Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

М. А. Лифшиц

ЦИКЛИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МАКСИМУМА В ИЕРАРХИЧЕСКОЙ СХЕМЕ СУММИРОВАНИЯ

§1. Ветвящиеся случайные блуждания

Исследование экстремальных положений ветвящегося случайного блуждания и ветвящегося броуновского движения уже может считаться классической задачей, первые глубокие результаты в которой получены ещё в работе Хаммерсли [9]. В последние годы интерес к ней снова вырос, были получены новые содержательные продвижения, но многие вопросы ещё остаются открытыми.

Напомним вкратце определение ветвящегося случайного блуждания, весьма частный случай которого будет рассмотрен в данной статье. В начальный (нулевой) момент времени имеется одна частица, расположенная в нуле. В момент времени 1 частица умирает, порождая точечный процесс (конфигурацию) потомков, т.е. конечное множество, состоящее из случайного числа частиц (точек на вещественной прямой), положения которых могут, вообще говоря, быть взаимно зависимы. Каждая родившаяся частица живёт единицу времени, а затем тоже умирает, порождая новый точечный процесс потомков, независимый от остальных аналогичных процессов. При этом распределение процесса потомков каждой частицы отличается от распределения потомков исходной частицы только сдвигом на величину положения порождающей частицы.

Таким образом, процесс ветвящегося случайного блуждания представляет собой генеалогическое дерево Гальтона–Ватсона $\mathbb{T}$, каждый элемент которого $u \in \mathbb{T}$ характеризуется положением на прямой $V(u)$. В свою очередь, $V(u)$ представляется суммой (по множеству предков частицы u), независимых величин, каждая из которых есть смещение частицы относительно её родителя.

Ключевые слова: иерархическая схема суммирования, распределение максимума, ветвящееся случайное блуждание, циклическая предельная теорема.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00154, 11-01-12104-офи_м, и ФЦП 2010-1.1.-111-128-033.

Мы не будем рассматривать возможные вариации этой модели, например, такие, где время жизни частицы случайно.

Каждая частица u относится к определённому поколению $|u|$, т.е. уровню дерева $\mathbb{T}$. Номер поколения исходной частицы мы принимаем за нулевой. Особый интерес представляют экстремальные положения частиц в поколениях, описывающие размах блуждания. Они определяются формулами

$$M_n := \max\{V(u), |u| = n\}, \quad m_n := \min\{V(u), |u| = n\}.$$

Предельные теоремы о распределениях этих величин получены в [1–6, 10–12]. Суть этих теорем можно выразить представлением вида

$$M_n = cn + b_n + M'_n, \tag{1}$$

где c – неотрицательная константа, b_n – детерминированная последовательность, изменяющаяся медленнее линейной функции (как правило, логарифмически), а последовательность M'_n сходится по распределению к некоторому пределу, либо просто ограничена по вероятности. Особо отметим, что мультипликативная нормировка при переходе к пределу не требуется, т.е. семейства распределений величин $(M_n)_{n\geqslant 0}$ являются сдвиг-компактными.

Разумеется, линейный член в асимптотике M_n тривиальным образом устраняется за счёт сдвига на константу процесса потомков в определении блуждания.

Одним из наиболее представительных результатов об экстремальных положениях является следующая теорема Аидекона [2].

Теорема 1. *Предположим, что распределение процесса потомков в ветвящемся случайном блуждании не является решётчатым, и выполнены условия*

$$\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} 1\right) > 1, \tag{2}$$

$$\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} e^{V(u)}\right) = 1, \quad \mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} V(u)e^{V(u)}\right) = 0, \tag{3}$$

а также моментные ограничения

$$\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} V(u)^2 e^{V(u)}\right) < \infty, \tag{4}$$

$$\mathbf{E}\left(X(\ln_+ X)^2\right) < \infty, \quad \mathbf{E}\left(\widetilde{X}(\ln_+ \widetilde{X})\right) < \infty, \tag{5}$$

где $X := \sum_{|u|=1} e^{V(u)}$, $\widetilde{X} := \sum_{|u|=1} V(u)e^{V(u)}$.

