Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 409, 2012 г.

М. И. Белишев, М. Н. Демченко

ДИНАМИЧЕСКАЯ СИСТЕМА С ГРАНИЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ, СВЯЗАННАЯ С СИММЕТРИЧЕСКИМ ПОЛУОГРАНИЧЕННЫМ ОПЕРАТОРОМ

§1. Введение

1.1. О работе. Развиваются идеи и результаты работ [2] и [5]. Перспективой исследования является *функциональная модель* симметрического полуограниченного оператора. В статье вводятся два основных элемента этой модели: *динамическая система с граничным управлением* и *волновой спектр*.

Рассмотрения мотивированы обратными задачами. Главную роль играет задача восстановления риманова многообразия по граничным данным [1, 3, 4]. Ее решение можно интерпретировать как построение функциональной модели минимального лапласиана многообразия. Последний определяется граничными данными, а его волновой спектр оказывается изометричным многообразию. Таким образом, построение волнового спектра оказывается равносильным восстановлению многообразия [5].

Опишем основные объекты работы.

1.2. Оператор L_0. Пусть $\mathcal{H}$ – (сепарабельное) гильбертово пространство, L_0 – замкнутый оператор в $\mathcal{H}$, такой что:

$$\operatorname{clos}\operatorname{Dom} L_0 = \mathcal{H}, \quad L_0 \subset L_0^*, \quad (L_0 y, y) \geqslant \varkappa \|y\|^2 \quad (\varkappa = \text{const}).$$

Всюду в работе без потери общности полагаем $\varkappa > 0$.

Индексы дефекта L_0 предполагаются ненулевыми:

$$n_+ = n_- = \dim \operatorname{Ker} L_0^* \geqslant 1.$$

Ключевые слова: динамическая система с граничным управлением, система Грина, волновой спектр, восстановление многообразий.

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ 11-01-00407А и СПбГУ 11.38.63.2012.

Работа второго автора поддержана грантом РФФИ 12-01-31446 мол_а и грантом Правительства РФ дог. 11.G34.31.0026.

Из этого следует, что L_0 неограничен. Никаких других ограничений на L_0 не накладывается.

Как мы надеемся, результаты работы в будущем приведут к корректной функциональной модели симметрических операторов данного класса.

1.3. Система Грина. Пусть L – *расширение по Фридрихсу* оператора L_0, так что $L_0 \subset L \subset L_0^*$, $L^* = L$, и $(L_0 y, y) \geqslant \varkappa \|y\|^2$ (см., например, [8]). Обратный оператор L^{-1} ограничен и определен на всем $\mathcal{H}$.

Известное разложение Вишика [14] имеет вид

$$\operatorname{Dom} L_0^* = \operatorname{Dom} L_0 \dot{+} L^{-1}\operatorname{Ker} L_0^* \dot{+} \operatorname{Ker} L_0^*$$

(суммы прямые). Для $y \in \operatorname{Dom} L_0^*$ имеем

$$y = y_0 + L^{-1} g + h,$$

где $y_0 \in \operatorname{Dom} L_0$ и $g, h \in \operatorname{Ker} L_0^*$. Обозначим $\Gamma_1 y = -h$ и $\Gamma_2 y = g$. Справедлива *формула Грина*

$$(L_0^* u, v)_{\mathcal{H}} - (u, L_0^* v)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\operatorname{Ker} L_0^*} - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)_{\operatorname{Ker} L_0^*}\,,$$

которая является частным случаем более общего соотношения, установленного в [14]. Набор $\{\mathcal{H}, \operatorname{Ker} L_0^*; L_0, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ образует *систему Грина*, отвечающую оператору L_0.

1.4. Динамическая система с граничным управлением. В свою очередь, система Грина определяет *динамическую систему с граничным управлением* (ДСГУ)

$$\begin{aligned}
&u_{tt} + L_0^* u = 0, && u(t) \in \mathcal{H},\ \ t > 0\\
&u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, &&\\
&\Gamma_1 u = f, && f = f(t) \in \operatorname{Ker} L_0^*,\ \ t \geqslant 0,
\end{aligned}$$

где f – *граничное управление*, t – время. Под $u = u^f(t)$ мы подразумеваем (обобщенное) решение, которое корректно определено для управлений из класса $\mathcal{M}$ достаточно гладких функций (точное определение дается ниже).

Множество

$$\mathcal{U}^t := \{u^f(t) \mid f \in \mathcal{M}\}$$

называется *достижимым* (к моменту времени t), а множество

$$\mathcal{U} := \bigvee_{t \geqslant 0} \mathcal{U}^t$$

– *полным достижимым множеством.* ДСГУ называется *управляемой*, если

$$\operatorname{clos}\mathcal{U} \;=\; \mathcal{H}\,.$$

Мы показываем, что это равенство выполнено, если и только если L_0 является *вполне несамосопряженным оператором.* Последнее означает, что не существует ненулевого подпространства в $\mathcal{H}$, в котором L_0 индуцирует самосопряженную часть.

1.5. Волновой спектр. Это понятие вводится в несколько шагов.

Сначала мы определяем так называемую *инфляцию* I_{L_0}, которая представляет собой операцию на решетке $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ подпространств в $\mathcal{H}$. Эта операция расширяет подпространства и определяется оператором L_0 (точнее, его расширением по Фридрихсу L).

Затем определяется *минимальная подрешетка* $\mathfrak{L}_{L_0}$ решетки $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, содержащая все достижимые подпространства $\operatorname{clos}\mathcal{U}^t$, $t \geqslant 0$, и инвариантная относительно инфляции I_{L_0}.

Далее, мы вводим семейство $I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}$ монотонно возрастающих $\mathfrak{L}_{L_0}$-значных функций переменной $t \geqslant 0$, снабженное естественной топологией решетки. Это семейство образует частично упорядоченное множество, которое может содержать набор $\operatorname{At} I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}$ минимальных ненулевых элементов (*атомов*).

Наконец, $\operatorname{At} I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}$ наделяется топологией β с базой, состоящей из семейства "шаров". Полученное топологическое пространство (Ω_{L_0}, β) мы и называем *волновым спектром* оператора L_0.

1.6. Восстановление многообразий. Как отмечалось в п. 1.1, наше исследование мотивировано обратными задачами. В работе [5] предложена следующая схема восстановления риманова многообразия Ω по граничным данным:

- по данным обратной задачи определяется унитарная копия $\widetilde{L}_0$ *минимального лапласиана* $L_0 = -\Delta$ в Ω;
- находится волновой спектр $\Omega_{\widetilde{L}_0}$.

В случае "общего положения" пространство $(\Omega_{\widetilde{L}_0}, \beta)$ оказывается изометричным Ω. Таким образом, волновой спектр оказывается каноническим представителем класса многообразий с предписанными данными обратной задачи. Тем самым $\Omega_{\widetilde{L}_0}$ решает обратную задачу – доставляет искомое многообразие.

§2. Динамическая система с граничным управлением

2.1. Оператор L_0. Опишем рассматриваемый класс операторов.

Пусть $\mathcal{H}$ – (сепарабельное) гильбертово пространство, L_0 – оператор в $\mathcal{H}$. Мы предполагаем, что:

(1) L_0 замкнут и плотно определен: $\operatorname{clos}\operatorname{Dom} L_0 = \mathcal{H}$;
(2) L_0 положительно определен: для некоторого числа $\varkappa > 0$ выполнено $(L_0 y, y) \geqslant \varkappa \|y\|^2$ для любого $y \in \operatorname{Dom} L_0$;
(3) L_0 имеет ненулевые индексы дефекта $n_+ = n_- = \dim \operatorname{Ker} L_0^*$: $1 \leqslant \dim \operatorname{Ker} L_0^* \leqslant \infty$.

