УДК 519.2

Об асимптотике распределения сингулярных чисел степени случайной матрицы. Алексеев Н. В., Гётце Ф., Тихомиров А. Н. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 9–42.

Мы рассматриваем степени случайных матриц с независимыми элементами. Пусть $X_{ij}, i, j \geqslant 1$, – независимые случайные величины (возможно комплексные) с $\mathbf{E}\, X_{ij} = 0$ и $\mathbf{E}\, |X_{ij}|^2 = 1$. Пусть $\mathbf{X}$ означает $n \times n$ матрицу с $[\mathbf{X}]_{ij} = X_{ij}$ для $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Обозначим через $s_1^{(m)} \geqslant \ldots \geqslant s_n^{(m)}$ сингулярные числа матрицы $\mathbf{W} := n^{-\frac{m}{2}} \mathbf{X}^m$ и определим эмпирическую функцию распределения квадратов сингулярных чисел формулой

$$\mathcal{F}_{\mathbf{X}}^{(m)}(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I\{(s_k^{(m)})^2 \leqslant x\},$$

где $I\{B\}$ означает индикатор события $B$. Мы доказываем, что при условии Линдеберга для распределений элементов матрицы математическое ожидание эмпирической функции распределения квадратов сингулярных чисел $F_{\mathbf{X}}^{(m)}(x) = \mathbf{E}\, \mathcal{F}_{\mathbf{X}}^{(m)}(x)$ сходится к к функции распределения $G^{(m)}(x)$, определенной своими моментами

$$\alpha_k(m) := \int_{\mathbb{R}} x^k \, d\, G^{(m)}(x) = \frac{1}{mk+1} \binom{km+k}{k}.$$

Приводится доказательство с помощью преобразования Стилтьеса. Библ. – 8 назв.

УДК 519.2

О критериях типа хи-квадрат и их применениях в анализе долговечности и надежности. Багдонавичюс В., Левюлене Р., Никулин М. С., Тран К. Х. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 43–61.

В статье рассматривается задача построения критериев типа хи-квадрат для проверки параметрическиих гипотез по цензурировнным справа данным в динамически меняющихся условиях экспериментов, в частности, по данным учитывающим процессы старения, усталости, износа и деградации. Такие задачи очень часто встречаются в анализе выживания и долговечности в медико-биологических исследованиях, а также в индустриальном секторе при проверке качества и надежности продукции, в особенности при ускоренных испытаниях. Библ. – 31 назв.

УДК 519.2

Оценки для максимума плотности суммы независимых случайных величин. Бобков С. Г., Чистяков Г. П. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 62–73.

Выводятся сублинейные оценки для максимума плотности суммы независимых случайных величин в терминах максимума плотности слагаемых. Библ. – 12 назв.

УДК 519.2

Распределение интегральных функционалов от мостов гауссовских диффузий. Бородин А. Н. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 74–83.

В работе рассматривается оригинальный вывод параболического уравнения для преобразования Лапласа распределения неотрицательного интегрального функционала от моста гауссовского процесса. Библ. – 6 назв.

УДК 519.2

К основам метода понижения размерности объясняющих переменных. Булинский А. В. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 84–101.

Изучение сложных явлений вовлекает данные высоких размерностей. Это типично для многих медицинских и биологических исследований, особенно в генетике и фармакологии. Мы изучаем бинарный отклик (показывающий, например, состояние здоровья пациента), зависящий от $n$ дискретных факторов (объясняющих переменных). Очень важной проблемой является нахождение среди них наиболее значимых. Цель работы – установить необходимые и достаточные условия сильной состоятельности определенных оценок, использующих кросс-валидацию, для ошибки, возникающей в алгоритме предсказания величины отклика. Также обсуждается влияние выбора штрафной функции. Полученные результаты дают обоснование для хорошо известного MDR-метода, который широко применяется при анализе генетических данных. Библ. – 15 назв.

УДК 519.2

Несингулярные преобразования симметричных устойчивых процессов Леви. Вершик А. М., Смородина Н. В. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 102–114.

В работе рассматриваются группы несингулярных преобразований пространства траекторий симметричных $\alpha$-устойчивых процессов Леви с показателем устойчивости $\alpha \in [0, 2)$. При $\alpha = 0$ правильный аналог устойчивого процесса (0-устойчивый процесс) есть гамма-процесс, мера которого квазиинвариантна относительно группы мультипликаторов, умножающих скачки траекторий на значения функции в точках скачков. При каждом $\alpha < 2$ некоторое сопряжение переводит эту группу в группу, несингулярных нелинейных преобразований скачков. Мы показываем здесь, что при $\alpha \to 2$, при надлежащей замене координат, эти группы преобразований превращаются в пределе в группу Камерона–Мартина, то есть в группу несингулярных сдвигов траекторий винеровского процесса. Библ. – 16 назв.

