Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев

ВЕРОЯТНОСТНЫЙ ПОДХОД К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЯ СТРУНЫ

§1. Введение

Пусть $[a,b]$ – интервал вещественной прямой, σ – вещественное число. Для каждого $x \in [a,b]$ определим процесс $\xi_x(t)$, полагая

$$\xi_x(t) = x + \sigma w(t),$$

где $w(t),\ t \geqslant 0,$ – стандартный винеровский процесс, $w(0) = 0$. Через τ обозначим момент первого достижения процессом $\xi_x(t)$ границы интервала $[a,b]$ и определим остановленный в этот момент процесс $\widetilde{\xi}_x(t)$, полагая

$$\widetilde{\xi}_x(t) = \xi_x(t \wedge \tau).$$

Известно (см. [1–3]), что для всякой непрерывной на $[a,b]$ функции φ функция

$$u(t,x) = \mathbf{E}\,\varphi(\widetilde{\xi}_x(t)) \tag{1}$$

является решением начально-краевой задачи для уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\quad u(0,x) = \varphi(x),\ u(t,a) = \varphi(a),\ u(t,b) = \varphi(b). \tag{2}$$

Таким образом, решение задачи (2) имеет вероятностное представление в виде математического ожидания функционала от остановленного (в момент первого достижения границы) процесса, что означает, что семейство одномерных распределений процесса $\widetilde{\xi}_x(t),\ t \geqslant 0$, есть фундаментальное решение (2). В качестве вероятностного пространства в (1) можно взять пространство непрерывных функций с винеровской мерой.

Ключевые слова: случайные процессы, эволюционные уравнения, предельные теоремы, волновое уравнение.

Работа первого автора выполнена при поддержке РФФИ, грант 12-01-00487а, и грантов НШ-1216.2012.1 и НШ-357.2012.1. Работа второго автора выполнена при поддержке РФФИ, гранты 12-01-00215а и 11-01-90402укр-ф-а. и гранта НШ-357.2012.1.

В настоящей работе строится аналог вероятностного представления (1), но не для решения уравнения теплопроводности, а для решения уравнения колебания струны с жестко закрепленными концами. Именно, строится аналог вероятностного представления (1) для решения начально-краевой задачи

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \;\; \frac{\partial u}{\partial t}(0,x) = v_0(x),$$
$$u(t,a) = \varphi(a), \;\; u(t,b) = \varphi(b). \tag{3}$$

Заметим, что данное уравнение является гиперболическим и, соответственно, его решение невозможно представить в виде математического ожидания функционала от траекторий винеровского процесса. Вместо винеровского процесса в настоящей работе используется обобщенный случайный процесс, введенный в работе [4]. Обобщенный процесс не является в обычном смысле вероятностным процессом, но является пределом некоторой последовательности случайных блужданий.

§2. Основные обозначения

Через δ будем обозначать обобщенную функцию, которая на основную функцию φ действует как $(\delta, \varphi) = \varphi(0)$. Через $\delta^{(n)}$ будем обозначать производные этой обобщенной функции, именно, $(\delta^{(n)}, \varphi) = (-1)^n (\varphi^{(n)}(0))$.

Далее, для $t \in \mathbb{R}$ через δ_t будем обозначать δ-меру в точке t. На этот объект нам будет удобнее смотреть именно как на меру, а не как на обобщенную функцию.

Через $\mathcal{R}[-\pi, \pi]$ будем обозначать пространство ограниченных (комплекснозначных) 2π-периодических функций f, таких, что

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx}, \qquad \sum_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| < \infty, \tag{4}$$

где B_m – коэффициенты ряда Фурье функции f. Норма $\|\cdot\|_{\mathcal{R}}$ в этом пространстве определяется как $\|f\|_{\mathcal{R}} = \sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |B_m|$. Справедливо неравенство $\|f\|_\infty \leqslant \|f\|_{\mathcal{R}}$. Если функция f исходно задана на интервале $[-\pi, \pi]$, то той же самой буквой f мы будем обозначать и ее 2π-периодическое продолжение.

Через $\mathcal{R}^{(l)}[-\pi,\pi]$ обозначим подпространство $\mathcal{R}[-\pi,\pi]$ функций, таких, что сходится ряд $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty}|m|^l|B_m| < \infty$. Каждая функция из $\mathcal{R}^{(l)}[-\pi,\pi]$ является непрерывной 2π-периодической функцией вместе с производными до порядка l включительно.