Отметим, что последнее влечет за собой неограниченность L_0.

Через L обозначим расширение по Фридрихсу оператора L_0, так что $L_0 \subset L \subset L_0^*$, $L^* = L$, и $(Ly, y) \geqslant \varkappa \|y\|^2$ для $y \in \operatorname{Dom} L$ (см., например, [8]). Обратный оператор L^{-1} ограничен и определен на всем $\mathcal{H}$.

2.2. Система Грина. Начнем с определений, мотивированных пионерской работой А. Н. Кочубея [11] (см. также [12]).

Пусть $\mathcal{H}$ и $\mathcal{B}$ – гильбертовы пространства, $A : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ и $\Gamma_i : \mathcal{H} \to \mathcal{B}$ $(i = 1, 2)$ – операторы, для которых выполнены условия:

$$\operatorname{clos}\operatorname{Dom} A = \mathcal{H}, \quad \operatorname{Dom} \Gamma_i \supset \operatorname{Dom} A, \quad \operatorname{clos} \vee_{i=1,2} \operatorname{Ran} \Gamma_i = \mathcal{B}.$$

Набор $\mathfrak{G} = \{\mathcal{H}, \mathcal{B}; A, \Gamma_1, \Gamma_2\}$ называется *системой Грина*, если его элементы связаны *формулой Грина*

$$(Au, v)_{\mathcal{H}} - (u, Av)_{\mathcal{H}} = (\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathcal{B}} - (\Gamma_2 u, \Gamma_1 v)_{\mathcal{B}} \tag{2.1}$$

для $u, v \in \operatorname{Dom} A$. Пространство $\mathcal{H}$ называется *внутренним*, $\mathcal{B}$ – *пространство граничных значений*, A – *основной оператор*, $\Gamma_{1,2}$ суть *граничные операторы*.

В выборе граничных операторов в системе Грина с заданными $\mathcal{H}$, $\mathcal{B}$, A есть произвол. Например, если $S = S^*$, $\operatorname{Dom} S \supset \operatorname{Ran} \Gamma_1$, то, положив $\widetilde{\Gamma}_2 := \Gamma_2 + S\Gamma_1$, мы получим набор $\widetilde{\mathfrak{G}} = \{\mathcal{H}, \mathcal{B}; A, \Gamma_1, \widetilde{\Gamma}_2\}$, который также является системой Грина.

2.3. Система $\mathfrak{G}_{L_0}$. Здесь мы связываем с оператором L_0 канонические (в смысле М. И. Вишика) граничные операторы.

Положим

$$\mathcal{K} := \operatorname{Ker} L_0^*$$

(отметим, что $\dim\mathcal{K}\geqslant 1$). Пусть P есть ортогональный проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{K}$, $\mathbb{O}$ и $\mathbb{I}$ – нулевой и тождественный операторы. Определим также операторы $\Gamma_i:\mathcal{H}\to\mathcal{K}$,

$$\Gamma_1 := L^{-1}L_0^*-\mathbb{I}\,,\quad \Gamma_2 := PL_0^*. \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Набор* $\mathfrak{Gr}_{L_0}:=\{\mathcal{H},\mathcal{K};\,L_0^*,\Gamma_1,\Gamma_2\}$ *образует систему Грина.*

Доказательство. 1. Поскольку $L_0^*\Gamma_1=L_0^*L^{-1}L_0^*-L_0^*=LL^{-1}L_0^*-L_0^*=\mathbb{O}$, имеет место включение $\operatorname{Ran}\Gamma_i\subset\mathcal{K}$. Включение $\operatorname{Ran}L_0^*\supset\operatorname{Ran}L$ в $\mathcal{H}$ означает, что $\operatorname{clos}\operatorname{Ran}\Gamma_2=\mathcal{K}$. Поэтому справедливо

$$\operatorname{clos}\,\vee_{i=1,2}\operatorname{Ran}\Gamma_i=\mathcal{K}.$$

2. Проверим формулу Грина:

$$\begin{aligned}&(L^{-1}L_0^*\,u-u,PL_0^*\,v)-(PL_0^*\,u,L^{-1}L_0^*\,v-v)\\ &=(L^{-1}L_0^*\,u-u,L_0^*\,v)-(L_0^*\,u,L^{-1}L_0^*\,v-v)\\ &=(L_0^*\,u,L^{-1}L_0^*\,v)-(u,L_0^*\,v)-(L_0^*\,u,L^{-1}L_0^*\,v)+(L_0^*\,u,v)\\ &=(L_0^*\,u,v)-(u,L_0^*\,v).\end{aligned}$$

□

Таким образом, оператор L_0 определяет систему Грина $\mathfrak{Gr}_{L_0}$.

Можно описать действие граничных операторов Γ_1, Γ_2 в терминах разложения Вишика:

$$\operatorname{Dom}L_0^*=\operatorname{Dom}L_0\dotplus L^{-1}\mathcal{K}\dotplus\mathcal{K} \tag{2.3}$$

(суммы прямые). По (2.3) для $y\in\operatorname{Dom}L_0^*$ имеем

$$y=y_0+L^{-1}g_y+h_y,\quad y_0\in\operatorname{Dom}L_0,\quad g_y,h_y\in\mathcal{K}, \tag{2.4}$$

соответственно, граничные операторы принимают вид

$$\Gamma_1 y=-h_y,\quad \Gamma_2 y=g_y. \tag{2.5}$$

В самом деле, имеем

$$\Gamma_1 y_0=L^{-1}L_0^*y_0-y_0=L^{-1}Ly_0-y_0=0,$$

$$\Gamma_1 L^{-1}g_y=L^{-1}L_0^*L^{-1}g_y-L^{-1}g_y=L^{-1}g_y-L^{-1}g_y=0,$$

поэтому

$$\Gamma_1 y=\Gamma_1 h_y=L^{-1}L_0^*h_y-h_y=-h_y.$$

Перейдем ко второму равенству. Имеем

$$\Gamma_2\,y_0=PL_0^*\,y_0=PL_0\,y_0=0,$$

поскольку образ оператора L_0 ортогонален ядру L_0^*. Далее

$$\Gamma_2 h_y = PL_0^* h_y = 0,$$

поэтому

$$\Gamma_2 y = PL_0^* L^{-1} g_y = P g_y = g_y.$$

2.4. Система α_{L_0}. В свою очередь, система Грина $\mathfrak{Gr}_{L_0}$ определяет динамическую систему вида

$$u_{tt} + L_0^* u = 0, \qquad u(t) \in \mathcal{H}, \;\; t > 0 \tag{2.6}$$

$$u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0, \tag{2.7}$$

$$\Gamma_1 u = h, \qquad h(t) \in \mathcal{K}, \;\; t \geqslant 0, \tag{2.8}$$

где $h = h(t)$ – $\mathcal{K}$-значная функция времени, $u = u^h(t)$ – решение.

В теории управления задача (2.6)–(2.8) интерпретируется как *динамическая система с граничным управлением*, h называется *граничным управлением*, $u^h(\cdot)$ – *траектория*, $u^h(t)$ – *состояние* в момент времени t. Как видно, система (2.6)–(2.8) определяется оператором L_0 и мы обозначаем ее α_{L_0}.