УДК 519.2

Критерии согласия со степенным законом, основанные на характеризации Пури–Рубина, и их асимптотическая эффективность. Волкова К. Ю., Никитин Я. Ю. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 115–130.

Строятся интегральный и супремальный критерии согласия для семейства степенных законов. Тестовые статистики являются функционалами от $U$-эмпирических процессов и основаны на классической характеризации семейства степенных законов, принадлежащей Пури и Рубину. Мы вычисляем логарифмическую асимптотику вероятностей больших уклонений тестовых статистик при основной гипотезе и находим их локальную бахадуровскую асимптотическую эффективность при распространенных параметрических альтернативах. Получены также условия локальной оптимальности новых статистик. Библ. – 22 назв.

УДК 519.2

Пуассоновский предел для автоморфизмов двумерных торов, задаваемых цепными дробями. Гордин М., Денкер М. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 131–153.

Обобщая последовательности степеней одного автоморфизма двумерного тора, мы рассматриваем некоторый класс последовательностей таких автоморфизмов. Технически задание этих последовательностей осуществляется с помощью разложений вещественных чисел в цепные дроби. Вместо пары слоений классической гиперболической теории каждая такая последовательность обладает *асимптотически устойчивой* и *асимптотически неустойчивой* последовательностями слоений. В описанной ситуации мы доказываем разновидность предельной теоремы о сходимости к распределению Пуассона, обобщая метод, использованный ранее А. Шаровой и авторами настоящей работы в доказательстве предельной теоремы Пуассона для последовательности степеней одного гиперболического автоморфизма тора. Обсуждаются возможные обобщения этого результата. Библ. – 18 назв.

УДК 519.2

О выпуклых оболочках случайных процессов с регулярным изменением. Давыдов Ю., Домбры К. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 154–174.

Мы рассматриваем асимптотическое поведение компактных выпуклых подмножеств $\widetilde{W}_n$ пространства $\mathbb{R}^d$, определяемых как замкнутые выпуклые оболочки образов $n$ независимых одинаково распределенных случайных процессов $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$. При условии регулярного изменения распределения процесса $X_i$ мы доказываем слабую сходимость нормированных выпуклых оболочек $\widetilde{W}_n$ при $n\to\infty$ и анализируем структуру и свойства предельной формы.

Мы иллюстрируем наши результаты на нескольких примерах регулярного изменения процессов и показываем, что в отличие от гауссовского случая во многих ситуациях эта предельная форма – случайный многогранник в $\mathbb{R}^d$. Библ. – 16 назв.

УДК 519.2

Об аппроксимации сверток сопровождающими законами в схеме серий. Зайцев А. Ю. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 175–186.

В статье рассматривается вопрос об аппроксимации сверток сопровождающими законами для схемы серий сумм независимых случайных векторов, удовлетворяющей условию бесконечной малости слагаемых.

Показано, что качество аппроксимации существенно зависит от выбора центрирующих констант. Библ. – 11 назв.

УДК 519.2+514

Случайные определители, смешанные объемы эллипсоидов и нули случайных гауссовских полей. Запорожец Д. Н., Каблучко З. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 187–196.

Рассмотрим матрицу $M$ размера $d \times d$, чьи строки являются центрированными невырожденными гауссовскими векторами $\xi_1, \dots, \xi_d$ с ковариационными матрицами $\Sigma_1, \dots, \Sigma_d$ соответственно. Оoбзначим $\mathcal{E}_i$ эллипсоид рассеивания $\xi_i$: $\mathcal{E}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \,:\, \mathbf{x}^\top \Sigma_i^{-1} \mathbf{x} \leqslant 1\}$. Мы покажем, что

$$\mathbf{E}\,|\det M| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_d),$$

где $V_d(\cdot, \dots, \cdot)$ обозначает *смешанный объем*. Мы также обобщим этот результат на случай прямоугольных матриц. В качестве прямого следствия мы получим аналитическое выражение для смешанного объема произвольных эллипсоидов в $\mathbb{R}^d$.