§3. Обобщенная функция как предел вероятностных мер

В этом параграфе мы изложим конструкцию, предложенную в [4]. Зафиксируем $T>0$ и через Ω_0 обозначим пространство всех дискретных зарядов на $[0,T]$ с конечным числом атомов. Каждый элемент ω этого пространства представляется в виде

$$\omega=\sum_{j=1}^{k}x_j\delta_{t_j}, \tag{5}$$

где $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ – число атомов заряда ω, δ_{t_j} – δ-мера, сосредоточенная в точке $t_j\in[0,T]$, а x_j есть величина заряда, сидящего в точке t_j. Для $\omega\in\Omega_0$ и $0\leqslant a\leqslant b\leqslant T$ через $\omega[a,b]$ будем обозначать заряд интервала $[a,b]$, то есть $\omega[a,b]=\sum\limits_{j}x_j$, где суммирование проводится по тем индексам j, для которых $t_j\in[a,b]$.

Далее, для каждого $\omega\in\Omega_0$ через $\langle\omega,\omega\rangle$ будем обозначать дискретную меру вида

$$\langle\omega,\omega\rangle=\sum_{j=1}^{k}x_j^2\delta_{t_j}\in\Omega_0, \tag{6}$$

а через $\langle\omega,\omega\rangle[a,b]$, соответственно, меру интервала $[a,b]$, то есть

$$\langle\omega,\omega\rangle[a,b]=\sum_{j}x_j^2,$$

где суммирование проводится по тем индексам j, для которых $t_j\in[a,b]$.

На Ω_0 мы рассмотрим топологию, в которой сходящимися будут слабо сходящиеся последовательности зарядов. Через $\mathcal{B}(\Omega_0)$ обозначим борелевскую σ-алгебру на Ω_0.

На пространстве Ω_0 определим два объекта – последовательность вероятностных мер $\{\mathbf{P}_n\}_{n=1}^{\infty}$ и обобщенную функцию $\mathbf{L}$. При этом обобщенная функция $\mathbf{L}$ окажется пределом последовательности $\mathbf{P}_n$, но не в смысле сходимости мер, а в смысле сходимости обобщенных функций (заметим здесь, что всякую меру мы можем рассматривать двояко – и как меру и как обобщенную функцию). Определим сначала последовательность вероятностных мер $\mathbf{P}_n$. Каждая мера $\mathbf{P}_n$ порождается некоторым сложным пуассоновским точечным процессом. Именно, пусть ν_n – пуассоновская случайная мера на $[0,T]$ с интенсивностью ndt, то есть $\mathbf{E}\nu_n(dt) = ndt$, а $\{\xi_j\}_{j=1}^{\infty}$ – последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с общим распределением Q, не зависящая от пуассоновской случайной меры. Будем предполагать, что

$$\mathbf{E}\xi_1 = \int x\,dQ(x) = 0, \quad \mathbf{D}\xi_1 = \int x^2\,dQ(x) = 1. \tag{7}$$

Для каждого натурального n построим случайный заряд ζ_n (случайный элемент Ω_0) следующим образом. Пусть

$$\nu_n = \sum_{j=1}^{k} \delta_{t_j}, \quad t_1 < t_2 < \cdots < t_k$$

– реализация пуассоновской случайной меры ν_n, (здесь $k = \nu_n[0,T]$). В каждую точку t_j, $j = 1, \ldots, k$, поместим заряд $\frac{\xi_j}{\sqrt{n}}$. То, что получилось, будет случайным зарядом, который обозначим через ζ_n, таким образом,

$$\zeta_n = \sum_{j=1}^{k} \frac{\xi_j}{\sqrt{n}}\,\delta_{t_j}, \quad \zeta_n \in \Omega_0.$$

Обозначим через $\mathbf{P}_n$ распределение случайного заряда ζ_n в Ω_0, а через $\mathbf{E}_n$ математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_n$.

