Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

В. В. Петров

ОБ УСИЛЕННОМ ЗАКОНЕ БОЛЬШИХ ЧИСЕЛ ДЛЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Теорема 1. *Пусть* $\{X_n\}$ *– последовательность случайных величин с конечными абсолютными моментами порядка* $p > 1$ *и математическими ожиданиями, равными нулю. Положим* $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ $(n \geqslant 1)$, $S_0 = 0$. *Пусть выполнено условие*

$$\mathbf{E}\,|S_n - S_m|^p \leqslant C(n-m)^{pr-1} \tag{1}$$

для всех n, m, *таких, что* $n > m \geqslant 0$, *где* $r \geqslant 1$ *и* C *– постоянная. Тогда*

$$S_n/n^r \to 0 \quad \textit{п.н.} \tag{2}$$

Доказательство использует следующую лемму Барндорф-Нильсена [1, лемма 3.2].

Лемма. *Пусть* $\{a_n\}$ *– последовательность неотрицательных чисел,* $\{b_n\}$ *и* $\{d_n\}$ *– последовательности положительных чисел,* $B_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. *Пусть* $B_n \to \infty$, $b_n/B_n \to 0$ $(n \to \infty)$, $1 < p < \infty$. *Если выполнены условия*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n/(B_n d_n) < \infty \tag{3}$$

и

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n d_n^{q/p} b_n/B_n < \infty, \tag{4}$$

где q *определено равенством* $1/p + 1/q = 1$, *то существует последовательность целых чисел* $\{n_k\}$, *такая, что* $n_k < n_{k+1}$ *для всех* k,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{n_k} < \infty, \tag{5}$$

Ключевые слова: усиленный закон больших чисел, суммы зависимых случайных величин.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00314 и НШ 1216.2012.1.

$$\sum_{k=1}^{\infty}(B_{n_{k+1}}-B_{n_k})^p/B^p_{n_{k+1}}<\infty. \tag{6}$$

В частном случае, когда $b_n=1$ для всех n, так что $B_n=n$, Дворецкий [2] (см. также [3]) доказал, что условие $\sum_{n=1}^{\infty}a_n/n<\infty$ (т.е. условие (4) при $d_n=1$ для всех n) влечет за собой существование последовательности целых чисел $\{n_k\}$, удовлетворяющей условиям (5), $n_k<n_{k+1}$ для всех k и $n_{k+1}/n_k\to 1(k\to\infty)$.

Мы будем применять лемму Барндорф-Нильсена, полагая $b_n=1$, $B_n=n$, $a_n=\mathbf{E}\,|S_n|^p/n^{pr}$, $d_n=(\log n)^p$. Условие (3) выполнено,так как $p>1$. Из (1) следует, что $\mathbf{E}\,|S_n|^p\leqslant Cn^{pr-1}$, поэтому с учетом равенства $q=p/(p-1)$ получаем

$$\sum a_n d_n^{q/p}b_n/B_n\leqslant\sum d_n^{1/(p-1)}a_n/n\leqslant C\sum(\log n)^{p/(p-1)}/n^2<\infty.$$

Условие (4) выполнено. В силу леммы существует последовательность целых чисел $\{n_k\}$, для которой имеют место соотношения (5) и (6), т.е.

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\,|S_{n_k}|^p/n_k^{pr}<\infty \tag{7}$$

и

$$\sum_{k=1}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)^p/n^p_{k+1}<\infty. \tag{8}$$

По неравенству Чебышева имеем

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(|S_{n_k}|\geqslant\varepsilon n_k^r)\leqslant\varepsilon^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{E}\,|S_{n_k}|^p/n_k^{pr}$$