В качестве другого приложения мы рассмотрим гладкое центрированное невырожденное гауссовское случайное поле $X = (X_1, \dots, X_k)^\top : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Используя формулу Каца–Райса, мы получим геометрическую интерпретацию интенсивности нулей $X$ в терминах смешанного объема эллипсоидов рассеивания градиентов $X_i/\sqrt{\mathbf{Var} X_i}$. Данная связь множества нулей уравнений со смешанными объемами напоминает хорошо известную теорему Бернштейна о числе решений типичной системы алгебраических уравнений. Библ. – 10 назв.

УДК 519.2

О теореме Гурье–Олкина–Зингера. Ибрагимов И. А. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 197–213.

Доказывается одно усиление теоремы Гурье–Олкина–Зингера о характеризации нормального распределения свойством независимости линейных статистик независимых случайных векторов.

Библ. – 16 назв.

УДК 519.2

Селекция компонент разряженного сигнала в задаче регрессии. Ингстер Ю. И., Степанова Н. А. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 214–244.

Рассматривается задача точного воспроизведения функции многих переменных $f$ в непрерывной регрессионной модели. Предполагается, что $f$ удовлетворяет некоторым условиям гладкости и, кроме того, имеет аддитивную разреженную структуру. Степень разреженности характеризуется индексом разреженности $\beta \in (0, 1)$. В данных предположениях задачу воспроизведения функции $f$ можно рассматривать как задачу селекции составляющих ее компонент. В настоящей работе устанавливаются условия, при которых точное воспроизведение $f$ возможно, и строится семейство асимптотически минимаксных селекторов. Построенная процедура селекции адаптивна по отношению к индексу разреженности $\beta$. Библ. – 15 назв.

УДК 519.21

К теории оценок Питмена. Каган А. М., Тингхуи Ю, Баррон А., Мадиман М. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 245–267.

Получены новые неравенства для дисперсии оценок Питмена (эквивариантныых оценок с минимальной дисперсией) параметра $\theta$, основанных на выборках фиксированного объёма из совокупости $F(x-\theta)$. Неравенства тесно связаны с класическим неравенством Стама для фишеровской информации, его аналогом для малых выборок и оценкой сверху дисперсии специальных сумм. Единственным условием является конечность дисперсии распределения $F$; абсолютная непрерывность не предполагается. Как следствия основных неравенств для малых выборок, получены новые доказательства известных свойств фишеровской информации, равно как интересные новые результаты, в частности, монотонное убывание по объёму выборки нормированной дисперсии оценок Питмена. Результаты перенесены на случай полиномиальных аналогов оценок Питмена и многомерного параметра. Анализ условия равенства в одном из неравенств привёл к функциональному уравнению типа Коши для независимых случайных величин, решения которого ведут себя нестандартно. Библ. – 21 назв.

УДК 519.2

Циклическое поведение максимума в иерархической схеме суммирования. Лифшиц М. А. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 268–284.

Пусть на рёбрах $n$-уровневого бинарного дерева расположены н.о.р. симметричные бернуллиевские случайные величины. С каждым листом дерева свяжем сумму случайных величин вдоль пути, соединяющего лист с корнем дерева. Обозначим $M_n$ максимум всех таких сумм. Устанавливается, что с ростом $n$ распределения $M_n$ притягиваются к некоторой спирали распределений, каждый элемент которой является предельной точкой сдвинутых распределений $M_n$. Библ. – 13 назв.

УДК 519.2

Об усиленном законе больших чисел для последовательности зависимых случайных величин. Петров В. В. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 285–288.

Получены новые достаточные условия применимости усиленного закона больших чисел к последовательности случайных величин без предположений о независимости или неотрицательности. Библ. – 3 назв.

УДК 519.2

Вероятностный подход к решению уравнения колебания струны. Смородина Н. В., Фаддеев М. М. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 289–302.

В работе строится аналог вероятностного представления решения уравнения колебания струны. Библ. – 6 назв.

УДК 519.2

Преобразование Гельфанда мер и форм Дирихле. Хинц М., Келлехер Д., Тепляев А. — В кн.: Вероятность и статистика. 18. (Зап. научн. семин. ПОМИ, т. 408), СПб., 2012, с. 303–322.

Используя стандартные интегралы Даниэлля–Стоуна, компактификации Стоуна–Чеха и преобразования Гельфанда, мы показываем, что любая замкнутая форма Дирихле, определенная на измеримом пространстве, может быть преобразована в регулярную форму Дирихле на локально компактном пространстве. Это влечёт существование, на спектре Гельфанда или компактификации Стоуна–Чеха, соответствующего процесса Ханта. В качестве приложения мы показываем, что

для любой отделимой формы сопротивления, в смысле Кигами, существует соответствующий марковский процесс. Библ. – 29 назв.