Напомним, что L есть расширение по Фридрихсу оператора L_0. $L^{\frac{1}{2}}$ – положительный квадратный корень из L, $(\cdot)' := \frac{d}{dt}$.

Для управления $h \in C^2_{\rm loc}([0,\infty);\mathcal{K})$, удовлетворяющего $h(0) = h'(0) = 0$, $\mathcal{H}$-значная функция

$$u^h(t) := -h(t) + \int_0^t L^{-\frac{1}{2}} \sin\Big[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\Big]\, h''(s)\, ds\,, \quad t \geqslant 0 \tag{2.9}$$

называется *слабым решением* задачи (2.6)–(2.8). Это определение мотивировано следующим фактом. Введем класс управлений

$$\mathcal{M} := \Big\{h \in C^3_{\rm loc}([0,\infty);\mathcal{K}) \mid h(0) = h'(0) = h''(0) = 0\Big\}.$$

Лемма 2. *Если $h \in \mathcal{M}$, то u^h является классическим решением задачи* (2.6)–(2.8).

Доказательство. 1. Получим представление для слабого решения при $h \in \mathcal{M}$.

Выберем $y \in \mathcal{H}$. Представим $L = \int\limits_0^\infty \lambda\, dE_\lambda$ через спектральную меру E_λ оператора L и проинтегрируем по частям:

$$\frac{d}{ds}\int\limits_0^\infty \frac{\cos\sqrt{\lambda}(t-s)}{\lambda}\, d\left(E_\lambda h''(s), y\right) = \frac{d}{ds}\,\left(h''(s), L^{-1}\,\cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] y\right)$$
$$= \left(h'''(s), L^{-1}\,\cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] y\right) + \left(h''(s), L^{-\frac{1}{2}}\,\sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] y\right)$$
$$= \left(L^{-1}\,\cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h'''(s), y\right) + \left(L^{-\frac{1}{2}}\,\sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h''(s), y\right).$$

Применив $\int\limits_0^t (\ldots)\, ds$, получим

$$\int\limits_0^\infty \frac{1}{\lambda}\, d\left(E_\lambda h'''(t), y\right) = \left(L^{-1}h'''(t), y\right)$$
$$= \left(\int\limits_0^t L^{-1}\,\cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h'''(s), y\right) + \left(\int\limits_0^t L^{-\frac{1}{2}}\,\sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h''(s), y\right).$$

В силу произвольности y имеем

$$\int\limits_0^t L^{-\frac{1}{2}}\,\sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h''(s)\, ds = L^{-1}\int\limits_0^t \left\{\mathbb{I} - \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\} h'''(s)\, ds.$$

Следовательно, для $h \in \mathcal{M}$ можем записать (2.9) в виде

$$u^h(t) = -h(t) + L^{-1}\int\limits_0^t \left\{\mathbb{I} - \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\} h'''(s)\, ds, \tag{2.10}$$

где $h \in \mathcal{K}$ и $L^{-1}\int\limits_0^t(\ldots) \in \operatorname{Dom} L \subset \operatorname{Dom} L_0^*$. Поэтому $u^h(t) \in \operatorname{Dom} L_0^*$ для любого $t \geqslant 0$.

2. Покажем, что (2.10) является классическим решением задачи (2.6)–(2.8).

Дифференцирование (2.10) дает

$$u_t^h(t) = -h'(t) + L^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t \sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h'''(s)\,ds, \tag{2.11}$$

$$u_{tt}^h(t) = -h''(t) + \int\limits_0^t \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h'''(s)\,ds. \tag{2.12}$$

Поэтому

$$u_{tt}^h(t) + L_0^* u^h(t) = -h''(t) + \int\limits_0^t \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] h'''(s)\,ds$$
$$+ \int\limits_0^t \left\{\mathbb{I} - \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\} h'''(s)\,ds = -h''(t) + \int\limits_0^t h'''(s)\,ds \;=\; 0,$$

а значит, справедливо (2.6).

Как видно из (2.10), (2.11), выполнено $u^h(0) = u_t^h(0) = 0$, то есть выполнены начальные условия (2.7).

Применив Γ_1 в (2.10), мы получим

$$\Gamma_1 u^h(t) = \left(L^{-1}L_0^* - \mathbb{I}\right)\left(-h(t) + L^{-1}\int\limits_0^t \left\{\mathbb{I} - \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\} h'''(s)\,ds\right)$$
$$= L^{-1}\int\limits_0^t \left\{\mathbb{I} - \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\} h'''(s)\,ds + h(t)$$
$$- L^{-1}\int\limits_0^t \left\{\mathbb{I} - \cos\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\} h'''(s)\,ds = h(t).$$

Поэтому "граничное условие" (2.8) также выполнено. $\square$

Отметим, что можно установить и единственность классического решения u^h.

2.5. Управляемость. Множество $\mathcal{U}^t := \{u^h(t)\}$ (u^h – слабое решение задачи (2.6)–(2.8)), состоящее из всех возможных состояний системы α_{L_0}, называется *достижимым* (в момент времени $t \geqslant 0$). Представив (2.9) в виде свертки

$$u^h(t) \;=\; \int\limits_0^t \left\{-(t-s)\mathbb{I} + L^{-\frac{1}{2}}\,\sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right]\right\}\,h''(s)\,ds\,, \qquad (2.13)$$

легко видеть, что $\mathcal{U}^t$ расширяется с ростом t.

Также определим *тотальное* достижимое множество

$$\mathcal{U} \;:=\; \bigvee_{t\geqslant 0}\mathcal{U}^t$$

и *дефектное подпространство*

$$\mathcal{D} \;:=\; \mathcal{H}\ominus\operatorname{clos}\mathcal{U}\,.$$

Система α_{L_0} называется *управляемой*, если выполнено соотношение

$$\operatorname{clos}\mathcal{U} \;=\; \mathcal{H} \qquad (2.14)$$

или, что эквивалентно, если $\mathcal{D} = \{0\}$.

Выведем условие на оператор L_0, необходимое и достаточное для управляемости системы α_{L_0}. Учитывая известные аналогичные результаты и общие принципы теории систем [9], это условие вполне ожидаемо: L_0 должен быть *вполне несамосопряженным* (в.н.с.) оператором.

Напомним определения. Мы говорим, что симметрический оператор A индуцирует самосопряженную часть в (ненулевом) подпространстве $\mathcal{N}\subset\mathcal{H}$, если

- линеал $\mathcal{N}\cap\operatorname{Dom}A$ является плотным в $\mathcal{N}$,
- имеет место включение $A\,[\mathcal{N}\cap\operatorname{Dom}A]\subset\mathcal{N}$,
- оператор $A|_{\mathcal{N}\cap\operatorname{Dom}A}$ является самосопряженным в $\mathcal{N}$.

Симметрический оператор A называется в.н.с., если не существует ненулевого подпространства в $\mathcal{H}$, в котором A индуцирует самосопряженную часть.

