_D$.*

Доказательство этой леммы аналогично доказательству соответствующей леммы в [1].

Теперь мы определим операторы переноса $T^{(m)}$, $m = 0, \dots, M-1$. Пусть $\mathbf{U}^{(m)}$ есть решение задачи Коши для оператора $\mathcal{M}^{(m)}$ в области $\Omega^{(m)}$ с начальными данными $\mathbf{U}^{(m)}(z_m) = \mathbf{A}^{(m)}$, $\mathbf{S}^{(m)}(z_m) = \mathbf{B}^{(m)}$.

Вектор смещения и вектор нормального напряжения (с точностью до экспоненциального множителя) будем обозначать как $\mathbf{A}^{(m+1)}$ и $\mathbf{B}^{(m+1)}$ на границе z_{m+1} . Тогда мы можем ввести множество операторов переноса $T^{(m)} : \mathbb{C}^6 \rightarrow \mathbb{C}^6$, $m = 0, \dots, M-1$,

$$T^{(m)} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(m)} \\ \mathbf{B}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{11}^{(m)} & T_{12}^{(m)} \\ T_{21}^{(m)} & T_{22}^{(m)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(m)} \\ \mathbf{B}^{(m)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^{(m+1)} \\ \mathbf{B}^{(m+1)} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Эти операторы переноса переносят смещение и нормальное напряжение с границы $z = z_m$ на границу $z = z_{m+1}$.

Пусть \mathbf{U} есть решение граничной задачи (5). Тогда мы можем также рассматривать оператор переноса T с границы z_0 на границу $z = z_M$, $T = T^{(M-1)} \dots T^{(0)}$. Посредством этой формулы мы можем выразить оператор импеданса $Z = Z^{(0)}$ для пачки слоев на полупространстве через оператор импеданса $Z^{(M)}$ однородного полупространства Ω^M (см. [1]). В самом деле простые вычисления показывают, что

$$Z^{(0)} = -(T_{22} - Z^{(M)}T_{12})^{-1}(T_{21} - Z^{(M)}T_{11}). \quad (11)$$

Таким образом, чтобы вычислить $Z^{(0)}$ нам нужны выражения только для операторов T и $Z^{(M)}$.

Лемма 2. *Скорость релеевской волны v_R совпадает с нулевыми собственными значениями $Z(v)$. Собственные вектора, соответствующие нулевому собственному значению дают вектор смещения релеевской волны при $z = 0$.*

Вследствие леммы 2 проблема построения релеевских волн в слоистой анизотропной среде сводится к построению операторов переноса в любом слое и оператора импеданса для однородного анизотропного полупространства.

§3. ПОСТРОЕНИЕ ОПЕРАТОРОВ ПЕРЕНОСА

Здесь мы следуем матричному методу Л. А. Молоткова (см., например, [3]). Пусть $\mathbf{W}^{(m),I}(z)$, $I = 1, \dots, 6$, есть базис элементарных волн в слое $\Omega^{(m)}$. Здесь $\mathbf{W}^{(m),I}(z)$ – 6-мерные вектор функции, состоящие из вектора смещения и вектора нормальных напряжений. Тогда решение начальной задачи для $\mathcal{M}^{(m)}$ с начальными данными $\mathbf{A}^{(m)}$, $\mathbf{B}^{(m)}$ может быть представлено как линейная комбинация элементарных решений

$\mathbf{W}^{(m),I}(z)$,

$$\begin{pmatrix} \mathbf{U}^{(m)}(z) \\ \mathbf{S}^{(m)}(z) \end{pmatrix} = \sum_I d_I^{(m)} \mathbf{W}^{m,I}(z).$$

Постоянные $d^{(m)}$ могут быть найдены из начальных условий при $z = z_m$.

