Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 409, 2012 г.

В. М. Бабич

ФОРМАЛЬНЫЕ СТЕПЕННЫЕ РЯДЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ДИФРАКЦИИ

§1. Введение

При нахождении асимптотического решения какой-либо задачи математической физики важнейшим шагом является правильный выбор аналитического вида этого асимптотического решения – или (что то же) анзаца. В теории дифракции рассматривается много различных видов асимптотических решений уравнений, описывающих волновые процессы. Многие из них являются модификациями некоторых фундаментальных анзацев. Одним из таких фундаментальных анзацев является пространственно-временное лучевое разложение. Допуская в качестве членов этого разложения формальные степенные ряды с коэффициентами, гладко зависящими от разных параметров, мы сможем описать асимптотические разложения, соответствующие квазифотонам [1, 2] и пространственно-временному варианту колебаний типа волновой плёнки [3, глава 5]. Этим идеям близок математический аппарат гамильтонова формализма узких пучков В. П. Маслова [4], где основа построений по-существу пространственно-временное лучевое разложение. Хотя в работе мы пользуемся математической техникой, отличной от техники В. П. Маслова, всё равно на наши построения можно смотреть как на аналог методов монографии [4].

В основе настоящей работы лежит понятие формального степенного ряда с коэффициентами, зависящими от тех или иных переменных [5]. Это, на наш взгляд, чрезвычайно интересный математический объект.

Эти ряды являются частным случаем рядов, имеющих асимптотический характер (по В. С. Буслаеву и М. М. Скриганову (см. [6])).

Ключевые слова: формальный степенной ряд, анзац, лучевой метод, поверхностная волна.

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований (РФФИ), (грант 11-01-00407А).

Для наших приложений особенно важно, что для формальных степенных рядов можно развить (разумеется, со многими ограничениями) дифференциальное и интегральное исчисление (см. [5]).

В качестве примера приложений формальных степенных рядов коротко рассмотрены скалярные поверхностные волны и, в частности, волны, сосредоточенные в окрестности некоторой движущейся линии.

§2. Алгебра формальных степенных рядов

Перейдем к определениям. В монографии [5] рассматриваются формальные степенные ряды, т.е. выражения вида

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} a_\alpha x^\alpha \Bigl(\alpha = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{Z}_+^k,$$
$$|\alpha| = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j,\ a_\alpha \in \mathbb{C},\ x^\alpha := x_1^{\alpha_1} \ldots x_k^{\alpha_k}\Bigr). \tag{2.1}$$

Сходимость рядов вида (1.1) не предполагается.

Приложения рядов (2.1) и их аналогов в асимптотическом анализе во многом связаны с тем, что эти ряды имеют асимптотический характер по В. С. Буслаеву и М. М. Скриганову (см. [6]): если ввести шкалу функций

$$1, r, r^2, r^3, \ldots r = \sqrt{\sum_{\ell=1}^{k} x_\ell^2}, \tag{2.2}$$

то каковы бы ни были $L > 0$ и $r_0 > 0$, все члены ряда (1.1) кроме конечного числа его членов удовлетворяют неравенству

$$|a_\alpha x^\alpha| \leqslant \mathrm{const}_{\alpha, r_0}\, r^L \quad (|x| \leqslant r_0 = \mathrm{const} < +\infty). \tag{2.3}$$

Нам потребуется некоторое обобщение рядов (2.1). Пусть Ψ область в $\mathbb{R}^m$. Мы рассмотрим ряды, коэффициенты a_α которых комплексно-значные функции из $C^\infty(\Psi)$. Таким образом мы будем рассматривать ряды

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{|\alpha|\leqslant n} a_\alpha(z) x^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_+^k, \quad |\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_k,$$
$$z = z_1, \ldots, z_m, \quad a_\alpha(z) \in C^\infty(\Psi), \quad \Psi \subset \mathbb{R}^m, \tag{2.4}$$

$z_1, \dots, z_m$ – координаты в $\mathbb{R}^m$. Таким образом в формальный степенной ряд (ФСР) (2.4) входят переменные двух видов: "конечные" переменные $z = z_1, \dots, z_m$ и "малые" переменные $x_1, \dots, x_k$. Формальные степенные ряды (2.4) обладают многими свойствами обычных гладких функций.