Тогда существует такая п.н. положительная случайная величина D, *что для любого* $r \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}\left(M_n \leqslant -\frac{3}{2}\ln n + r\right) = \mathbf{E}\, e^{-De^{-r}}.$$

Теорема 1 означает, что в (1) мы имеем $c = 0$, $b_n = -\frac{3}{2}\ln n$, а распределения $\widetilde{M_n}$ сходятся к смеси сдвинутых двойных экспоненциальных распределений (распределений Гумбеля).

Условие (2) естественно: оно означает, что процесс ветвления является надкритическим. Это условие обеспечивает наличие достаточного числа частиц в блуждании. Условия (3) означают, что произведена линейная нормировка шагов блуждания, "убивающая" линейный член в (1).

Эти условия не являются слишком ограничительными в следующем смысле. Рассмотрим ветвящееся блуждание, которое удовлетворяет (2), но не обязано удовлетворять условиям (3). Положим

$$\Phi(\gamma) := \mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} e^{\gamma V(u)}\right), \quad \Psi(\gamma) := \ln \Phi(\gamma), \quad \gamma > 0.$$

Сделаем линейную замену смещения в одном поколении

$$\widetilde{V}(u) := \gamma V(u) - \Psi(\gamma), \quad |u| = 1,$$

что соответствует смещениям для частиц общего вида

$$\widetilde{V}(u) := \gamma V(u) - |u|\Psi(\gamma), \quad u \in \mathbb{T}. \tag{6}$$

Будем искать такое $\gamma > 0$, чтобы выполнялись аналоги (3) для нового блуждания,

$$\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} e^{\widetilde{V}(u)}\right) = 1, \quad \mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} \widetilde{V}(u)e^{\widetilde{V}(u)}\right) = 0.$$

Заметим, что первое условие выполнено автоматически, так как

$$\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} e^{\widetilde{V}(u)}\right) = e^{-\Psi(\gamma)}\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} e^{\gamma V(u)}\right) = e^{-\Psi(\gamma)}\Phi(\gamma) = 1.$$

Второе условие можно переписать в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} (\gamma V(u) - \Psi(\gamma))e^{\gamma V(u)}\right) \\ &= \gamma\,\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} V(u)e^{\gamma V(u)}\right) - \Psi(\gamma)\mathbf{E}\left(\sum_{|u|=1} e^{\gamma V(u)}\right) \\ &= \gamma\Phi'(\gamma) - \Psi(\gamma)\Phi(\gamma), \end{aligned}$$

что равносильно уравнению

$$R(\gamma) := \gamma\Psi'(\gamma) - \Psi(\gamma) = 0. \tag{7}$$

Из неравенства Гёльдера легко следует, что функция $\Psi(\cdot)$ выпукла вниз. Поэтому $R'(\gamma) = \gamma\Psi''(\gamma) \geqslant 0$, т.е. $R(\cdot)$ – возрастающая функция. При этом $R(0) = -\Psi(0) = -\ln\Phi(0) < 0$ в силу (2). Следовательно, если

$$\Phi(\gamma) < \infty, \qquad 0 \leqslant \gamma < \infty,$$

и

$$\lim_{\gamma\to\infty} R(\gamma) = \lim_{\gamma\to\infty} [\gamma\Psi'(\gamma) - \Psi(\gamma)] > 0, \tag{8}$$

то уравнение (7) разрешимо относительно $\gamma > 0$, и линейная замена (6) сводит изучение исходного блуждания к изучению блуждания, удовлетворяющего условиям (3).

В рассматриваемом ниже примере величины M_n ни при каких сдвигах *не сходятся* ни к какому невырожденному предельному распределению. Вместо этого они сближаются с некоторой спиралью распределений, или, если принять во внимание сдвиги, вращаются вдоль замкнутой кривой в пространстве распределений. Имеются *две* причины, по которым теорема 1 здесь не применима: во-первых, распределения смещений решётчатые; во-вторых, условие редукции (8) не выполнено.

§2. Иерархическая схема суммирования

В дальнейшем мы рассматриваем простейшую модель ветвящегося случайного блуждания: каждая частица порождает *двух* потомков, которые независимо смещаются на бернуллиевскую случайную величину, принимающую значения 1 с вероятностью p и -1 с вероятностью $1-p$. Таким образом, генеалогическое дерево $\mathbb{T}$ – это простейшее бинарное дерево, а положения частиц описываются суммами независимых бернуллиевских случайных величин вдоль ветвей этого дерева. Тем удивительнее, что эта простая модель демонстрирует интересное предельное поведение.