В случае общего положения волны $\mathbf{W}^{(m),I}(z)$ являются экспонентами

$$\mathbf{W}^{(m),I} = \mathbf{A}^{m,I} \exp \left\{ i\omega\gamma^{m,I} z/v \right\}.$$

В этом случае мы можем ввести (6×6) комплексные матрицы $W^{(m)}$, $m = 0, \dots, M-1$. Каждый столбец этой матрицы состоит из вектора смещений и вектора нормальных напряжений данной элементарной волны при $z = z_m$. Тогда матрица переноса может быть представлена в виде:

$$T^{(m)} = \left(W^{(m)} \right) Q^{(m)} \left(W^{(m)} \right)^{-1}, \quad (12)$$

где матрицы $Q^{(m)}$ – диагональные (6×6) матрицы,

$$Q^{(m)} = \text{diag} \left[\exp \left\{ i\omega\gamma^{m,1} z/v \right\}, \dots, \exp \left\{ i\omega\gamma^{m,6} z/v \right\} \right]. \quad (13)$$

Здесь $\gamma^{m,I}$ – комплексные постоянные распространения элементарных волн, а $z = Z_{m+1} - z_m$.

Наконец, чтобы построить $Z^{(M)}$ мы можем использовать экспоненциально убывающие решения $\mathbf{W}^{(M)I}(z)$, $I = 1, 2, 3$. Обозначив $\mathbf{A}^{(M),I} = \mathbf{W}^{(M)I}(z_M)$, $\mathbf{S}^{(M)I}$, вектор нормального напряжения при $z = z_M$, мы получим (3×3) комплексные матрицы $A^{(M)}$ и $B^{(M)}$, соответственно. Тогда

$$Z^{(M)} = B^{(M)} \left(A^{(M)} \right)^{-1}. \quad (14)$$

§4. ВЫЧИСЛЕНИЯ

Как мы можем видеть вычисления релеевских волн могут быть разделены на две части. Первая часть состоит в построении оператора импеданса $Z^{(M)}$ для однородного полупространства. Вторая часть состоит в построении операторов переноса $T^{(m)}$ для каждого слоя $m = 0, \dots, M-1$. Здесь мы даем результаты вычислений только для

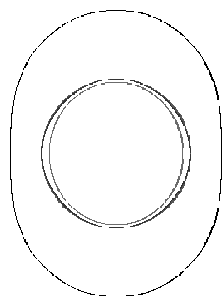


Рис. 1. Ставронит; $\theta = 0$,
Здесь $\min v_R(\phi) = 2.79$,
 $\max v_R(\phi) = 3.03$.

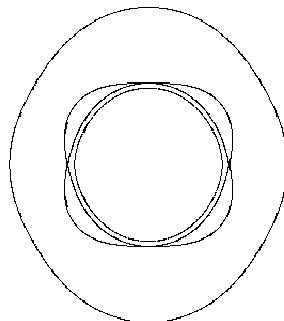


Рис. 2. Ставронит; $\theta = 45$,
Здесь $\min v_R(\phi) = 2.79$,
 $\max v_R(\phi) = 3.03$.

однородного полупространства. Мы считаем, что эти результаты также представляют интерес. Вычисления, относящиеся к слоистым анизотропным упругим средам будут даны в последующих публикациях.

Данная программа вычисляет скорость и поляризацию вектора смещения для релеевских волн в зависимости от направления распространения. Она может быть использована для произвольной упругой среды, частоты и ориентации граничной плоскости.

Ниже даны скорости и ориентации релеевских волн. Ориентация дается посредством углов вектора смещения релеевской волны на граничной плоскости с нормалью \mathbf{n} к этой граничной плоскости и с направлением распространения для различных однородных анизотропных упругих сред.

Результаты вычислений, данные ниже, показывают, что скорости и ориентации релеевских волн зависят от направления распространения. Мы видим также, что скорость релеевской волны может быть достаточно близка к скорости объемной волны а при некоторых направлениях распространения для некоторых сред даже совпадать с ней. Более того, иногда здесь может быть релеевская волна со скоростью большей, чем минимальная скорость объемных волн. В этом случае объемная волна, которая существует для данной скорости не включает релеевскую волну, чтобы удовлетворить свободным от напряжения граничным условиям.