Если Ψ фиксировано, то соответствующие ФСР можно складывать и умножать. Они образуют коммутативное ассоциативное кольцо с единицей без делителей нуля. Кроме того множество ФСР можно рассматривать как ассоциативную коммутативную алгебру над полем комплексных чисел.

ФСР можно дифференцировать и интегрировать как по конечным, так и по малым переменным, при этом основные правила дифференцирования (в частности, правило дифференцирования произведения) сохраняются. Интегрирование применимо с некоторыми оговорками. Например, степенной ряд $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z)x^n$ можно проинтегрировать (формально, разумеется) от 0 до x, но не от x_0 до x ($x_0 \neq 0$).

Возможно (не всегда) подстановка одного ФСР в другой. Пусть рассматривается ФСР вида (2.4) и m ФСР

$$\begin{aligned}
&d^j = b_0^j(\zeta) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} b_\alpha^j(\zeta)x^\alpha (j = 1, 2, \dots, m, \alpha \in \mathbb{Z}_+^k,\\
&x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_k^{\alpha_k}, |\alpha| = \alpha_1 \dots + \alpha_k, \zeta \in \omega, b_k^j(\zeta) \in C^\infty(\omega)),\\
&\omega \subset \mathbb{R}^\gamma, \gamma \geqslant 1.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Предположим, что $\zeta \in \omega$ $(b_0^1(\zeta), \dots, b_0^m(\zeta) \in \Psi$. Тогда под $a_\alpha(d^1, \dots, d^m)$ понимается ФСР, получающийся, если $a_\alpha(d^1, \dots, d^m)$ формально разложить в ряд Тейлора. Подставляя эти разложения в ФСР (2.4) и переставляя его члены, можно придти к разложению вида

$$\mathcal{B}_0(\zeta) + \sum_{|\alpha|k}^{\infty} \sum_{|\alpha|=n} \mathcal{B}_\alpha(\zeta)x^\alpha. \tag{2.6}$$

ФСР (2.6) и есть результат подстановки рядов (2.5) в ряд (2.4). Возможно и такая замена переменных в рядах типа (2.4), что заменяются как конечные, так и малые переменные. Такого рода замена в частности связана с теоремой о неявной функции. Собственно речь пойдет о частном случае такой теоремы.

§3. Теорема об обращении ФСР

Пусть заданы ФСР

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{j\alpha}(z)x^{\alpha}, j=1,2,\dots,r \quad \text{и} \quad \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} A_{j\alpha}(z)x^{\alpha}, j=r{+}1,\dots,r_s, \quad (3.1)$$

$x = x_1,\ x_2,\dots,x_s,\ z=z_1,\dots,z_r,\ \alpha$ – мультииндекс, $z\in\Omega\subset\mathbb{R}^n$. Здесь и в дальнейшем $\sum\limits_{|\alpha|=p}^{\infty} \Leftrightarrow \sum\limits_{n=p}^{\infty}\ \sum\limits_{|\alpha|=n}$.

Вместо z_j и x_j в ФСР (3.1) можно подставить ФСР

$$z_j = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \mathcal{B}_{j\alpha}(a)b^{\alpha},\ j=1,\dots,r;$$

$$x_{j-r} = \sum_{|\alpha|=1}^{\infty} \mathcal{B}_{j\alpha}(a)b^{\alpha},\ j=r+1,\dots,r+s, \quad (3.2)$$

если $\mathcal{B}_{j\alpha}(a)\in C^{\infty}(\Omega_1)$, $\Omega_1\subset\mathbb{R}^r$, причем $\{\mathcal{B}_{jo}(a)\}\subset\Omega$, $j=1,2,=\dots,r$. Здесь a_j – конечные переменные, b_j – малые.