Приведем удобную формулу для вычисления интеграла по мере $\mathbf{P}_n$. Пусть $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ – измеримая (по Борелю) функция. Для каждой такой функции f через f_k, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, обозначим симметричную функцию k двумерных переменных, определяемую как

$$f_k((t_1,x_1),(t_2,x_2),\ldots,(t_k,x_k)) = f(\sum_{j=0}^{k} x_j \delta_{t_j}). \tag{8}$$

При различных k функции f_k связаны соотношениями

$$f_{k+1}\big((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k),(t_{k+1},0)\big) = f_k\big((t_1,x_1),\ldots,(t_k,x_k)\big). \tag{9}$$

Таким образом, задание функции $f:\Omega_0\to\mathbb{R}$ эквивалентно заданию последовательности $\{f_k\}_{k=0}^{\infty}$ симметричных функций, связанных соотношениями (9). При этом $f_0=\mathrm{const}$, а при $k>0$ функция f_k является симметричной функцией k двумерных переменных.

Далее, через g_n будем обозначать обобщенную функцию, которая на основную функцию (классы основных функций мы будем вводить по мере необходимости) $\psi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ действует как

$$(g_n,\psi)=n\int\limits_{\mathbb{R}}\Big(\psi\Big(\frac{y}{\sqrt{n}}\Big)-\psi(0)\Big)\,dQ(y). \tag{10}$$

Заметим, что если функция ψ имеет две непрерывных ограниченных производных, то

$$\lim_{n\to\infty}(g_n,\psi)=\frac{\psi^{(2)}(0)}{2}=\Big(\frac{\delta^{(2)}}{2},\psi\Big), \tag{11}$$

то есть обобщенная функция $\frac{\delta^{(2)}}{2}$ есть предел обобщенных функций g_n.

Для каждого $k\in\mathbb{N}$ через m^k будем обозначать меру Лебега на $[0,T]^k$, а через $g_n^{\otimes k}$ – тензорное произведение (см. [5]) обобщенных функций $g_n\otimes g_n\otimes\cdots\otimes g_n$.

Теорема 1. *Для всякой измеримой ограниченной функции* $f:\Omega_0\to\mathbb{R}$

$$\int\limits_{\Omega_0} f\,d\mathbf{P}_n=\mathbf{E}_n f=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\int\limits_{[0,T]^k}\big(g_n^{\otimes k},f_k\big)\,dm^k. \tag{12}$$

Здесь интегрирование ведется по временным переменным $t_j\in[0,T]$, *а обобщенная функция* $g_n^{\otimes k}$ *действует по пространственным переменным* $x_j\in\mathbb{R}$. *Слагаемое с* $k=0$ *равно* f_0.

Доказательство можно найти в [4].

Далее мы будем рассматривать не только интервал $[0,T]$, но и различные его подынтервалы. Введем соответствующие определения. Пусть $[t,s)\subset[0,T]$. Через $\Omega_0^{t,s}$ мы обозначим множество дискретных зарядов с конечным спектром на интервале $[t,s)$. Ясно, что для любого $u\in(t,s)$ множество $\Omega_0^{t,s}$ естественно изоморфно декартову произведению $\Omega_0^{t,u}\times\Omega_0^{u,s}$. Обозначим через $\mathbf{P}_n^{t,s}$ сужение меры $\mathbf{P}_n$ на $\Omega_0^{t,s}$. Ясно, что

$$\mathbf{P}_n^{t,s}=\mathbf{P}_n^{t,u}\times\mathbf{P}_n^{u,s},$$

где знаком $\times$ обозначено прямое произведение соответствующих мер.

Итак, последовательность вероятностных мер построена. Определим теперь обобщенную функцию $\mathbf{L}$. Для каждой функции $f : \Omega_0 \to \mathbb{R}$, принадлежащей пространству основных функций $\mathcal{G}$ (пространство $\mathcal{G}$ описано в [4]) положим

$$\mathbf{L}f = (\mathbf{L}, f) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \int\limits_{[0,T]^k} \left(\left(\frac{\delta^{(2)}}{2} \right)^{\otimes k}, f_k \right) dm^k. \tag{13}$$

Здесь, как и ранее, через m^k обозначена мера Лебега на $[0,T]^k$, причем интегрирование ведется по временным переменным $t_j \in [0,T]$, а обобщенная функция $(\frac{\delta^{(2)}}{2})^{\otimes k}$ действует по пространственным переменным $x_j \in \mathbb{R}$. Отметим, что если $f \equiv f_0 = \mathrm{const}$, то

$$\mathbf{L}f = f_0, \tag{14}$$

так как в сумме (13) отличным от нуля будет только слагаемое с $k = 0$.