Теорема 1. *Система α_{L_0} управляема, если и только если L_0 является в.н.с. оператором.*

Доказательство. Необходимость. Предположим, что L_0 индуцирует самосопряженную часть в $\mathcal{N}\subset\mathcal{H}$. Фиксируем $h\in\mathcal{K}$. Выберем

$g \in \mathcal{N}$ и представим $g = L_0\widetilde{g}$, где $\widetilde{g} \in \mathcal{N} \cap \operatorname{Dom} L_0$. Последнее возможно, так как $L_0|_{\mathcal{N}}$ – положительно определенный ограниченно обратимый оператор в $\mathcal{N}$. Ввиду

$$(g,h) = (L_0\widetilde{g}, h) = (\widetilde{g}, L_0^* h) = 0$$

имеем $\mathcal{N} \perp \mathcal{K}$, а это означает, что

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{N}^\perp = \mathcal{H} \ominus \mathcal{N}. \tag{2.15}$$

Напомним, что L – это расширение по Фридрихсу: $L_0 \subset L \subset L_0^*$. Для $g \in \mathcal{N}$ имеем

$$L^{-1}g = L^{-1}L_0\widetilde{g} = \widetilde{g} \in \mathcal{N},$$

откуда следует вложение $L^{-1}\mathcal{N} \subset \mathcal{N}$. Поскольку L^{-1} является самосопряженным оператором, выполнено $L^{-1}\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{N}^\perp$. Следовательно, L^{-1} приводится подпространством $\mathcal{N}$. Отсюда вытекает, что

$$L^{-\frac{1}{2}}\mathcal{N} \subset \mathcal{N}, \quad L^{-\frac{1}{2}}\mathcal{N}^\perp \subset \mathcal{N}^\perp. \tag{2.16}$$

По (2.15) в правой части (2.9) имеем $h(t), h''(s) \in \mathcal{K} \subset \mathcal{N}^\perp$. По (2.16), интеграл в (2.9) принадлежит $\mathcal{N}^\perp$. В силу последнего, включение $u^h(t) \in \mathcal{N}^\perp$ выполнено для всех $t \geqslant 0$, т.е. траектории u^h системы α_{L_0} не покидают подпространства $\mathcal{N}^\perp$. Следовательно, $\mathcal{U} \subset \mathcal{N}^\perp$, что означает $\mathcal{D} \neq \{0\}$. Таким образом, система α_{L_0} неуправляема.

Итак, если α_{L_0} управляема, то L_0 является в.н.с. оператором.

Достаточность. Предположим, что α_{L_0} неуправляема, т.е. $\mathcal{D} \neq \{0\}$. Покажем, что L_0 имеет самосопряженную часть в $\mathcal{D}$ и, следовательно, не является в.н.с. оператором.

1. Возьмем ненулевой элемент $y \in \mathcal{D}$. Для любого (допустимого) $h \in C^2_{\rm loc}([0,\infty); \mathcal{K})$ и $t > 0$ имеем

$$\begin{aligned} 0 &= (y, u^h(t)) = \langle (2.9), (2.13) \rangle \\ &= \left(y, \int_0^t \left\{ -(t-s)h''(s) + L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] \right\} h''(s)\, ds \right) \\ &= \int_0^t \left(-(t-s)y + w^y(t-s), h''(s) \right) ds, \end{aligned} \tag{2.17}$$

где

$$w^y(\eta) := L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[\eta L^{\frac{1}{2}}\right] y, \quad \eta \geqslant 0.$$

Фиксируем $k \in \mathcal{K}$. Выберем последовательность управлений $h_j(s) = \varphi_j(s)k$, где $\varphi_j \in C_0^\infty(0,t)$ такие, что $\varphi_j''(s) \to \delta(s)$ (дельта-функция Дирака) при $j \to \infty$. Для таких $h_j(\cdot)$ переход к пределу в (2.17) дает

$$0 = (-ty + w^y(t), k).$$

В силу произвольности k заключаем, что

$$-ty + w^y(t) \in \mathcal{K}^\perp, \quad t \geqslant 0. \tag{2.18}$$

Обратив наши рассуждения, получим следующий результат.

Предложение 1. *Включение $y \in \mathcal{D}$ имеет место, если и только если выполнено* (2.18).

Обозначим $-ty + w^y(t) =: p(t) \in \mathcal{K}^\perp$ и представим

$$y = \frac{1}{t}\, L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[tL^{\frac{1}{2}}\right] - \frac{p(t)}{t}\,.$$

Оператор $L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[tL^{\frac{1}{2}}\right]$ ограничен. Из последнего, переходя к пределу при $t \to \infty$, получим $y = -\lim t^{-1}p(t) \in \mathcal{K}^\perp$. Возвращаясь к (2.18), мы получаем включение

$$y,\, w^y(t) \in \mathcal{K}^\perp, \quad t \geqslant 0. \tag{2.19}$$

2. Рассмотрим вспомогательную динамическую систему

$$w_{tt} + Lw = 0, \qquad\qquad w(t) \in \mathcal{H}, \quad t > 0 \tag{2.20}$$

$$w\big|_{t=0} = 0, \quad w_t\big|_{t=0} = y, \tag{2.21}$$

с тем же $y \in \mathcal{D}$. Соответствующее решение имеет известный вид

$$w^y(t) = L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[tL^{\frac{1}{2}}\right] y$$

(см., например, [8]).

Обозначим $J := \int\limits_0^t (\cdot)\, ds$. Применив J^2 в (2.20), с учетом (2.21), получим

$$w^y(t) - ty \;=\; -L\left(J^2 w^y\right)(t).$$

Ввиду (2.19) имеем:

$$L^{-1}\left(-ty + w^y(t)\right) \;=\; -\left(J^2 w^y\right)(t) \in \mathcal{K}^\perp. \tag{2.22}$$

В то же время,

$$L^{-1}w^y(t) = L^{-1}L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[tL^{\frac{1}{2}}\right] y = L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[tL^{\frac{1}{2}}\right]\left(L^{-1}y\right) = w^{L^{-1}y}(t)\,.$$

Следовательно, (2.22) ведет к

$$-tL^{-1}y + w^{L^{-1}y}(t) \in \mathcal{K}^{\perp}, \quad t \geqslant 0.$$

По предложению 1, последнее эквивалентно включению $L^{-1}y \in \mathcal{D}$.

Таким образом, приняв в начале $y \in \mathcal{D}$, мы приходим к включению $L^{-1}y \in \mathcal{D}$. Значит, дефектное подпространство приводит оператор L^{-1}:

$$L^{-1}\mathcal{D} \subset \mathcal{D}\,.$$

3. Сужение $L^{-1}|_{\mathcal{D}}$ является самосопряженным обратимым оператором в $\mathcal{D}$. Следовательно, $L^{-1}\mathcal{D}$ плотно в $\mathcal{D}$. Поэтому оператор L индуцирует часть $L|_{\mathcal{D}}$, которая является (плотно определенным) самосопряженным оператором в $\mathcal{D}$.

Покажем, что $L|_{\mathcal{D}} = L_0$. В самом деле, по (2.19) имеем

$$\mathcal{D} \subset \mathcal{K}^{\perp} = \mathcal{H} \ominus \mathcal{K} = \operatorname{clos}\operatorname{Ran} L_0 = \operatorname{Ran} L_0\,.$$

Тогда в силу $L_0 \subset L$ мы получаем

$$\operatorname{Dom} L|_{\mathcal{D}} = L^{-1}\mathcal{D} \subset L^{-1}\operatorname{Ran} L_0 = L_0^{-1}\operatorname{Ran} L_0 = \operatorname{Dom} L_0,$$

и $L|_{\mathcal{D}}x = L_0 x$ для любого $x \in L^{-1}\mathcal{D}$.