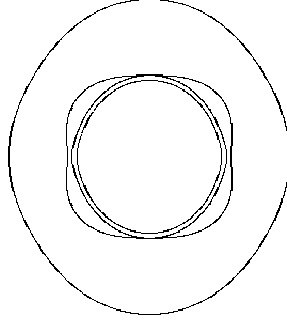


Рис. 3. Арагонит; $\theta = 45$,
Здесь $\min v_R(\phi) = 1.81$,
 $\max v_R(\phi) = 1.94$.

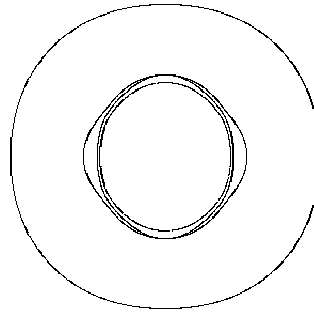


Рис. 4. Барит; $\theta = 45$,
Здесь $\min v_R(\phi) = 1.28$,
 $\max v_R(\phi) = 1.44$.

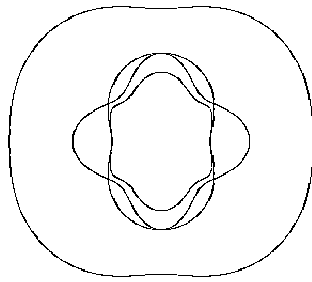


Рис. 5. Медь; $\theta = 45$,
Здесь $\min v_R(\phi) = 0.051$,
 $\max v_R(\phi) = 0.072$.

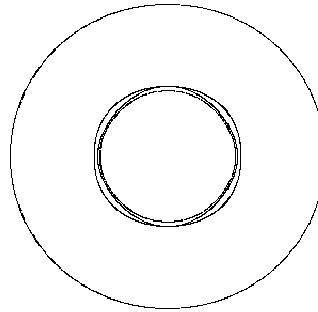


Рис. 6. Tatrnat Na; $\theta = 0$,
Здесь $\min v_R(\phi) = 0.924$,
 $\max v_R(\phi) = 0.962$.

Мы построили скорости упругих релеевских волн для нескольких анизотропных упругих сред. Упругие параметры этих сред, с точностью до симметрий, следующие:

1. Ставронит: $c_{1111} = c_{2222} = 34.3$, $c_{3333} = 18.5$, $c_{1122} = c_{2233} = c_{1133} = 6.7$, $c_{1212} = c_{2323} = c_{1313} = 9.2$, $\rho = 1$.

2. Арагонит: $c_{1111} = c_{2222} = 16$, $c_{3333} = 8.67$, $c_{1122} = c_{2233} = c_{1133} = 3.73$, $c_{1212} = c_{2323} = c_{1313} = 4.27$, $\rho = 1$.

3. Барит: $c_{1111} = c_{2222} = 8.83$, $c_{3333} = 7.81$, $c_{1122} = c_{2233} = c_{1133} = 4.77$, $c_{1212} = c_{2323} = c_{1313} = 2.55$, $\rho = 1$.

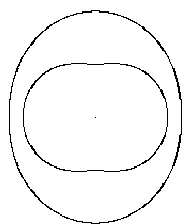


Рис. 7. Ставронит; $\theta = 0$,
Здесь $\max \phi = 88.9$,
 $\max \psi = 89.7$.

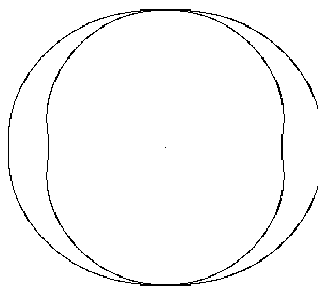


Рис. 8. Ставронит; $\theta = 45$,
Здесь $\max \phi = \max \psi = 51.9$.