Для $t < s$ через $\mathbf{L}^{t,s}$ будем обозначать сужение обобщенной функции $\mathbf{L}$ на $\Omega_0^{t,s}$, понимая под этим обобщенную функцию, определенную на подмножестве $\mathcal{G}^{t,s} \subset \mathcal{G}$ основных функций, каждая из которых зависит только от той части заряда, которая попала в интервал $[t,s)$ то есть любая функция $f \in \mathcal{G}^{t,s}$ удовлетворяет условию $f(\omega) = f(\omega|_{[t,s)})$ для всех $\omega \in \Omega_0$. На основную функцию $f \in \mathcal{G}^{t,s}$ обобщенная функция $\mathbf{L}^{t,s}$ действует как

$$\mathbf{L}^{t,s} f = \int\limits_{[t,s]^k} \left(\left(\frac{\delta^{(2)}}{2} \right)^{\otimes k}, f_k \right) dm^k. \tag{15}$$

Нетрудно показать, что для любых $t < u < s$ справедливо соотношение

$$\mathbf{L}^{t,s} = \mathbf{L}^{t,u} \otimes \mathbf{L}^{u,s}. \tag{16}$$

Теорема 2. *Для любого $f \in \mathcal{G}$*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega_0} f d\mathbf{P}_n = \mathbf{L}f,$$

или, другими словами, в смысле обобщенных функций

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}_n = \mathbf{L}.$$

Доказательство можно найти в [4].

Итак, построен предельный объект $(\Omega_0, \mathcal{G}, \mathbf{L})$, который не является вероятностным пространством, и последовательность обычных вероятностных мер $\mathbf{P}_n$ на $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0))$. На каждое $\mathbf{P}_n$ можно смотреть и как на меру, и как на обобщенную функцию, заданную на множестве $\mathcal{G}$ основных функций. При этом в смысле обобщенных функций (то есть на каждой основной функции) последовательность $\mathbf{P}_n$ сходится к $\mathbf{L}$.

Далее, всякая измеримая функция $\xi : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ при любом n является случайной величиной на вероятностном пространстве $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mathbf{P}_n)$ и, соответственно, мы можем рассматривать ее распределение $\mathcal{P}^n_\xi$. При этом для любой непрерывной ограниченной функции φ справедливо соотношение

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \varphi \, d\mathcal{P}^n_\xi = \int\limits_{\Omega_0} \varphi \circ \xi \, d\mathbf{P}_n = \mathbf{E}_n(\varphi \circ \xi). \tag{17}$$

В случае же, когда рассматривается предельный объект $(\Omega_0, \mathcal{G}, \mathbf{L})$, ситуация несколько усложняется. Мы можем определить распределение ξ только как образ $\xi\mathbf{L}$ обобщенной функции $\mathbf{L}$ под действием ξ то есть как обобщенную функцию, которая на основную функцию ξ действует как

$$(\xi\mathbf{L}, \varphi) = \mathbf{L}(\varphi \circ \xi). \tag{18}$$

При этом в (18), в отличие от (17), мы уже не можем брать в качестве φ произвольную непрерывную ограниченную функцию, так как для того, чтобы правая часть (18) была бы корректно определена необходимо, чтобы функция $\varphi \circ \xi$ принадлежала бы классу основных функций $\mathcal{G}$. Поэтому в качестве пространства основных функций для обобщенных функций $\xi\mathbf{L}$ в [4] выбиралось множество $\mathcal{H}_{fin}$ функций φ, которые являются обратным преобразованием Фурье конечного заряда с финитным носителем. Именно, каждая функция $\varphi \in \mathcal{H}_{fin}$ имеет вид $\varphi(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-A}^{A} e^{-ipx} \mu(dp)$, где μ – заряд на $[-A, A]$, удовлетворяющий условию $|\mu|([-A, A]) < \infty$.

Любая $\varphi \in \mathcal{H}_{fin}$ является целой функцией экспоненциального типа и, кроме того, для широкого класса функций $\xi : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ функция $\varphi \circ \xi$ принадлежит пространству основных функций $\mathcal{G}$.