Обращение рядов (3.1) – это нахождение таких рядов (3.2), что после подстановки их в (3.1) получается

$$\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} A_{j\alpha}(z)x^{\alpha} = a_j,\ j=1,2,\dots,r,$$

$$\sum_{|\alpha|=1}^{\infty} A_{j\alpha}(z)x^{\alpha} = b_j,\ j=r+1,\dots,r+s. \quad (3.3)$$

Пусть теперь якобиан

$$J := \frac{\mathcal{D}(A_{10},A_{20},A_{r0},A_{r+1\alpha}x^{\alpha},A_{r+s\alpha}x^{\alpha})}{\mathcal{D}(z_1,\dots,z_r,x_1,\dots,x_s)}\Bigg|_{\substack{z_j=z_j^0\\ x=0}} \neq 0. \quad (3.4)$$

Здесь имеется в виду суммирование по всем мультииндексам α таким, что $|\alpha|=1$, $z_1^0,\dots,z_r^0$ точка, лежащая в Ω.

Теорема об обращении ФСР заключается в том, что нужные ряды (3.2) однозначно строятся при $z=(z_1,\dots,z_r)$ находящихся в малой окрестности вида $|z-z^0|<\varepsilon$ ($z^0\in\Omega$ – фиксированная точка).

Доказательство, к которому мы приступаем, заключается в последовательном шаг за шагом построении искомых рядов.

1. Прежде всего заметим, что определитель (3.4) является произведением $J_1\ J_2$ двух определителей, где

$$J_1 = \frac{\mathcal{D}(A_{10}, \ldots, A_{r0})}{\mathcal{D}(z_1, \ldots, z_r)} \tag{3.5}$$

и

$$J_2 = \frac{\mathcal{D}(A_{n+1\alpha}x^\alpha, \ldots, A_{r+s\alpha}x^\alpha)}{\mathcal{D}(x_1, \ldots, x_s)}\Bigg|_{\substack{x=0\\|\alpha|=1}} \tag{3.6}$$

и значит оба этих определителя отличны от нуля.

2. Положим в уравнениях (3.3) $x = 0$. Мы приходим к обычной проблеме анализа о нахождении $z = z_1, \ldots z_r$ из системы уравнений

$$A_{j0}(z) = a_j \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad z = z_1, \ldots, z_r. \tag{3.7}$$

Соответствующий определитель – это J_1. Он отличен от нуля.

Пусть точке z^0 соответствует точка a_0. Некоторая окрестность z^0 взаимно однозначно и C^∞ дифференцируемо преобразуется в окрестность a_0.

3. С точностью до главных членов вторая система – это система линейных уравнений

$$\sum_{|\alpha|=1} A_{j\alpha}(B_j(a))x^\alpha = b_j. \tag{3.8}$$

Система (3.8) – линейная система уравнений с ненулевым при a близком к a_0 определителем, откуда находится в первом приближении $x = x_1, \ldots, x_s$:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix} = Y(a) \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}, \tag{3.9}$$

где матрица $Y(a)$ гладко (C^∞) зависит от a.

4. Следующий шаг. Обращаемся к первому уравнению (точнее, системе уравнений). Прибавляем к z первую “поправку” с неопределенными коэффициентами. Ищем эту поправку, исходя из требования, чтобы первое уравнение выполнялось с точностью до членов первого порядка (включительно). Разлагаем A_{j0} в ряд Тейлора, отбрасывая члены 2-го порядка и выше. Члены нулевого порядка в силу равенств (3.7) сократятся. Мы опять приходим к системе 1-го порядка с ненулевым определителем.

5. Процесс продолжается неограниченно. На каждом шагу приходится решать уравнение вида

$$\Gamma(a)\begin{pmatrix}\psi_1\\ \vdots\\ \psi_\ell\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\chi_1\\ \vdots\\ \chi_\ell\end{pmatrix}, \tag{3.10}$$

здесь $\ell=r$ или $\ell=s$, $\det\Gamma\neq 0$, $\chi_1,\dots,\chi_\ell$ – однородные многочлены. $\psi_1,\dots,\psi_\ell$ искомые однородные многочлены той же степени, что и $\chi_1,\dots,\chi_\ell$.

Далее мы рассматриваем пример приложения ФСР к построению асимптотических разложений в теории дифракции.

§4. Математическое описание скалярных поверхностных волн

Мы предполагаем[1], что волновой процесс в среде, заполняющей область $\Omega\subset\mathbb{R}^3$ с границей Σ описывается волновым уравнением:

$$\Box u=\left(\Delta-\frac{1}{c^2(x^1,x^2,x^3)}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)u=0\quad c(x^1,x^2,x^3)\in C^\infty(\overline{\Omega}), \tag{4.1}$$

(все встречающиеся в работе функции, поверхности, кривые мы считаем гладкими (C^∞)), граничное условие имеет вид

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n}+ih\frac{\partial u}{\partial t}\right)\Big|_\Sigma=0;\quad h>0,\ h=h(x^1,x^2,x^3)\in C^\infty,\quad \Sigma=\partial\Omega, \tag{4.2}$$

n – нормаль, направленная внутрь области Ω.