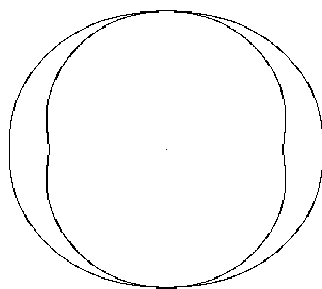


Рис. 9. Арагонит; $\theta = 45$,
Здесь $\max \phi = \max \psi = 51.74$.

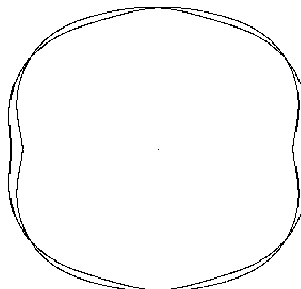


Рис. 10. Tatrát Na; $\theta = 45$,
Здесь $\max \phi = \max \psi = 50.2$.

4. Медь: $c_{1111} = c_{2222} = c_{3333} = 170$, $c_{1122} = c_{2233} = c_{1133} = 123$,
 $c_{1212} = c_{2323} = c_{1313} = 75.5$, $\rho = 8932$.

5. Tatrát Na: $c_{1111} = c_{2222} = 4.61$, $c_{3333} = 5.47$, $c_{1122} = c_{2233} = c_{1133} = 2.86$,
 $c_{1212} = c_{2323} = c_{1313} = 0.98$, $\rho = 1$.

Все другие параметры равны нулю. Вектор нормали к граничной плоскости и начальный вектор распространения (соответствующий направлению оси x) в этих вычислениях имеют вид $\mathbf{n} = (\cos \theta, 0, \sin \theta)$ и $\mathbf{t}_0 = (\sin \theta, 0, -\cos \theta)$.

На рис. 1–6 показаны скорости релеевских волн, так же как скорости объемных волн. Ниже описаны расчетные модели. В дополнение даны минимальные и максимальные значения релеевских скоростей.

На рис. 7–10 мы даем рисунки углов между вектором смещения релеевской волны на поверхности и нормалью к плоскости \mathbf{n} а также вектором распространения \mathbf{t} (ϕ и ψ , соответственно).

Благодарности. Я хочу поблагодарить профессора Chi-Sing Man за привлечение интереса к релеевским волнам в анизотропных упругих средах, предварительно напряженным средам и соответствующим обратным задачам. Я также хочу поблагодарить профессора Л. А. Молоткова за дискуссии, относящиеся к матричному методу.

ЛИТЕРАТУРА

1. А. П. Качалов, *Волны Релея в анизотропной упругой среде и импеданс*. — Зап. научн. семин. ПОМИ. **393** (2011), 125–143.
2. A. P. Kachalov, S. A. Kachalov, *Computation of Rayleigh waves in homogeneous anisotropic half space using impedance operator*. — In: Days of Diffraction (2012). International Conference St.Petersburg (2012), 58.
3. Л. А. Молотков, *Матричный метод в теории распространения волн в слоистых упругих и жидких средах*. Ленинград, 1984.

Kachalov A. P., Kachalov S. A. Computations of Rayleigh waves in anisotropic elastic media and impedance.

An algorithm of the computation of Rayleigh waves in layered anisotropic elastic media with arbitrary position of boundary plane and arbitrary direction of propagation is considered in the paper. By using translation operators the problem is reduced to the construction of an impedance operator for a homogeneous anisotropic half space and construction with its help the Rayleigh waves in the half space. Computations of velocities of Rayleigh waves and their polarization for different anisotropic media are given for the case of homogeneous half space at the end of the paper.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия

E-mail: kachalov@pdmi.ras.ru

Поступило 28 ноября 2012 г.