Мы можем переопределить изучаемый объект следующим образом.

Рассмотрим n-уровневое бинарное дерево и расположим на его рёбрах н.о.р. бернуллиевские случайные величины (B_i). Дерево имеет 2^n листьев. С каждым листом свяжем сумму случайных величин вдоль пути, соединяющего лист с корнем дерева. Обозначим M_n максимум сумм по всем листьям и исследуем распределение M_n при $n \to \infty$. Очевидным образом, мы имеем $M_0 = 0$, $M_n \in [-n, n]$, и $M_n = n \pmod 2$. Более того, имеется рекуррентное уравнение

$$M_{n+1} = \max\left\{M_n^{(1)} + B^{(1)}; M_n^{(2)} + B^{(2)}\right\}, \tag{9}$$

где $M_n^{(j)}$ и $B^{(j)}$ – соответственно независимые копии M_n и бернуллиевской величины.

Заметим, что иерархические схемы суммирования появляются не только в связи с ветвящимися блужданиями. Они возникают, например, в физических моделях – обобщенной случайной энергии Деррида, изучавшейся Бовье и Курковой [4]. При этом суммируемые величины, находящиеся на одном уровне дерева, могут иметь одинаковые распределения, но это распределение может разумным образом меняться от уровня к уровню.

2.1. Симметричный случай. В этом подразделе рассматривается наиболее интересный, симметричный, случай

$$\mathbf{P}(B_i = 1) = \mathbf{P}(B_i = -1) = \frac{1}{2}\,.$$

Начнем с изучения поведения $\mathbf{E}M_n$. Дальнейшие тонкие оценки полностью основаны на следующем скромном факте.

Предложение 2. *Пусть*

$$K_n := \{x : |x| = n, V(x) = M_n\}$$

– число вершин уровня n, на которых достигается максимум M_n. Тогда $K_n \to \infty$ по вероятности и

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(M_{n+1} - M_n) = 1.$$

Доказательство. Заметим, что K_n оценивается снизу через критический процесс Гальтона–Ватсона Z_n с числом потомков N, распределённым по формуле

$$\mathbf{P}(N = k) = \begin{cases} \frac{1}{4}, & k = 0, \\ \frac{1}{2}, & k = 1, \\ \frac{1}{4}, & k = 2, \end{cases}$$

и возобновляющийся со значения 1 в момент вырождения. Чтобы "увидеть" Z_n на дереве, достаточно следить за путями, вдоль которых встречаются только слагаемые $B_i = +1$; на каждом уровне, где происходит вырождение (на всех продолжениях отслеживаемых путей стоят значения -1), сохраним только один путь и будем рассматривать только его продолжения – согласно предыдущему правилу. Отметим, что выбранные пути дают максимальные значения сумм на всём своём протяжении, откуда $Z_n \leqslant K_n$.

Посмотрим на Z_n с точки зрения теории марковских цепей. Все состояния цепи являются возвратными и нулевыми, так как время вырождения нашего процесса Гальтона–Ватсона имеет бесконечное математическое ожидание. Отсюда вытекает, что для любого фиксированного $\ell \in \mathbb{N}$ верно

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n = \ell) = 0,$$

см. например, теорему 3 в [8, §XIII.3]. Следовательно, для любого $m \in \mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(K_n \leqslant m) \leqslant \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n \leqslant m) = \sum_{\ell=1}^{m} \lim_{n\to\infty} \mathbf{P}(Z_n = \ell) = 0,$$

что и требовалось доказать.