Чтобы описать поверхностные волны, используется обычный анзац пространственно-временного лучевого метода:

$$u\sim e^{ip\theta(t,x)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{U_j(t,x)}{(ip)^j},\quad x=(x^1,x^2,x^3), \tag{4.3}$$

где p – большой параметр.

Надо потребовать, чтобы

$$\operatorname{Im}\theta\big|_\Sigma=0,\quad \frac{\partial\operatorname{Im}\theta}{\partial n}\big|_\Sigma>0. \tag{4.4}$$

[1]Такие волны рассматривались ранее многими авторами. См., например, [7, §1, глава 3]. К сожалению, некоторые формулы (§1 гл. 3) нуждаются в поправках.

Введем регулярную координатную систему q^1, q^2 на рассматриваемой части Σ. Третья координата (точки $M \in \Omega$) – расстояние точки M по нормали от Σ. Такая система координат (q^1, q^2, n) вблизи Σ – регулярна.

Будем считать, что θ и U_j ФСР:

$$\begin{aligned} &\theta = \theta_0 + \theta_1 n + \theta_2 n^2 + \ldots, \quad && U_j = U_{j0} + U_{j1} n + U_{j2} n^2 + \ldots \\ &\theta_j = \theta_j(t, q^1, q^2), && U_{j\ell} = U_{j\ell}(t, q^1, q^2). \end{aligned} \tag{4.5}$$

При подстановке анзаца (4.3) в уравнение (4.1) мы приходим к обычным рекуррентным соотношениям лучевого метода:

$$(\nabla\theta)^2 - \frac{1}{c^2}\theta_t^2 = 0, \tag{4.6}$$

$$\begin{gathered} 2\nabla\theta\nabla U_j - \frac{2}{c^2}\frac{\partial\theta}{\partial t}\frac{\partial U_j}{\partial t} + \Box\theta U_j = -\Box U_{j-1}, \\ j = -1, 0, \ldots, \quad U_{-1} = 0. \end{gathered} \tag{4.7}$$

Учитывая, что в равенствах (4.6), (4.7) θ и U_j ФСР и принимая во внимание краевое условие (4.2), мы придем к рекуррентным уравнениям для θ_j и U_{0j}. Вычисления естественно проводить в координатах $q^1, q^2, q^3 (= n)$. Приведем некоторые результаты этих подсчетов. Здесь мы во многом следуем §1 главы 3 книги [7].

Пусть G_{ij} – метрический тензор в координатах q^j $j = 1, 2, 3$, т.е. квадрат дифференциала длины:

$$(d\sigma)^2 = G_{lm}(q^1, q^2, q^3) dq^l dq^m \quad (l, m = 1, 2, 3). \tag{4.8}$$

Хорошо известны формулы

$$\begin{gathered} G_{lm} = g_{lm}(q^1, q^2) - 2n b_{lm} + O(n^2) \quad l, m = 1, 2, \\ g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0, \quad g_{33} = 1, \end{gathered} \tag{4.9}$$

где g_{lm} $(l, m = 1, 2)$ – коэффициенты первой квадратичной формы Гаусса поверхности Σ, b_{lm} $(l, m = 1, 2)$ – соответственно – второй.

При расчете удобно пользоваться формулами:

$$(\nabla A, \nabla B) = G^{lm}\frac{\partial A}{\partial q^l}\frac{\partial B}{\partial q^m} \quad l, m = 1, 2, 3, \quad (G^{lm}) = (G_{lm})^{-1}, \tag{4.10}$$

$$\Delta A = \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial}{\partial q^l}\left(\sqrt{G} G^{lm}\frac{\partial A}{\partial q^m}\right), \quad G = \det(G_{lm}) \tag{4.11}$$

(A и B – любые гладкие функции).