Итак, если система α_{L_0} неуправляема, то L_0 индуцирует самосопряженный оператор в $\mathcal{D}$. Значит, L_0 не является в.н.с. оператором. □

§3. Волновой спектр

3.1. Инфляция. Здесь термин “решетка” используется в общем смысле [7]: *решеткой* называется частично упорядоченное множество, на котором определены операции: $x \vee y = \sup\{x, y\}$, $x \wedge y = \inf\{x, y\}$. Мы будем иметь дело с конкретными решетками, снабженными дополнительными структурами (ортогональное дополнение, топология и т.п.).

Определение 1. *Пусть $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ – решетка (замкнутых) подпространств пространства $\mathcal{H}$ с частичным порядком $\subseteq$ и операциями $\mathcal{A} \wedge \mathcal{B} = \mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, $\mathcal{A} \vee \mathcal{B} = \operatorname{clos}\{a + b \mid a \in \mathcal{A},\, b \in \mathcal{B}\}$, $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{\perp}$. Она обладает наименьшим и наибольшим элементами $\{0\}$ и $\mathcal{H}$.*

Через $P_{\mathcal{A}}$ обозначим (ортогональный) проектор в $\mathcal{H}$ на $\mathcal{A}$. Топология на $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ определяется сильной сходимостью проекторов на соответствующие подпространства. Именно, по определению полагаем $\mathcal{A}_j \to \mathcal{A}$, если $s-\lim P_{\mathcal{A}_j} = P_{\mathcal{A}}$.

Инфляцией мы называем семейство отображений $I = \{I^t\}_{t\geqslant 0}$, $I^t : \mathfrak{L}(\mathcal{H}) \to \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ со свойствами

- $I^0 = \mathrm{id}$, $I^t\{0\} = \{0\}$,
- если $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ и $s \leqslant t$, то $I^s\mathcal{A} \subseteq I^t\mathcal{B}$.

Инфляция I_{L_0}. Как показано в [5], каждому оператору L_0 из рассматриваемого класса можно сопоставить инфляцию I_{L_0} следующим образом. Фиксируем подпространство $\mathcal{A} \in \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ и рассмотрим динамическую систему

$$\begin{aligned} &v_{tt} + Lv = a, && v(t), \quad a(t) \in \mathcal{H}, \quad t > 0 \\ &v\big|_{t=0} = v_t\big|_{t=0} = 0, && \end{aligned}$$

где $a = a(t)$ – $\mathcal{A}$-значная функция времени, $v = v^a(t)$ – решение. Согласно известной формуле Дюамеля

$$v^a(t) = \int\limits_0^t L^{-\frac{1}{2}} \sin\left[(t-s)L^{\frac{1}{2}}\right] a(s)\, ds, \quad t \geqslant 0.$$

Эта система имеет достижимые множества

$$\mathcal{V}^t_{\mathcal{A}} := \left\{ v^a(t) \mid a \in L_2^{\mathrm{loc}}\left([0,\infty); \mathcal{A}\right) \right\}.$$

Как легко видеть, $\mathcal{V}^t_{\mathcal{A}}$ расширяется с расширением $\mathcal{A}$ и/или с ростом t. Определим семейство $I_{L_0} := \{I^t_{L_0}\}_{t\geqslant 0}$:

$$I^t_{L_0}\mathcal{A} := \operatorname{clos} \mathcal{V}^t_{\mathcal{A}}, \quad t > 0, \quad I^0_{L_0} := \mathrm{id}.$$

Предложение 2. *Семейство I_{L_0} является инфляцией.*

Доказательство приведено в [5].

Семейство I_{L_0} определяется не оператором L_0, а его расширением по Фридрихсу L. Фактически же инфляция корректно определена для любого ограниченного снизу самосопряженного оператора.

3.2. Множество Ω_{L_0}. Решетка $\mathfrak{L}_{L_0}$. Напомним, что *подрешетка* это подмножество решетки $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$, инвариантное относительно операций на решетке. Каждая подрешетка с необходимостью содержит $\{0\}$ и $\mathcal{H}$.

Мы говорим, что (под)решетка $\mathfrak{L} \subset \mathfrak{L}(\mathcal{H})$ инвариантна относительно инфляции I, если для любого $t \geqslant 0$ выполнено $I^t\mathfrak{L} \subseteq \mathfrak{L}$.

Через $\mathfrak{L}_{L_0}$ обозначим *минимальную решетку* в $\mathfrak{L}$, которая:

- содержит все достижимые подпространства $\operatorname{clos}\mathcal{U}^t$, $t \geqslant 0$,
- инвариантна относительно инфляции I_{L_0},
- замкнута в определенной выше топологии на $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$.

Решетка $\overline{I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}}$. Пусть $\mathcal{F}$ – множество $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$-значных функций $t \geqslant 0$. Это множество также является решеткой с определенными поточечно частичным порядком, операциями и топологией:

$$\{f \leqslant g\} \Longleftrightarrow \{f(t) \subseteq g(t), \quad t \geqslant 0\}, \quad (f \vee g)(t) := f(t) \vee g(t),$$
$$(f \wedge g)(t) := f(t) \wedge g(t), \quad (f^{\perp})(t) := (f(t))^{\perp}, \quad (\lim f_j)(t) := \lim(f_j(t)).$$

Наименьший и наибольший элементы множества $\mathcal{F}$ суть функции, тождественно равные $\{0\}$ и $\mathcal{H}$. Обозначим их $0_{\mathcal{F}}$ и $1_{\mathcal{F}}$, соответственно.

Инфляцию I можно рассматривать как отображение из $\mathfrak{L}(\mathcal{H})$ в $\mathcal{F}$, действующее по правилу $(I\mathcal{A})(t) := I^t\mathcal{A}$, $t \geqslant 0$. Если $\mathfrak{L}$ инвариантно относительно I, то образ $I\mathfrak{L}$ и его замыкание $\overline{I\mathfrak{L}}$ являются подрешетками в $\mathcal{F}$. Оба они содержат $0_{\mathcal{F}}$.

Оператор L_0 определяет решетку $\overline{I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}}$.

Атомы. Пусть $\mathcal{P}$ – частично упорядоченное множество с наименьшим элементом 0. Элемент $a \in \mathcal{P}$ называется *атомом*, если $a \neq 0$ и из $b \leqslant a$ следует $b = a$ [7]. Через $\mathrm{At}\mathcal{P}$ мы обозначаем множество атомов $\mathcal{P}$.

Ключевым объектом данной работы является множество

$$\Omega_{L_0} := \mathrm{At}\,\overline{I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}},$$

которое мы называем *волновым спектром* оператора L_0.

Замечание. Некоторые дополнительные предположения об операторе L_0 обеспечивают непустоту Ω_{L_0} [5]. Существует оператор L_0, волновой спектр которого состоит из одной точки. Есть гипотеза, что всегда выполнено $\Omega_{L_0} \neq \varnothing$.

3.3. Пространство (Ω_{L_0}, β)**.** Опишем дополнительные структуры на волновом спектре.

Топология. Напомним, что атомы суть $\mathfrak{L}_{L_0}$-значные функции времени. Фиксируем атом $a \in \Omega_{L_0}$. Множество

$$B_r[a] := \{b \in \Omega_{L_0} \mid \exists t > 0 \ \ : \ \{0\} \neq b(t) \leqslant a(r)\}, \quad r > 0$$

назовем *шаром*, a и r – его центр и радиус.