Переходя к математическим ожиданиям, заметим что $M_{n+1}-M_n \in \{-1,+1\}$; более того,

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(M_{n+1}-M_n=+1|\,\mathcal{A}_n) &= 1-2^{-K_n},\\ \mathbf{P}(M_{n+1}-M_n=-1|\,\mathcal{A}_n) &= 2^{-K_n},\end{aligned}$$

где $\mathcal{A}_n$ обозначает сигма-алгебру, порождённую величинами, находящимися на первых n уровнях дерева. Следовательно,

$$\mathbf{E}(M_{n+1}-M_n)=1-2\,\mathbf{E}\,2^{-K_n},$$

и второе утверждение предложения следует из первого. □

Предложение 2 показывает, что $\mathbf{E}M_n \sim n$, когда n стремится к бесконечности. Таким образом оно подсказывает, что M_n относительно близко к своей верхней границе n. Поэтому более удобно исследовать величины $M'_n = \frac{n-M_n}{2}$. Тогда M'_n является целой неотрицательной случайной величиной, удовлетворяет условиям $M'_0=0$, $M'_n\in[0,n]$ и уравнению

$$M'_{n+1}=\min\left\{M_n'^{(1)}+\widetilde{B}^{(1)};M_n'^{(2)}+\widetilde{B}^{(2)}\right\}, \tag{10}$$

где $M_n'^{(j)}$ и $\widetilde{B}^{(j)}$ – независимые копии величины M'_n и величины $\widetilde{B}$, чьё распределение определяется формулой

$$\mathbf{P}(\widetilde{B}=1)=\mathbf{P}(\widetilde{B}=0)=\frac{1}{2}\,.$$

Более удобно выразить рекуррентное соотношение в терминах хвостов случайных величин. Положим $F_n(x):=\mathbf{P}(M'_n\geqslant x)$. Тогда

$$F_0(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant 0,\\ 0, & x>0,\end{cases}$$

и

$$F_{n+1}(x)=\left[\frac{F_n(x)+F_n(x-1)}{2}\right]^2. \tag{11}$$

Это уравнение имеет *много* инвариантных решений. Действительно, инвариантное распределение должно удовлетворять уравнению

$$4F(x)=\left[F(x)+F(x-1)\right]^2. \tag{12}$$

Поэтому $F(x-1)=G(F(x))$ и $F(x)=g(F(x-1))$, где $G(y):=2\sqrt{y}-y$ и $g(y):=2-y-2\sqrt{1-y}$ – взаимно обратные функции. Таким образом, все значения F могут быть определены через $F(0)$ итерациями функций g и G. Семейство инвариантных распределений может быть записано в параметрической форме $\{\mathcal{F}^a, 0 < a < 1\}$, где

$$\mathcal{F}^a(n) = \begin{cases} g^n(a), & n > 0, \\ a, & n = 0, \\ G^{|n|}(a), & n < 0. \end{cases}$$

а g^n, G^n означает n-ую итерацию g или G соответственно. Ясно, что семейство инвариантных распределений образует непрерывную однопараметрическую кривую (можно сказать, "спираль") в пространстве распределений $\mathcal{M}(\mathbb{R}^1)$, причем соответствующими сдвигами эту кривую можно превратить в замкнутый цикл, т.е. $\mathcal{F}^{g(a)}(\cdot - 1) = \mathcal{F}^a(\cdot)$ для любого $0 < a < 1$.

Теперь мы изучим предельное поведение $F_n(x)$ при $n \to \infty$. Сперва рассмотрим случай фиксированного x. Верно следующее утверждение.

Предложение 3. *Для любого $x \in \mathbb{Z}$ верно* $\lim_{n\to\infty} F_n(x) = 1$.

Доказательство. Индукцией по x из (11) выводим, что последовательность $F_n(x)$ не убывает по n при каждом фиксированном x. Следовательно предел $F(x) := \lim_n F_n(x)$ существует и удовлетворяет уравнению (12). Заметим, что $F(x) = 1$ при $x \leqslant 0$, а из (12) следует, что $F(x-1) = 1$ влечёт $F(x) = 1$. Поэтому $F(x) = 1$ при всех $x \in \mathbb{Z}$. $\square$

Стоит отметить, что первый нетривиальный случай, $x = 1$, отвечает поведению $\mathbf{P}(M_n < n)$, то есть вероятности вырождения критического ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона. То, что такой процесс п.н. вырождается, известно из классических работ Р. Фишера и А. Н. Колмогорова.

Из предложения 3 следует, что величины M'_n сходятся к бесконечности по вероятности.

Теперь мы переходим к основному результату – циклической предельной теореме. Покажем, что при больших n распределение F_n может быть приближено подходящим инвариантным распределением.