Следуя [4], определим две полугруппы операторов P_n^t и P^t $(t \geqslant 0)$ полагая для $\varphi \in \mathcal{H}_{fin}$

$$
\begin{aligned}
P^t\varphi(x) &= \mathbf{L}\varphi(x+\sigma\omega[0,t]) = \mathbf{L}^{0,t}\varphi(x+\sigma\omega[0,t]) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\biggl(\Bigl(\frac{\delta^{(2)}}{2}\Bigr)^{\otimes k}, \varphi(x+\sigma(x_1+\dots+x_k))\biggr)
\end{aligned} \tag{19}
$$

и

$$
P_n^t\varphi(x) = \mathbf{E}_n\varphi(x+\sigma\omega[0,t]) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\bigl(g_n^{\otimes k}, \varphi(x+\sigma(x_1+\dots+x_k))\bigr). \tag{20}
$$

Здесь через $\mathbf{E}_n$, как и ранее, обозначено математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_n$, а обобщенная функция g_n определяется формулой (10).

Используя (19), нетрудно показать, что для каждой $\varphi \in \mathcal{H}_{fin}$ функция $u(t,x) = P^t\varphi(x)$ решает задачу Коши

$$
\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\sigma^2}{2}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0,x) = \varphi(x), \tag{21}
$$

а используя (20), также легко показать, что для каждой $\varphi \in \mathcal{H}_{fin}$ функция $u_n(t,x) = P_n^t\varphi(x)$ решает задачу Коши

$$
\frac{\partial u_n}{\partial t} = A_n^\sigma u_n, \quad u_n(0,x) = \varphi(x), \tag{22}
$$

где оператор A_n^σ действует на функцию $\psi \in \mathcal{H}_{fin}$ как

$$
A_n^\sigma\psi(x) = n\int\limits_{\mathbb{R}}\Bigl(\psi\Bigl(x+\frac{\sigma y}{\sqrt{n}}\Bigr) - \psi(x)\Bigr)\,dQ(y).
$$

Из теоремы 2 следует, что $u_n(t,x) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} u(t,x)$ для любых фиксированных t,x. В [4] рассматривались вопросы продолжения операторов P_n^t, P^t с $\varphi \in \mathcal{H}_{fin}$ на более широкий класс функций φ а также вопрос сходимости $u_n \to u$ в различных метриках. При этом в [4] основное внимание уделялось случаю комплексных значений параметра σ.

В настоящей работе мы получим аналогичное представление решения для уравнения колебания струны (3), но в отличие от [4] параметр σ будет предполагаться вещественным (хотя возможно рассматривать и комплексные σ, это не приводит ни к каким принципиальным трудностям).

§4. Полугруппы операторов, отвечающие уравнению колебания струны

Запишем сначала уравнение второго порядка (по t) в виде системы уравнений первого порядка.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} & = v(t,x), \\ \frac{\partial v}{\partial t} & = \sigma^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \end{cases}$$

$u(0,x) = \varphi(x), v(0,x) = v_0(x)$. Для удобства будем проводить рассмотрения на промежутке $[0,\pi]$. Общий случай сводится к этому линейной заменой аргумента.

Итак, пусть непрерывная функция φ определена на интервале $[0,\pi]$. Разложим функцию φ в сумму

$$\varphi(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(\pi) - \varphi(0)}{\pi} x + \varphi_0(x), \tag{23}$$

ясно, что при этом $\varphi_0(0) = \varphi_0(\pi) = 0$. Для каждой функции φ_0 через $\varphi_0^{\rm odd}$ обозначим ее нечетное продолжение с $[0,\pi]$ на $[-\pi,\pi]$ а через $\widetilde{\varphi}$ обозначим функцию, заданную на $[-\pi,\pi]$ формулой

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(\pi) - \varphi(0)}{\pi} x + \varphi_0^{\rm odd}(x).$$

Далее, для функции v_0 через $v_0^{\rm odd}$ обозначим ее нечетное продолжение с $[0,\pi]$ на $[-\pi,\pi]$, а через ψ обозначим первообразную $v_0^{\rm odd}$, удовлетворяющую условию $\psi(0) = 0$. При этом ψ будет четной функцией.

Предположим, что $\varphi_0^{\rm odd}, v_0^{\rm odd} \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$ то есть

$$\varphi_0^{\rm odd}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx}, \quad v_0^{\rm odd}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{imx} \tag{24}$$

причем $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |B_m| < \infty$ и $\sum\limits_{m=-\infty}^{\infty} |D_m| < \infty$, а в силу нечетности, $B_0 = 0, D_0 = 0$ и для всех m $B_{-m} = -B_m, D_{-m} = -D_m$.