В результате для $\theta_0(t, q^1, q^2)$ удается получить уравнение

$$\frac{\partial\theta_0}{\partial t} + c_s\sqrt{g^{ij}\theta_{0i}\theta_{0j}} = 0, \quad \theta_{0i} = \frac{\partial\theta_0}{\partial q^i}, \ i = 1, 2, \quad \frac{1}{c_s} = \sqrt{\frac{1}{c_0^2} + h^2}. \quad (4.12)$$

Уравнение (4.12) для θ_0 имеет вид классического уравнения Гамильтона–Якоби с $H = c_s\sqrt{g^{ij}\theta_{0i}\theta_{0j}}$. Решить задачу Коши для уравнения (4.12) можно методом характеристик, используя каноническую систему уравнений

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial H}{\partial\theta_{0j}}, \quad \frac{d\theta_{0j}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \frac{d\theta_{0t}}{ds} = 0, \quad \frac{d\theta_0}{ds} = 0. \quad (4.13)$$

Для нахождения U_{00} вычисления приводят к уравнению переноса, имеющему довольно сложный вид:

$$2\left(g^{ij}\frac{\partial\theta_0}{\partial q^i}\frac{\partial U_{00}}{\partial q^j} - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\frac{\partial U_{00}}{\partial t}\right) + U_{00}\left(\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial q^i}\left(g^{ij}\sqrt{g}\frac{\partial\theta_0}{\partial q^j}\right) - \frac{1}{c_s^2}\frac{\partial^2\theta_0}{\partial t^2}\right)$$
$$+ \frac{U_{00}}{h}\left(\frac{1}{c_s^2}\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\frac{\partial h}{\partial t} - g^{ij}\frac{\partial\theta_0}{\partial q^i}\frac{\partial h}{\partial q^j}\right)$$
$$+ iU_{00}\left(\frac{2h}{R_{cp}}\frac{\partial\theta_0}{\partial t} - \frac{c_{10}}{c_0^3}\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\frac{1}{h} - \frac{1}{R}\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\frac{1}{hc_s^2}\right) = 0, \quad g = \det(g_{ij}), \quad (4.14)$$

где $c_0 = c|_{n=0}$, $c_{10} = \frac{\partial c}{\partial n}|_{n=0}$, $\frac{1}{R_{cp}}$ – средняя кривизна поверхности Σ, $\frac{1}{R}$ – кривизна нормального сечения поверхности Σ вдоль направления вектора $\frac{dq^1}{ds}$, $\frac{dq^2}{ds}$. Если искать решение U_{00} в виде $U_{00} = |U_{00}|e^{iV}$ ($\operatorname{Im} V = 0$), то уравнение для $|U_{00}|$ "как по волшебству" приобретает дивергентную форму:

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left(-\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\right)\frac{|U_{00}|^2\sqrt{g}}{c_s^2 h}\right) + \frac{\partial}{\partial q^j}\left(g^{ij}\frac{\partial\theta_0}{\partial q^i}\frac{\sqrt{g}}{h}|U_{00}|^2\right) = 0, \quad (4.15)$$

которая связана с сохранением энергии в процессе распространения волны, на чем мы останавливаться не будем.

Уравнение для V получается тоже не очень сложным:

$$2g^{ij}\frac{\partial\theta_0}{\partial q_i}\frac{\partial V}{\partial q^i} - \frac{2}{c_s^2}\frac{\partial U_0}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{2h}{R_{cp}}\frac{\partial\theta_0}{\partial t} - \frac{c_{10}}{c_0^3}\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\frac{1}{h} - \frac{1}{R}\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\frac{1}{hc_s^2} = 0. \quad (4.16)$$

Сначала рассмотрим уравнение (4.15). Его дивергентный вид позволяет найти решение явно, если известны пространственно-временные лучи, т.е. решение канонической системы уравнений (4.13) и начальное условие $\theta_0|_{t=0}$.