Теорема 4. *Для каждого n определим медиану k_n соотношением*

$$k_n = \inf\{x \in \mathbb{Z} : F_n(x) \leqslant 1/2\}.$$

Пусть $a_n = G^{k_n}(F_n(k_n))$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathbb{Z}} |F_n(x) - \mathcal{F}^{a_n}(x)| = 0.$$

Поскольку движение последовательности F_n вдоль предельной спирали $(\mathcal{F}^a)_{0<a<1}$ происходит с замедлением, то естественно предположить, что все точки спирали являются предельными точками F_n при подходящих нормировках типа сдвига (в частности, никакие сдвиги не могут превратить F_n в последовательность, сходящуюся к невырожденному распределению). Точная формулировка приведена в следующей теореме.

Теорема 5. *Для любого $a \in (0,1)$ найдутся такое $z \in \mathbb{Z}$ и такая стремящаяся к бесконечности последовательность n_k, что*

$$\lim_{k\to\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}^a(x) - F_{n_k}(x+k-z)| = 0.$$

Доказательство теоремы 4. Во-первых, заметим, что второе утверждение предложения 2 может быть переписано в виде

$$\lim_{n\to\infty} \Delta_n := \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}(M'_{n+1} - M'_n) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} [F_{n+1}(k) - F_n(k)] = 0. \quad (13)$$

Другой необходимый факт – это тождество

$$F_n(x) = g(F_n(x-1) - \delta) - \delta, \quad (14)$$

где $\delta = \delta(n,x) := F_{n+1}(x) - F_n(x) \in [0, \Delta_n]$.

Действительно, (11) можно записать в виде

$$F_n(x) + \delta = \left(\frac{F_n(x) + \delta + F_n(x-1) - \delta}{2} \right)^2.$$

Учитывая, что функция g удовлетворяет тождеству $g(y) = \left(\frac{g(y)+y}{2}\right)^2$, мы и приходим к (14). Заметим на будущее, что из (14) следуют полезные неравенства

$$F_n(x) \leqslant g(F_n(x-1)), \quad G(F_n(x)) \leqslant F_n(x-1). \quad (15)$$

Теперь приступим непосредственно к доказательству теоремы. Используя (14) и монотонность $g(\cdot)$, для любого целого $d \geqslant 0$ получим

$$\begin{aligned} F_n(k_n+d) &= g(F_n(k_n+d-1) - \delta) - \delta \\ &\leqslant g(F_n(k_n+d-1)) \leqslant \cdots \leqslant g^d(F_n(k_n)). \end{aligned}$$

Имеем также $\mathcal{F}^{a_n}(k_n+d) = g^d(\mathcal{F}^{a_n}(k_n)) = g^d(F_n(k_n))$. Для любого $\varepsilon > 0$ выберем такое натуральное D, что $g^D(\frac{1}{2}) \leqslant \varepsilon$. Тогда для любого

$d \geqslant D$, используя монотонность $g(\cdot)$ и неравенство $g(y) \leqslant y$, получим

$$\max\{F_n(k_n+d); \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)\} \leqslant g^d(F_n(k_n)) \leqslant g^d\Big(\frac{1}{2}\Big) \leqslant g^D\Big(\frac{1}{2}\Big) \leqslant \varepsilon.$$

Таким образом,

$$\max_{d \geqslant D} |F_n(k_n+d) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)| \leqslant \varepsilon. \tag{16}$$

Теперь по индукции покажем что для любого $d = 0, 1, \ldots, D$ верно

$$\lim_{n\to\infty} |F_n(k_n+d) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)| = 0. \tag{17}$$

Параметры a_n у нас выбраны так, чтобы получить

$$\mathcal{F}^{a_n}(k_n) = g^{k_n}(\mathcal{F}^{a_n}(0)) = g^{k_n}(a_n) = g^{k_n}G^{k_n}(F_n(k_n)) = F_n(k_n).$$

Поэтому при $d = 0$ левая часть (17) равна нулю, что образует базу индукции. Пусть для $d-1$ утверждение (17) доказано, тогда в силу (11) для d имеем

$$|F_n(k_n+d) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)| = |g(F_n(k_n+d-1)-\delta) - g(\mathcal{F}^{a_n}(k_n+d-1))| + \delta,$$