Лемма 3. *Система шаров* $\{B_r[a] \mid a \in \Omega_{L_0},\ r > 0\}$ *является базой топологии.*

Доказательство. Достаточно проверить характеристические свойства базы:

(1) для любого $a \in \Omega_{L_0}$ найдется шар $B \ni a$,
(2) для атома $a \in \Omega_{L_0}$ и шаров B_1, B_2, таких что $a \in B_1 \cap B_2$, найдется шар B, такой что $a \in B \subset B_1 \cap B_2$

(см., например, [10]).

1. Возьмем $a = a(\cdot) \in \Omega_{L_0}$. Для любого $r > t_0 := \inf\{t > 0 \mid a(t) \neq \{0\}\}$ и $t \in (t_0, r]$ выполнено $\{0\} \neq a(t) \leqslant a(r)$, а тогда $a \in B_r[a]$.

2. Пусть $a \in B^{r_1}[a_1] \cap B^{r_2}[a_2]$, при этом оба шара $B^{r_i}[a_i]$ непустые. Выберем t_i такие, что $\{0\} \neq a(t_i) \leqslant a_i(r_i)$ и положим $r := \min\{t_1, t_2\}$. Тогда имеем $\{0\} \neq a(r) \leqslant a_i(r_i)$, что означает $B_r[a] \neq \varnothing$.

Для любых $b \in B_r[a]$ существует $t > 0$, такое что $\{0\} \neq b(t) \leqslant a(r) \leqslant a_i(r_i)$. Из последнего неравенства следует, что $b \in B_{r_i}[a_i]$. Отсюда $B_r[a] \subset B^{r_1}[a_1] \cap B^{r_2}[a_2]$. □

База $\{B_r[a] \mid a \in \Omega_{L_0},\ r > 0\}$ определяет (единственную) топологию, в которой открытыми множествами являются объединения шаров [10]. Мы обозначим эту топологию β. Итак, получено топологическое пространство (Ω_{L_0}, β).

Граница. Вернемся к ДСГУ α_{L_0}. Семейство достижимых подпространств

$$\mathfrak{u}_{L_0} := \left\{\operatorname{clos}\mathcal{U}^t\right\}_{t\geqslant 0}$$

может рассматриваться как $\mathfrak{L}_{L_0}$-значная функция времени. В этом смысле семейство $\mathfrak{u}_{L_0}$ является элементом решетки $\overline{I_{L_0}\mathfrak{L}_{L_0}} \subset \mathcal{F}$ и его можно сравнивать с ее атомами. В силу сказанного, множество

$$\partial\Omega_{L_0} := \{a \in \Omega_{L_0} \mid \ a \leqslant \mathfrak{u}_{L_0}\}$$

корректно определено; оно называется *границей* волнового спектра.

§4. Примеры

Наши рассмотрения иллюстрируются на примере операторов Лапласа и Максвелла на римановом многообразии.

4.1. Многообразие. Пусть Ω есть C^∞-гладкое компактное риманово многобразие размерности $n \geqslant 2$ с границей $\partial\Omega$, g – метрический тензор, $-\Delta$ – скалярный оператор Бельтрами–Лапласа. Напомним, что в локальных координатах он имеет вид

$$-\Delta = -\big[\det g\big]^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} \big[\det g\big]^{\frac{1}{2}} g^{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}\,.$$

Через ν мы обозначим внешнюю нормаль к $\partial\Omega$; ∂_ν – операция дифференцирования вдоль нормали.

На Ω определена риманова форма объема dv. Введем (вещественное) гильбертово пространство $\mathcal{H} := L_2(\Omega)$ со скалярным произведением

$$(u, v) = \int\limits_\Omega u\, v\, dv.$$

Тензор $g|_{\partial\Omega}$ индуцирует на границе $\partial\Omega$ метрику и (поверхностную) форму объема $d\sigma$. В пространстве $L_2(\partial\Omega)$ скалярное произведение имеет вид

$$(f, g)_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\partial\Omega} f g\, d\sigma.$$

4.2. Операторы. Роль основного оператора играет *минимальный лапласиан*

$$L_0 : \mathcal{H} \to \mathcal{H}, \quad \operatorname{Dom} L_0 = \{y \in H^2(\Omega) \mid y|_{\partial\Omega} = \partial_\nu y|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad L_0 = -\Delta\, y,$$

где $H^2(\Omega)$ есть пространство Соболева, ν – внешняя нормаль к границе. Оператор L_0 положительно определен и симметричен, его индексы дефекта суть $n_\pm = \infty$.

Оператор L_0^* есть *максимальный лапласиан*, определенный на

$$\operatorname{Dom} L_0^* = \{y \in \mathcal{H} \mid \Delta y \in \mathcal{H}\}$$

(здесь Δy понимается в смысле распределений на $\Omega \setminus \partial\Omega$) и действующий по правилу $L_0^* y = -\Delta y$. Его ядро состоит из гармонических функций:

$$\mathcal{K} \,=\, \operatorname{Ker} L_0^* = \{y \in \mathcal{H} \mid \Delta y = 0\}\,.$$

Мы будем использовать обозначение $L_0^* = -\Delta_{\max}$.

Расширение по Фридрихсу $L \supset L_0$ определено на $\operatorname{Dom} L = \{y \in H^2(\Omega) \mid y|_{\partial\Omega} = 0\}$ и действует по правилу $Ly = -\Delta y$.

Определим оператор *гармонического продолжения*

$$\Pi : C^\infty(\partial\Omega) \to C^\infty(\Omega)$$

соотношениями $\Delta \Pi f = 0$ в Ω и $(\Pi f)\,|_{\partial\Omega} = f$.

4.3. Система Грина. Каноническая система Грина для оператора Лапласа на многообразии имеет вид:

$$\mathfrak{Gr}_\Omega = \{L_2(\Omega), \operatorname{Ker} \Delta_{\max}; -\Delta_{\max}, \Gamma_1, \Gamma_2\}. \tag{4.1}$$

Свяжем граничные операторы Γ_1, Γ_2 с отображениями, сопоставляющими функциям из $\operatorname{Dom} L_0^*$ их следы на $\partial\Omega$.

Положим

$$\mathcal{B}_1 := H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \mathcal{B}_2 := H^{1/2}(\partial\Omega).$$

Следуя работе [14], введем операторы $\gamma_i : \operatorname{Dom} L_0^* \to \mathcal{B}_i$, действующие на гладкие функции u по правилу:

$$\gamma_1 u := -u|_{\partial\Omega}, \quad \gamma_2 u := \partial_\nu u - \Lambda(u|_{\partial\Omega}).$$

Здесь Λ – *отображение Dirichlet-to-Neumann*, действующее на гладкие функции на границе:

$$\Lambda f := \partial_\nu \, \Pi f|_{\partial\Omega}.$$

Как известно из теории эллиптических уравнений, оператор Λ непрерывен из $L_2(\partial\Omega)$ в $H^{-1/2}(\partial\Omega)$. Корректность определения оператора γ_2 будет установлена ниже.

Оператор γ_1 связан с Γ_1 следующим образом. Оператор Γ_1 сопоставляет функции $u \in \operatorname{Dom} L_0^*$ (единственную) гармоническую функцию, имеющую след на границе, равный $-u|_{\partial\Omega}$:

$$(\Gamma_1 u)|_{\partial\Omega} = \gamma_1 u = -u|_{\partial\Omega}.$$

Это равенство следует из (2.5) и из того, что в разложении (2.4) для

$$u = u_0 + L^{-1} g_u + h_u$$

первые два слагаемых имеют нулевой след на границе.