Решение основано на инвариантности дивергенции при замене переменных. Пусть задано начальное условие $\theta_0|_{t=0} = \theta^0(q^1, q^2)$. Будем решать систему (4.13) при начальных условиях

$$t|_{s=0} = 0, \quad q^i|_{s=0} = a^i, \quad \theta_{0i}|_{s=0} = \frac{\partial\theta^0(a^1, a^2)}{\partial a^i}, \quad \theta_0|_{s=0} = \theta^0(a^1, a^2). \tag{4.18}$$

В результате мы придем к системе кривых в пространстве t, q^1, q^2

$$t = s, \quad q^i = q^i(a^1, a^2, s), \tag{4.19}$$

в каждой точке которых определены

$$\theta_{0j} = \theta_{0j}(s, a^1, a^2) \quad \text{и} \quad \theta_0 = \theta_0(s, a^1, a^2). \tag{4.20}$$

Тем самым однозначно решается задача Коши для уравнения (4.12): s, a^1, a^2 можно рассматривать как систему координат в пространстве t, q^1, q^2 и в этой системе координат $\theta_0(t, q^1, q^2)$ определена. Это классический метод характеристик решения уравнения (4.12) с начальными данными $\theta|_{t=0} = \theta^0(q^1, q^2)$.

Уравнение (4.15) – это равенство нулю дивергенции вектора, имеющего в коодинатах t, q^1, q^2 контравариантные компоненты

$$A^0 = \left(-\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\right)\frac{|U_{00}|^2}{c_s^2 h}, \quad A^i = g^{ij}\frac{\partial\theta_0}{\partial g^{ij}}\frac{1}{h}|U_{00}|^2. \tag{4.21}$$

В координатах s, a^1, a^2 этот вектор будет иметь лишь одну ненулевую компоненту:

$$A^{0'} = \left(-\frac{\partial\theta_0}{\partial t}\right)\frac{|U_{00}|^2}{c_s^2 h}, \quad A^{i'} = 0 \tag{4.23}$$

и мы вместо (4.15) получаем эквивалентное равенство

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\partial\theta_0}{\partial t}|U_{00}|^2\frac{\sqrt{g}}{c_s^2 h}J\right) = 0, \quad J = \frac{D(q^1, q^2)}{D(a^1, a^2)}, \tag{4.24}$$

откуда следует (с учетом равенства $\frac{d\theta_{0t}}{ds} = 0$, см. (4.13))

$$|U_{00}| = \frac{\Psi_0(a^1, a^2)c_s\sqrt{h}}{g^{\frac{1}{4}} \cdot \sqrt{J}}, \tag{4.25}$$

где Ψ_0 зависит только от луча. Для аргумента V функции U_{00} получаем на основе формул (4.16) и (4.12)–(4.13):

$$V = V(s, a^1, a^2) = V_0(a^1, a^2) + \frac{1}{2}\int\limits_0^s \left[\frac{2hc_s^2}{R_{cp}} - \frac{c_{10}c_s^2}{c_0^3 h} - \frac{1}{Rh}\right] ds, \quad (4.26)$$

V_0 зависит только от луча.

Формулы (4.25), (4.26) определяют U_{00}.

Следующие члены разложений (4.5) находятся на основе по-существу такой же математической техники.

§5. Поверхностная волна, имеющая характер "волнового вала"

Пусть в разложении (4.3) $\operatorname{Im}\theta \geqslant 0$, причем знак равенства имеет место только на некоторой движущейся кривой $l \subset \Sigma$. Волновое поле, соответствующее такому анзацу, при больших p будет существенно отлично от нуля только вблизи этой кривой. Назовём такое волновое поле волновым валом. Построить такой эйконал, удовлетворяющий указанным выше условиям, методом характеристик не удаётся – это существенно вещественная теория. Однако в виде ФСР такое θ сравнительно несложно строится. Соответствующие построения впервые были осуществлены В. П. Масловым ([4]). Из более поздних публикаций укажем [8]. Вернемся к разложениям (4.3)–(4.5). Пусть l "координатная" кривая, на которой $q^2 = 0$. Пусть начальное условие для уравнения Гамильтона–Якоби (4.12) задано в виде ФСР:

$$\theta_0|_{t=0} = \theta_0^0(q^1) + \theta_0^1(q^1)q^2 - \theta_0^2(q^1)\frac{(q^2)^2}{2!} + \ldots, \quad (5.1)$$

причем $\operatorname{Im}\theta_0^0(q^1) = 0$, $\operatorname{Im}\theta_0^1(q^1) = 0$, $\operatorname{Im}\theta_0^2(q^1) > 0$.