где $\delta := F_{n+1}(k_n+d) - F_n(k_n+d) \in [0, \Delta_n]$. Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} &|F_n(k_n+d) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)| \\ \leqslant\ &[|F_n(k_n+d-1) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d-1)| + \Delta_n] \max_{0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}} |g'(y)| + \Delta_n, \end{aligned}$$

Поскольку $\Delta_n \to 0$ в силу (13), и функция g' ограничена на $[0, \frac{1}{2}]$, получаем, что

$$\begin{aligned} &\limsup_{n\to\infty} |F_n(k_n+d) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)| \\ \leqslant\ &\lim_{n\to\infty} |F_n(k_n+d-1) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d-1)| \cdot \max_{0\leqslant y\leqslant\frac{1}{2}} |g'(y)| = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, (17) доказано. Комбинируя (16) и (17), получим

$$\lim_{n\to\infty} \max_{d\geqslant 0} |F_n(k_n+d) - \mathcal{F}^{a_n}(k_n+d)| = 0.$$

Отрицательные d рассматриваются аналогично с использованием функции G вместо g. □

Доказательство теоремы 5. Не ограничивая общности, можно считать, что $\frac{1}{2} \notin \{\mathcal{F}^a(x), x \in \mathbb{Z}\}$. Тогда найдётся такое $z \in \mathbb{Z}$, что

$$\mathcal{F}^a(z-1) > \frac{1}{2} > \mathcal{F}^a(z).$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем $\delta \in (0, \min\{a, 1-a\})$ настолько малым, чтобы из $b \in (a-\delta, a+\delta)$ следовало

$$\max_{x\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}^b(x) - \mathcal{F}^a(x)| < \varepsilon.$$

Потребуем также выполнения неравенств

$$\mathcal{F}^{a-\delta}(z-1) > \frac{1}{2} > \mathcal{F}^{a+\delta}(z). \tag{18}$$

Выберем такое натуральное n_0, что при всех $n \geqslant n_0$ верно $\Delta_n < \mathcal{F}^{a+\delta}(z) - \mathcal{F}^{a-\delta}(z)$. Пусть теперь k настолько велико, что $F_{n_0}(k) < \mathcal{F}^{a-\delta}(z)$. Рассмотрим последовательность $f_n := F_n(k)$, $n \geqslant n_0$ при фиксированном k. В силу предложения 3 она возрастает к единице. Поскольку $f_{n_0} < \mathcal{F}^{a-\delta}(z)$ и при всех $n \geqslant n_0$ верно

$$f_{n+1} - f_n = F_{n+1}(k) - F_n(k) \leqslant \Delta_n \leqslant \mathcal{F}^{a+\delta}(z) - \mathcal{F}^{a-\delta}(z),$$

то найдётся $n := n_k$, для которого выполнено

$$F_n(k) = f_n \in (\mathcal{F}^{a-\delta}(z), \mathcal{F}^{a+\delta}(z)).$$

При этом k является медианой для F_n, так как в силу (18), (15)

$$F_n(k) \leqslant \mathcal{F}^{a+\delta}(z) < \frac{1}{2};$$

$$F_n(k-1) \geqslant G(F_n(k)) \geqslant G(\mathcal{F}^{a-\delta}(z)) = \mathcal{F}^{a-\delta}(z-1) > \frac{1}{2}.$$

Следовательно, аппроксимирующее распределение $\mathcal{F}^{a_n}$ из теоремы 4 при некотором $b \in (a-\delta, a+\delta)$ удовлетворяет равенствам

$$\mathcal{F}^{a_n}(k) = F_n(k) = \mathcal{F}^b(z).$$

Остается воспользоваться таким фактом: если $\mathcal{F}^a(u) = \mathcal{F}^b(v)$ для некоторых $a, b \in (0,1)$ и некоторых $x, y \in \mathbb{Z}$, то при всех $x \in \mathbb{Z}$ верно

$$\mathcal{F}^a(x+u-v) = \mathcal{F}^b(x).$$

В нашем случае будет $\mathcal{F}^{a_n}(x+k-z) = \mathcal{F}^b(x)$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\max_{x\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}^a(x) - F_n(x+k-z)| \\ \leqslant\ &\max_{x\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}^a(x) - \mathcal{F}^b(x)| + \max_{x\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}^b(x) - F_n(x+k-z)| \\ \leqslant\ &\varepsilon + \max_{x\in\mathbb{Z}} |\mathcal{F}^{a_n}(x+k-z) - F_n(x+k-z)|. \end{aligned}$$