для любого $\varepsilon>0$. Принимая во внимание (7) и лемму Бореля–Кантелли, получим $\mathbf{P}(|S_{n_k}|\geqslant\varepsilon n_k^r\text{ б.ч.})=0$ для любого $\varepsilon>0$, поэтому

$$S_{n_k}/n_k^r\to 0\quad\text{п.н.}\quad(k\to\infty). \tag{9}$$

Положим

$$S_{n,m}=S_n-S_m\quad(n>m), \tag{10}$$

$$N_k=\{n:n_k\leqslant n<n_{k+1}\}\quad(k=1,2,\dots). \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что

$$\max_{N_k}|S_n|/n^r = \max_{N_k}|(S_{n_{k+1}}/n_{k+1}^r)(n_{k+1}^r/n^r)$$
$$- (S_{n_{k+1},n}/n_{k+1}^r)(n_{k+1}^r/n^r)| \leqslant (|S_{n_{k+1}}|/n_{k+1}^r)(n_{k+1}^r/n_k^r)$$
$$+ (n_{k+1}^r/n_k^r)\max_{N_k}|S_{n_{k+1},n}|/n_{k+1}^r. \tag{12}$$

В силу (9) и соотношения

$$n_{k+1}/n_k \to 1 \quad (k \to \infty), \tag{13}$$

вытекающего из (8), первое слагаемое в правой части (12) сходится почти наверное к нулю при $k \to \infty$. Соотношение (2) будет доказано, если мы покажем, что такое же утверждение справедливо и для второго слагаемого.

Для произвольного $\varepsilon > 0$ имеем

$$\mathbf{P}(\max_{N_k}|S_{n_{k+1},n}| \geqslant \varepsilon n_{k+1}^r) \leqslant \sum_{N_k}\mathbf{P}\left(|S_{n_{k+1},n}| \geqslant \varepsilon n_{k+1}^r\right)$$
$$\leqslant \varepsilon^{-p}\sum_{N_k}\mathbf{E}\,|S_{n_{k+1},n}|^p/n_{k+1}^{pr} \leqslant C\varepsilon^{-p}\sum_{N_k}(n_{k+1}-n)^{pr-1}/n_{k+1}^{pr}$$
$$\leqslant C\varepsilon^{-p}\sum_{N_k}(n_{k+1}-n_k)^{pr-1}/n_{k+1}^{pr} \leqslant C\varepsilon^{-p}(n_{k+1}-n_k)^{pr}/n_{k+1}^{pr}$$

вследствие (1). Принимая во внимание (8), (13) и неравенство $r \geqslant 1$, получим

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{P}(\max_{N_k}|S_{n_{k+1},n}| \geqslant \varepsilon n_{k+1}^r) \leqslant C\varepsilon^{-p}\sum_{k=1}^{\infty}(n_{k+1}-n_k)^{pr}/n_{k+1}^{pr} < \infty$$

для любого $\varepsilon > 0$. Отсюда по лемме Бореля–Кантелли следует, что

$$\max_{N_k}|S_{n_{k+1},n}|/n_{k+1}^r \to 0 \quad \text{п.н.} \quad (k \to \infty). \tag{14}$$

Учитывая (9)–(14), приходим к соотношению (2). Теорема доказана. □

Приведем одно следствие теоремы 1, соответствующее значению $p = 2$.

Теорема 2. *Пусть* $\{X_n\}$ *– последовательность случайных величин с конечными дисперсиями, удовлетворяющая условию* $\mathrm{Var}(S_n - S_m) \leqslant C(n-m)^{2r-1}$ *для всех* n, m, *таких, что* $n > m$, *где* $r \geqslant 1$ *и* C *– постоянная. Тогда* $(S_n - \mathbf{E}\,S_n)/n^r \to 0$ *п.н.*

Литература

1. O. Barndorff–Nielsen, *Characteristic subsequuences and limit laws for weighted means.* — Trans. Third Prague conference on information theory, statistical decision function, random processes. Publishing House of the Czechoslovak Akad. Sci., Prague, (1964), 17–27.
2. A. Dvoretzky, *On the strong stability of a sequence of events.* — Ann. Math. Statist. **20**, No. 2 (1949), 296–299.
3. В. В. Петров, *К усиленному закону больших чисел для последовательности неотрицательных случайных величин.* — Зап. научн. семин. ПОМИ **384** (2010), 182–184.

Petrov V. V. On the strong law of large numbers for a sequence of dependent random variables.

New sufficient conditions are found for the applicability of the strong law of large numbers to a sequence of random variables without assumptions of independence or nonnegativity.

Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: petrov2v@mail.ru

Поступило 12 сентября 2012 г.