На множестве пар функций φ, v_0, таких, что $\varphi_0^{\rm odd} \in \mathcal{R}^{(1)}[-\pi,\pi]$, $v_0^{\rm odd} \in \mathcal{R}[-\pi,\pi]$, $v_0(0) = v_0(\pi) = 0$ определим полугруппу операторов $P^t = (P_1^t, P_2^t)$, полагая (напомним, что мера $\langle\omega,\omega\rangle \in \Omega_0$ определяется формулой (6))

$$\begin{aligned}
P_1^t(\varphi, v_0)(x) &= \frac{1}{2}\mathbf{L}\left[\widetilde{\varphi}(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) + \widetilde{\varphi}(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right] \\
&+ \frac{1}{2\sigma}\mathbf{L}\left[\psi(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) - \psi(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right]. \\
P_2^t(\varphi, v_0)(x) &= \frac{\sigma}{2}\mathbf{L}\left[\widetilde{\varphi}^{(1)}(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) - \widetilde{\varphi}^{(1)}(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbf{L}\left[v_0^{\mathrm{odd}}(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) + v_0^{\mathrm{odd}}(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right].
\end{aligned}$$

Кроме того, для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим "допредельную" полугруппу операторов $P_n^t = (P_{1,n}^t, P_{2,n}^t)$, полагая

$$\begin{aligned}
P_{1,n}^t(\varphi, v_0)(x) &= \frac{1}{2}\mathbf{E}_n\left[\widetilde{\varphi}(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) + \widetilde{\varphi}(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right] \\
&+ \frac{1}{2\sigma}\mathbf{E}_n\left[\psi(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) - \psi(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right]. \\
P_{2,n}^t(\varphi, v_0)(x) &= \frac{\sigma}{2}\mathbf{E}_n\left[\widetilde{\varphi}^{(1)}(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) - \widetilde{\varphi}^{(1)}(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right] \\
&+ \frac{1}{2}\mathbf{E}_n\left[v_0^{\mathrm{odd}}(x+\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t]) + v_0^{\mathrm{odd}}(x-\sigma\langle\omega,\omega\rangle[0,t])\right]
\end{aligned}$$

(здесь, как и ранее, через $\mathbf{E}_n$ обозначается математическое ожидание по мере $\mathbf{P}_n$).

Посмотрим теперь как действуют на вектор-функцию (φ, v_0) введенные полугруппы операторов. Пусть

$$\widetilde{\varphi}(x) = \varphi(0) + \frac{\varphi(\pi)-\varphi(0)}{\pi}x + \sum_{m=-\infty}^{\infty} B_m e^{imx}, \quad v_0^{\mathrm{odd}}(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} D_m e^{imx}.$$

Тогда

$$\psi(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{D_m}{im} e^{imx} - \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{D_m}{im}.$$

Лемма 1. *Для любых* $t \in [0,T]$, $a \in \mathbb{C}$ *имеем*

1. $\mathbf{L}\langle\omega,\omega\rangle[0,t] = t$.
2. $\mathbf{L}e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]} = e^{iat}$.

Доказательство. Докажем только утверждение пункта 2, так как утверждение пункта 1 из него немедленно следует.

Заметим сначала, что $\langle\omega,\omega\rangle[0,t]$ зависит только от части заряда ω, которая содержится в интервале $[0,t]$, и, значит, в силу (16) мы имеем

$$\mathbf{L}e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]} = \mathbf{L}^{0,t}e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]}.$$

Определим функцию $f : \Omega_0^{0,t} \to \mathbb{C}$, полагая $f(\omega) = e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]}$. Тогда, как легко видеть, $f_0 = 1$, а для всех $k > 0$ $f_k((t_1, x_1), \dots, (t_k, x_k)) = e^{ia(x_1^2+\dots+x_k^2)}$. Используя (15), получаем

$$\mathbf{L}^{0,t}e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(\left(\frac{\delta^{(2)}}{2}\right)^{\otimes k}, e^{ia(x_1^2+\dots+x_k^2)}\right) = e^{ita}. \qquad \square$$

Лемма 2. *Для любых* $t \in [0, T]$, $a \in \mathbb{C}$ *имеем*

1. $\mathbf{E}_n\langle\omega,\omega\rangle[0,t] = t.$
2. $\mathbf{E}_n e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]} = e^{nt\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iay^2}{n}}-1)\,dQ(y)}.$

Доказательство. Снова докажем только утверждение пункта 2. Как и при доказательстве леммы 1, определим функцию $f : \Omega_0^{0,t} \to \mathbb{C}$, полагая $f(\omega) = e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]}$.