Связь операторов γ_2 и Γ_2 определяется равенством

$$(\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = (\gamma_1 u, \gamma_2 v)_{L_2(\partial\Omega)} \tag{4.2}$$

для гладких u, v. Для доказательства этого соотношения запишем левую часть с помощью (2.5) в виде

$$(\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = (h_u, g_v)_{\mathcal{H}}.$$

Интегрирование по частям с учетом $(L^{-1} g_v)|_{\partial\Omega} = 0$ и $\Delta h_u = 0$ дает

$$(h_u, g_v)_{\mathcal{H}} = (h_u, -\Delta(L^{-1} g_v))_{\mathcal{H}} = -\int_{\partial\Omega} h_u\, \partial_\nu (L^{-1} g_v)\, d\sigma,$$

откуда

$$(\Gamma_1 u, \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}} = (\gamma_1 u,\, \partial_\nu (L^{-1} g_v))_{L_2(\partial\Omega)}. \tag{4.3}$$

Обратимся к правой части (4.2). Сначала вычислим $\gamma_2 v$. Для первого и третьего слагаемого разложения (2.5) для v имеем

$$\gamma_2 v_0 = \gamma_2 h_v = 0$$

(эти равенства следуют непосредственно из определений), поэтому

$$\gamma_2 v = \partial_\nu (L^{-1} g_v)|_{\partial\Omega} - \Lambda\, L^{-1} g_v = \partial_\nu (L^{-1} g_v)|_{\partial\Omega}$$

(мы учли, что $(L^{-1} g_v)|_{\partial\Omega} = 0$). Вместе с (4.3) это дает (4.2).

Из равенства (4.2) следует оценка

$$\|\gamma_2 v\|_{H^{1/2}(\partial\Omega)} \leqslant C \|L_0^* v\|_{\mathcal{H}}. \tag{4.4}$$

В самом деле, пусть f – гладкая функция на $\partial\Omega$. Имеет место оценка

$$\|\Pi f\|_{\mathcal{H}} \leqslant \tilde{C} \|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}$$

($\tilde{C}$ не зависит от f). Тогда в силу $\Gamma_1 \Pi f = -\Pi f$, $\gamma_1 \Pi f = -f$ и соотношения (4.2) справедливо

$$\begin{aligned} &|(f, \gamma_2 v)_{L_2(\partial\Omega)}| = |(\gamma_1 \Pi f, \gamma_2 v)_{L_2(\partial\Omega)}| = |(\Gamma_1 \Pi f, \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}}| \\ &= |(\Pi f, \Gamma_2 v)_{\mathcal{H}}| \leqslant \tilde{C} \|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)} \cdot \|\Gamma_2 v\|_{\mathcal{H}} \leqslant \tilde{C} \|L_0^* v\|_{\mathcal{H}} \cdot \|f\|_{H^{-1/2}(\partial\Omega)}. \end{aligned}$$

Так как пространства $H^{1/2}(\partial\Omega)$ и $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ взаимно сопряжены относительно $(\cdot,\cdot)_{L_2(\partial\Omega)}$, из последней оценки, полученной для произвольного гладкого f, следует (4.4). Тем самым, оператор γ_2 можно продолжить по непрерывности на $\operatorname{Dom} L_0^*$, его образ при этом будет лежать в $\mathcal{B}_2 = H^{1/2}(\partial\Omega)$.

Как видно из (4.2), формулу Грина (2.1) на многообразии можно записать следующим образом:

$$(L_0^* u, v)_{\mathcal{H}} - (u, L_0^* v)_{\mathcal{H}} = (\gamma_1 u, \gamma_2 v) - (\gamma_2 u, \gamma_1 v). \tag{4.5}$$

Слагаемые в правой части понимаются как скалярные произведения в $L_2(\partial\Omega)$ в случае достаточно гладких функций, либо как действие функционалов из пространства $\mathcal{B}_1$ на элементы $\mathcal{B}_2$.

4.4. Система α_Ω. С учетом описанной выше реализации системы Грина, ДСГУ $\alpha_{L_0} =: \alpha_\Omega$ на многообразии принимает вид

$$\begin{aligned} &u_{tt} - \Delta u = 0, && (x,t) \in (\Omega\backslash\partial\Omega) \times (0,\infty),\\ &u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, &&\\ &u = f, && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty), \end{aligned}$$

где f – *граничное управление*, $u = u^f(x,t)$ – решение. Это решение описыват *волну* на многообразии, инициированную граничными источниками. Скорость распространения волны конечна и равна единице.

Система α_Ω управляема [5]. Более того, для компактного Ω выполнено (см. [3])

$$\operatorname{clos}\mathcal{U}^t \;=\; \mathcal{H}, \qquad t > \min_{x\in\Omega} \operatorname{dist}(x,\partial\Omega). \tag{4.6}$$

4.5. Волновой спектр. В [5] введен класс так называемых *простых многообразий*. Грубо говоря, простота означает, что группа симметрий многообразия Ω тривиальна. Это случай общего положения: любое гладкое компактное многообразие может быть сделано простым малым шевелением границы.

В [5] показано, что если Ω простое, то существует каноническая биекция

$$\Omega_{-\Delta_{\min}} \ni a_x \leftrightarrow x_a \in \Omega$$

между атомами и точками, которая переводит шары в шары и границу в границу:

$$B_r[a_x] \leftrightarrow \{x' \in \Omega \mid \operatorname{dist}(x', x_a) < r\}, \quad \partial\Omega_{-\Delta_{\min}} \leftrightarrow \partial\Omega\,.$$

Таким образом, простое многообразие идентично (изометрично) волновому спектру своего минимального лапласиана. Этот факт используется для восстановления многообразия по граничным данным.

Именно, данные граничной обратной задачи (оператор реакции [3], функция Вейля [12], характеристическая функция [13]) определяют оператор $L_0 = -\Delta_{\min}$ с точностью до унитарной эквивалентности.

Значит, в случае *простого* многообразия по этим данным можно получить унитарную копию $\widetilde{L}_0$, найти ее волновой спектр $\Omega_{\widetilde{L}_0}$ и тем самым восстановить многообразие с точностью до изометрии.

Отметим, что на большее, чем восстановление *с точностью до изометрии*, рассчитывать не приходится. В самом деле, пусть мы имеем граничные данные конкретного многообразия Ω. Предположим также, что другое многообразие Ω' *изометрично* Ω и имеет общую с ним границу: $\partial\Omega' = \partial\Omega$. Очевидно, что данные многообразий Ω' и Ω будут идентичными. Следовательно, эти данные не определяют Ω единственным образом. В такой ситуации единственно разумным пониманием "восстановления" может быть нахождение *представителя* класса многообразий с предписанными граничными данными. Волновой спектр $\Omega_{\widetilde{L}_0}$ и является таким представителем.

4.6. Система Максвелла. Здесь мы опишем систему Грина и ДСГУ, связанные с задачей электродинамики. Помимо требований на Ω, указанных в п. 4.1, предположим, что многообразие Ω ориентировано и $\dim\Omega = 3$. Рассматриваются векторные функциональные пространства (такие как $\vec{L}_2(\Omega)$, $\vec{C}^\infty(\Omega)$), состоящие из сечений касательного расслоения. На Ω определены дифференциальные операции ∇, rot, div и векторное произведение $\times$ (см. [15]).