Поскольку ε произвольно, а второе слагаемое стремится к нулю по теореме 4, то мы получаем утверждение теоремы 5. $\square$

Одной из причин отсутствия единственного предельного распределения является, как видно из теоремы 1, решётчатость распределения Бернулли. Другой, менее очевидной и, возможно, более глубокой причиной является невыполнение (8). Действительно, в иерархической схеме суммирования p-бернуллиевских величин имеем

$$\begin{aligned}\gamma\,\Psi'(\gamma)-\Psi(\gamma) &= \gamma\,\frac{pe^{\gamma}-(1-p)e^{-\gamma}}{pe^{\gamma}+(1-p)e^{-\gamma}}-\ln 2-\ln\left(pe^{\gamma}+(1-p)e^{-\gamma}\right)\\ &= -\ln(2p)-\frac{2(1-p)\gamma}{pe^{2\gamma}}(1+o(1))\end{aligned}$$

и

$$\lim_{\gamma\to\infty}[\gamma\Psi'(\gamma)-\Psi(\gamma)]=-\ln(2p).$$

Поэтому условие (8) выполнено в точности при $p<\frac{1}{2}$.

Древовидная структура схемы суммирования к спиралевидному поведению распределений максимумов отношения не имеет: аналогичный результат можно найти в ситуации с обычным суммированием (см. раздел 3 ниже).

Замечание. Теорему 4 можно также вывести из теоремы 1 работы Брамсона [5]. Преимущества его результата в том, что рассмотрен более общий механизм ветвления и аппроксимация производится п.н., а не по распределению. Однако теорема 4 даёт более ясную геометрическую картину происходящего.

2.2. Предельная теорема для случая $p>1/2$. Сохраним обозначения и предположения о случайных величинах из предыдущего раздела, но предположим теперь, что

$$\mathbf{P}(B_i=1)=1-\mathbf{P}(B_i=-1)=p>1/2.$$

Положим $q:=1-p$. Рекуррентное уравнение теперь имеет вид

$$M'_{n+1}=\min\left\{M_n'^{(1)}+\widetilde{B}^{(1)};M_n'^{(2)}+\widetilde{B}^{(2)}\right\}, \tag{19}$$

где $M_n'^{(j)}$ и $\widetilde{B}^{(j)}$ – независимые копии M'_n и величины $\widetilde{B}$, для которой

$$\mathbf{P}(\widetilde{B}=1)=1-\mathbf{P}(\widetilde{B}=0)=q.$$

В терминах хвостов распределений $F_n(x):=\mathbf{P}(M'_n\geqslant x)$ мы получаем уравнение, аналогичное (11), а именно,

$$F_{n+1}(x)=\left[F_n(x)p+F_n(x-1)q\right]^2. \tag{20}$$

Большая разница с предыдущим случаем состоит в том, что существует *единственное* инвариантное невырожденное решение, удовлетворяющее уравнению

$$F(x) = [F(x)p + F(x-1)q]^2 \tag{21}$$

и начальному условию $F(x) = 1, x \leqslant 0$. А именно,

$$F(x) = (2p^2)^{-1} \left[1 - 2F(x-1)pq - \sqrt{1 - 4F(x-1)pq}\right], \quad x > 0.$$

Поэтому неудивительно, что в этом случае верна предельная теорема.

Теорема 6. *Для любого $x \in \mathbb{Z}$ имеется монотонная, равномерная по x сходимость $F_n(x) \nearrow F(x)$.*

Доказательство. Сначала индукцией по x из (20) выводим, что последовательность $F_n(x)$ не убывает по n при каждом фиксированном x. Следовательно предел $F(x) := \lim_n F_n(x)$ существует и удовлетворяет уравнению (21). Остаётся показать, что он не вырожден (отличен от тождественной единицы). Для этого достаточно заметить, что

$$F_n(1) = \mathbf{P}(M_n' \geqslant 1) = \mathbf{P}(n - M_n \geqslant 2) = \mathbf{P}(M_n \leqslant n-2)$$