Используя (12), получим

$$\mathbf{E}_n e^{ia\langle\omega,\omega\rangle[0,t]} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\left(g_n^{\otimes k}, e^{ia(x_1^2+\dots+x_k^2)}\right) = e^{nt\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{iay^2}{n}}-1)\,dQ(y)}. \qquad \square$$

В силу леммы 1, имеем

$$\begin{aligned}
P_1^t(\varphi, v_0)(x) &= \varphi(0) + \frac{\varphi(\pi)-\varphi(0)}{\pi}x \\
&\quad + \frac{1}{2}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_m e^{im(x+\sigma t)} + \sum_{m=-\infty}^{\infty}B_m e^{im(x-\sigma t)}\right) \\
&\quad + \frac{1}{2\sigma}\left(\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{D_m}{im}e^{im(x+\sigma t)} - \sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{D_m}{im}e^{im(x-\sigma t)}\right) \\
&= \varphi(0) + \frac{\varphi(\pi)-\varphi(0)}{\pi}x \\
&\quad + \sum_{m=-\infty}^{\infty}\left(B_m\cos(m\sigma t) + \frac{D_m}{\sigma m}\sin(m\sigma t)\right)e^{imx}.
\end{aligned}$$

И, аналогичным же образом,

$$P_2^t(\varphi, v_0)(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big(-\sigma m B_m\sin(m\sigma t) + D_m\cos(m\sigma t)\Big)e^{imx}.$$

Последние формулы показывают, что оператор P^t не меняет линейную часть функции φ, а его действие на функции φ_0, v_0 сводится к умножению каждой пары коэффициентов Фурье (B_m, D_m) на матрицу

$$\begin{pmatrix} \cos(m\sigma t) & \dfrac{\sin(m\sigma t)}{m\sigma} \\ -m\sigma\sin(m\sigma t) & \cos(m\sigma t) \end{pmatrix}. \tag{24}$$

Теперь посмотрим, как действует “допредельная” полугруппа $P_{t,n}$. Используя лемму 2 (вместо леммы 1) в точности так же, как и выше, легко показать, что оператор P^t не меняет линейную часть функции φ, а его действие на функции φ_0, v_0 сводится к умножению пары коэффициентов Фурье (B_m, D_m) на матрицу

$$\begin{pmatrix} \gamma_n^m(t) & \dfrac{\widetilde{\gamma}_n^m(t)}{m\sigma} \\ -m\sigma\widetilde{\gamma}_n^m(t) & \gamma_n^m(t) \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где

$$\gamma_n^m(t) = \frac{1}{2}\left[\exp\Big(nt\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{im\sigma y^2}{n}}-1)dQ(y)\Big)+\exp\Big(nt\int_{\mathbb{R}}(e^{-\frac{im\sigma y^2}{n}}-1)dQ(y)\Big)\right],$$

и

$$\widetilde{\gamma}_n^m(t) = \frac{1}{2i}\left[\exp\Big(nt\int_{\mathbb{R}}(e^{\frac{im\sigma y^2}{n}}-1)dQ(y)\Big)-\exp\Big(nt\int_{\mathbb{R}}\Big(e^{-\frac{im\sigma y^2}{n}}-1\Big)dQ(y)\Big)\right].$$

Отметим очевидные свойства $\gamma_n^m(t), \widetilde{\gamma}_n^m(t)$. Во-первых при всех t

$$|\gamma_n^m(t)| \leqslant 1, \quad |\widetilde{\gamma}_n^m(t)| \leqslant 1, \tag{26}$$

а во-вторых равномерно по $t \in [0,T]$

$$\lim_{n\to\infty}\gamma_n^m(t) = \cos(m\sigma t), \quad \lim_{n\to\infty}\widetilde{\gamma}_n^m(t) = \sin(m\sigma t). \tag{27}$$

Определим теперь вектор-функции $\big(u(t,x), v(t,x)\big) = P^t(\varphi, v_0)$ и $\big(u_n(t,x), v_n(t,x)\big) = P_n^t(\varphi, v_0)$.