Чтобы определить основное гильбертово пространство, воспользуемся разложением Ходжа для $\vec{L}_2(\Omega)$ [15]

$$\vec{L}_2(\Omega) = J \oplus \mathcal{H}_D \oplus \{\, \nabla\varphi \,|\, \varphi \in H^1(\Omega),\ \varphi|_{\partial\Omega} = 0 \,\}. \tag{4.7}$$

В нем $\mathcal{H}_D$ – (конечномерное) пространство гармонических полей Дирихле:

$$\mathcal{H}_D = \{h \in \vec{C}^\infty(\Omega) \,|\, \operatorname{rot} h = 0,\ \operatorname{div} h = 0,\ h_\theta|_{\partial\Omega} = 0\,\},$$

где $(\cdot)_\theta$ обозначает касательную составляющую следа векторного поля на границе. Подпространство J определено разложением (4.7) и состоит из соленоидальных полей. Отметим, что сумма $J\oplus\mathcal{H}_D$ исчерпывает все соленоидальные поля из $\vec{L}_2(\Omega)$.

Далее подпространство J играет роль основного гильбертова пространства. В нем введем оператор

$$\mathcal{L} := \operatorname{rot}\operatorname{rot}\,, \quad \operatorname{Dom}\mathcal{L} := \vec{C}^\infty(\Omega) \cap J.$$

Можно показать, что он плотно определен, а сопряженный оператор $L_0 := \mathcal{L}^*$ есть

$$L_0 = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\,,$$

$$\operatorname{Dom} L_0 = \{\, u \in \vec{H}^2(\Omega) \cap J \mid \; u_\theta|_{\partial\Omega} = (\operatorname{rot} u)_\theta|_{\partial\Omega} = 0 \,\}.$$

Кроме того, L_0 является положительно определенным симметрическим оператором. Его расширение по Фридрихсу L определено на линеале

$$\operatorname{Dom} L = \{\, u \in \vec{H}^2(\Omega) \cap J \mid u_\theta|_{\partial\Omega} = 0 \,\}.$$

С помощью формул (2.2) можно определить граничные операторы Γ_1, Γ_2. Аналогично тому, как это было сделано для оператора Лапласа, введем пространства

$$\mathcal{B}_1 := \vec{H}_\theta^{-1/2}(\partial\Omega), \quad \mathcal{B}_2 := \vec{H}_\theta^{1/2}(\partial\Omega),$$

состоящие из касательных полей на границе, а также операторы $\gamma_i :$ $\operatorname{Dom} L_0^* \to \mathcal{B}_i$, действующие на гладкие поля u по правилу:

$$\gamma_1 u := -u_\theta|_{\partial\Omega}, \quad \gamma_2 u := \nu \times (\operatorname{rot} u)_\theta|_{\partial\Omega} - \Lambda\, u.$$

Здесь оператор Λ определяется следующим образом. Пусть f – гладкое касательное поле на $\partial\Omega$; тогда существует единственное решение задачи

$$L_0^*\, u = 0, \quad u_\theta|_{\partial\Omega} = f.$$

Положим

$$\Lambda f = \nu \times (\operatorname{rot} u)_\theta|_{\partial\Omega}.$$

Можно показать, что для введенных граничных операторов γ_i верна формула Грина, аналогичная (4.5).

Соответствующая ДСГУ

$$\begin{aligned}
&u_{tt} + \operatorname{rot}\operatorname{rot} u = 0, && (x,t) \in (\Omega\backslash\partial\Omega) \times (0,\infty),\\
&u|_{t=0} = u_t|_{t=0} = 0, && \\
&u_\theta|_\Gamma = f, && (x,t) \in \partial\Omega \times (0,\infty).
\end{aligned}$$

описывает распространение электромагнитных волн в Ω. Она управляема [6] и справедливо равенство, аналогичное (4.6).

Литература

1. M. I. Belishev, *Boundary control in reconstruction of manifolds and metrics (the BC method).* — Inverse Problems **13(5)** (1997), R1–R45.
2. M. I. Belishev, *Dynamical systems with boundary control: models and characterization of inverse data.* — Inverse Problems **17** (2001), 659–682.
3. M. I. Belishev, *Recent progress in the boundary control method.* — Inverse Problems **23**, No. 5 (2007), R1–R67.
4. M. I. Belishev, *Geometrization of Rings as a Method for Solving Inverse Problems.* In: Sobolev Spaces in Mathematics III. Applications in Mathematical Physics (Ed. V. Isakov), Springer (2008), pp. 5–24.
5. M. I. Belishev, *A unitary invariant of semi-bounded operator in reconstruction of manifolds.* `http://www.arXiv:1208.3084v1 [math.FA] 15 Aug 2012.`
6. М. И. Белишев, А. К. Гласман, *Динамическая обратная задача для системы Максвелла: восстановление скорости в регулярной зоне (BC-метод).* — Алгебра и анализ **12(2)** (2000), 279–316.
7. G. Birkhoff, *Lattice Theory.* Providence, Rhode Island, 1967.
8. М. Ш. Бирман, М. З. Соломяк, *Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве.* — ЛГУ, 1980.
9. Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб, *Очерки по математической теории систем.* Мир, М., 1971.
10. J. L. Kelley, *General Topology.* D. Van Nostrand Company, Inc. Princeton, New Jersey, Toronto, London, New York, 1957.
11. А. Н. Кочубей, *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений.* — Матем. заметки **17** (1975), 41–48.
12. V. Ryzhov, *A general boundary value problem and its Weyl function.* — Opuscula Math. **27**, No. 2 (2007), 305–331.
13. А. В. Штраус. *Функциональные модели и обобщенные спектральные функции симметрических операторов.* — Алгебра и анализ **10**, No. 5 (1998), 1–76.
14. М. И. Вишик. *Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений.* — Труды Московского математического общества **1** (1952), 187–246.
15. G. Schwartz, *Hodge Decomposition – A Method for Solving Boundary Value Problems.* Springer, 1995.

Belishev M. I., Demchenko M. N. Dynamical system with boundary control associated with symmetric semi-bounded operator.

Let L_0 be a closed densely defined symmetric semi-bounded operator with nonzero defect indexes in a separable Hilbert space $\mathcal{H}$. It determines a *Green system* $\{\mathcal{H},\mathcal{B};L_0,\Gamma_1,\Gamma_2\}$, where $\mathcal{B}$ is a Hilbert space, and $\Gamma_i:\mathcal{H}\to\mathcal{B}$ are the operators related through the Green formula

$$(L_0^*u,v)_{\mathcal{H}}-(u,L_0^*v)_{\mathcal{H}}=(\Gamma_1u,\Gamma_2v)_{\mathcal{B}}-(\Gamma_2u,\Gamma_1v)_{\mathcal{B}}.$$

The *boundary space* $\mathcal{B}$ and *boundary operators* Γ_i are chosen canonically in the framework of the Vishik theory.

With the Green system one associates a *dynamical system with boundary control* (DSBC)

$$\begin{aligned} &u_{tt} + L_0^* u = 0 && \text{in} \quad \mathcal{H}, \ \ t > 0, \\ &u\big|_{t=0} = u_t\big|_{t=0} = 0 && \text{in} \quad \mathcal{H}, \\ &\Gamma_1 u = f && \text{in} \ \ \mathcal{B}, \quad t \geqslant 0. \end{aligned}$$

We show that this system is *controllable* if and only if the operator L_0 is completely non-self-adjoint.

A version of the notion of a *wave spectrum* of L_0 is introduced. It is a topological space determined by L_0 and constructed from reachable sets of the DSBC.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: belishev@pdmi.ras.ru
E-mail: demchenko@pdmi.ras.ru

Поступило 27 ноября 2012 г.