Один из возможных подходов к решению такой задачи Коши – это аналог метода характеристик. Для нахождения θ_0 напишем каноническую систему уравнений

$$\frac{dt}{ds} = 1, \quad \frac{dq^j}{ds} = \frac{\partial H}{\partial \theta_{0j}}, \quad \frac{d\theta_{0j}}{ds} = -\frac{\partial H}{\partial q^j}, \quad \frac{d\theta_{0t}}{ds} = 0, \quad \frac{d\theta_0}{ds} = 0 \quad (5.2)$$

и будем ее решать при начальных условиях

$$t|_{s=0} = 0, \quad q^j|_{s=0} = a^j, \quad \theta_0|_{s=0} = \theta_0^0(a^1) + \theta_0^1(a^1)a^2 + \dots,$$
$$\theta_{0j}|_{s=0} = \frac{\partial}{\partial a^j}\,\theta_0|_{s=0}. \tag{5.3}$$

Под решением задачи Коши (5.2), (5.3) имеются в виду ФСР по степеням a^2. При $a^2 = 0$ равенства (5.2)–(5.3) определят решение

$$q^1 = q^1(a^1, s), \quad q^2 = q^2(a^1, s), \quad t = s, \tag{5.4}$$

образующее поверхность в пространстве t, q^1, q^2. Так как при $s = 0$ $q^1 = a^1$, то при малых s уравнение $q^1 = q^1(a^1, s)$ можно решить относительно a^1. Подставляя выражение для a^1 в равенство $q^2 = q^2(a^1, s)$, получим (учитывая равенство $t = s$), уравнение поверхности в виде

$$q^2 = \widehat{q}^2(a^1(q^1, t), t). \tag{5.5}$$

Коэффициенты при положительных степенях a^2 удовлетворяют линейным уравнениям и однозначно разрешимы.

Мы приходим к представлению эйконала в переменных a^1, a^2, s, которые аналогичны криволинейным координатам в пространстве q^1, q^2, s. Возможность перехода от a^1, a^2, s к q^1, q^2, s обеспечивает теорема об обращении ФСР (см. пункт 3 настоящей статьи). Роль "конечных" переменных играют t и q^1, "малой переменной" $q^2 - \widehat{q}^2(a^1(q^1, t), t)$ (см. формулу (5.5)), в переменных a^1, a^2, s – "конечные" переменные a^1, s, "малая" – a^2.

Дальнейшие построения – копия построений пункта 4. Возможен и другой подход к построению формального решения типа волнового вала (см., например, книгу [4] или работу [8]).

Литература

1. В. М. Бабич, *Квазифотоны и пространственно-временной лучевой метод.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **342** (2008), 5–13.
2. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Квазифотоны волн на поверхности тяжелой жидкости.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **379** (2010), 5–23.
3. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, *Асимптотические методы в задачах дифракции плоских волн.* Наука, М., 1972.
4. В. П. Маслов, *Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях.* Наука, М., 1977.
5. С. Бохнер, У. Т. Мартин, *Функции многих комплексных переменных.* ИЛ., М., 1951.

6. В. С. Буслаев, М. М. Скриганов, *Координатная асимптотика решения задачи рассеяния для уравнения Шрёдингера.* — Теор. и матем. физика **19**, No. 2 (1974), 217–232.
7. В. М. Бабич, В. С. Булдырев, И. А. Молотков, *Пространственно-временной лучевой метод.* Изд-во Ленинградского университета, Ленинград, 1985.
8. В. М. Бабич, А. И. Попов, *Асимптотическое решение уравнения Гамильтона–Якоби, сосредоточенное вблизи поверхности.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **393** (2011), 23–29.

Babich V. M. Formal power series and their applications to mathematical theory of diffraction.

The formal power series (FPS) coefficients of which are smooth functions are considered. FPS form an algebra over the field ($\mathbb{C}$) of complex numbers. It is possible to differentiate FPS. FPS are series having asymptotic character (in accordance with the definition by V. S. Buslaev and M. M. Scriganov). As an example of applications of FPS we consider the geometro-optical expansion for the scalar analog of Rayleigh waves.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023 С.-Петербург,
Россия
E-mail: babich@pdmi.ras.ru

Поступило 26 ноября 2012 г.