Теорема 3. *Функция $\big(u(t,x), v(t,x)\big)$ есть решение задачи Коши для системы уравнений*

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} &= v(t,x) \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= \sigma^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \end{cases}$$

с начальными условиями $u(0,x) = \varphi(x)$, $v(0,x) = v_0(x)$ и краевыми условиями $u(t,0) = \varphi(0)$, $u(t,\pi) = \varphi(\pi)$, $v_0(0) = v_0(\pi) = 0$.

Утверждение теоремы следует из (24).

Определим пространство $\mathcal{R}^{\rm odd}$ непрерывных функций $h:[0,\pi]\to\mathbb{C}$ таких, что функция $h_0^{\rm odd}\in\mathcal{R}[-\pi,\pi]$. Каждая функция $h\in\mathcal{R}^{\rm odd}$ однозначно представима в виде $h(x)=a+bx+h_0(x)$, $h_0(0)=h_0(\pi)=0$. Определим в этом пространстве норму, полагая

$$\|h\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}=|a|+|b|\pi+\sum_{m=-\infty}^{\infty}|B_m|.$$

Ясно, что $\|h\|_\infty\leqslant\|h\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}$. Далее, на множестве вектор-функций $h=(h_1,h_2)$ определим норму $\|h\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}$, как

$$\|h\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}=\|h_1\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}+\|h_2\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}.$$

Теорема 4. *Пусть $\varphi,v_0\in\mathcal{R}^{\rm odd}$, причем $\varphi_0^{\rm odd}\in\mathcal{R}^{(1)}[-\pi,\pi]$ и $v_0(0)=v_0(\pi)=0$. Тогда равномерно по $t\in[0,T]$*

$$\lim_{n\to\infty}\|P_n^t(\varphi,v_0)-P^t(\varphi,v_0)\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}=0.$$

Доказательство. Пусть

$$\varphi_0^{\rm odd}(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}B_me^{imx},\quad v_0^{\rm odd}(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}D_me^{imx}.$$

По условию теоремы

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty}|mB_m|<\infty,\quad \sum_{m=-\infty}^{\infty}|D_m|<\infty.$$

Используя (24), (25), получим

$$\begin{aligned}\|P_n^t(\varphi,v_0)-P^t(\varphi,v_0)\|_{\mathcal{R}^{\rm odd}}\leqslant&\sum_{m=-\infty}^{\infty}|B_m|\cdot|\cos(m\sigma t)-\gamma_n^m|\\&+\sum_{m=-\infty}^{\infty}|\frac{D_m}{m\sigma}|\cdot|\sin(m\sigma t)-\widetilde{\gamma}_n^m|\\&+|\sigma|\sum_{m=-\infty}^{\infty}|mB_m|\cdot|\sin(m\sigma t)-\widetilde{\gamma}_n^m|\\&+\sum_{m=-\infty}^{\infty}|D_m|\cdot|\cos(m\sigma t)-\gamma_n^m|.\end{aligned}$$

Заметим теперь, что в силу (26) и (27) правая часть последнего неравенства стремится к нулю по теореме Лебега о мажорируемой сходимости. □

Литература

1. А. Д. Вентцель, *Курс теории случайных процессов.* Наука, М., 1975.
2. Kai Lai Chung, Zhongxin Zhao, *From Brownian Motion to Schrodinger's Equation.* Springer-Verlag, Berlin–Heidelberg, 1995.
3. M. Freidlin, *Functional Integration and Partial Differential Equations.* Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1985.
4. И. А. Ибрагимов, Н. В. Смородина, М. М. Фаддеев, *Вероятностная аппроксимация решений задачи Коши для некоторых эволюционных уравнений.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **396** (2011), 111–141.
5. И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов, *Обобщенные функции и действия над ними.* Наука, М., 1958.
6. А. В. Скороход, *Случайные процессы с независимыми приращениями.* Наука, М., 1986.

Smorodina N. V., Faddeev M. M. The probabilistic approach to the solution of the string wave equation.

We construct an analogue of the probabilistic representation of the solution of the string wave equation.

С.-Петербургский
государственный университет,
Физический факультет,
Ульяновская ул. 3, Старый Петергоф,
198504 Санкт-Петербург,
Россия
E-mail: smorodin@ns2691.spb.edu
E-mail: mmfaddeev@gmail.com

Поступило 3 октября 2012 г.