совпадает с вероятностью вырождения *надкритического* ветвящегося процесса Гальтона–Ватсона с числом потомков N, определяемым по формуле

$$\mathbf{P}(N = k) = \begin{cases} q^2, & k = 0, \\ 2pq, & k = 1, \\ p^2, & k = 2. \end{cases}$$

Поэтому $1 - F(1)$ совпадает с вероятностью выживания процесса, которая при $p > \frac{1}{2}$ строго положительна. □

2.3. Некоторые результаты для случая $p < 1/2$. В части предельных теорем для этого случая известно не больше, чем для иерархической схемы суммирования независимых величин общего вида с конечными экспоненциальными моментами. При $p = \mathbf{P}(B = 1) < 1/2$ уравнение (21) не имеет нетривиальных решений, так что поведение максимумов совершенно иное, чем в предыдущих случаях – появляется снос с постоянной скоростью. Если вычесть этот линейный снос, то распределения M_n образуют плотное семейство с экспоненциально убывающими хвостами.

Напомним, что семейство случайных величин (X_n) называется *сдвиг-компактным*, если существует такая вещественная последовательность (a_n), что распределения случайных величин $X_n - a_n$ образуют плотное семейство на прямой, т.е.

$$\lim_{K\to\infty} \sup_n \mathbf{P}\{|X_n - a_n| > K\} = 0.$$

Предложение 7. *Пусть $p < 1/2$. Тогда последовательность случайных величин M_n является сдвиг-компактной, причём*

$$\mathbf{E}M_n \sim \rho n, \quad n \to \infty,$$

где коэффициент сноса ρ определяется из уравнения

$$2p^\rho q^{1-\rho} = \rho^\rho (1-\rho)^{1-\rho}. \tag{22}$$

Доказательство. Результат следует, например, из теоремы 1.1 работы [7]. Стоит заметить, что уравнение для сноса (22) по существу является частным случаем уравнения редукции к критическому случаю (7). □

§3. Циклические теоремы для максимумов независимых сумм

Пусть $(\xi_i)_{i\in\mathbb{N}}$ – *целые* н.о.р. случайные величины. Рассмотрим сумму $S_n := \sum_{i=1}^n \xi_i$, и пусть $S_n^{(j)}$, $1 \leqslant j \leqslant 2^n$, – независимые копии S_n. Нас интересует поведение величин $M_n := \max_{j\leqslant 2^n} S_n^{(j)}$.

Относительно распределений исходных случайных величин мы будем предполагать, что

$$\mathbf{E}|\xi_1| < \infty \quad \text{и} \quad \mathbf{E}\exp\{\gamma\xi_1\} < \infty,\ \forall\gamma > 0. \tag{23}$$

Пусть ω – верхняя граница распределения,

$$\omega := \sup\{m \in \mathbb{N} : \mathbf{P}(\xi_1 = m) > 0\}.$$

Предположим, что выполнено одно из двух следующих условий: либо

(i) $\omega = \infty$,

либо

(ii) $\omega < \infty$ и $\mathbf{P}(\xi_1 = \omega) < 1/2$.

Поскольку кумулянта

$$L(\gamma) := \ln \mathbf{E} \exp\{\gamma\xi_1\}$$

выпукла как функция от γ, то функция $L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)$ – убывающая. Кроме, того, она непрерывна и равна нулю при $\gamma = 0$. Если выполнено (23) и одно из условий (i) или (ii), то нетрудно показать, что

$$\lim_{\gamma\to+\infty}[L(\gamma) - \gamma L'(\gamma)] < \ln(1/2).$$

Поэтому решение уравнения

$$L(\gamma) - \gamma L'(\gamma) = \ln(1/2) \tag{24}$$

на $(0, +\infty)$ существует. Обозначим его γ_* и положим $\rho_* := L'(\gamma_*)$. Заметим ещё, что при выполнении любого из условий (i) или (ii) распределение с.в. ξ_i невырождено (не сосредоточено в одной точке), а следовательно решение уравнения (24) единственно.

Теорема 8. *Предположим, что выполнено условие* (23) *и одно из условий* (i) *или* (ii). *Пусть* ρ_*, γ_* *определены уравнением* (24). *Тогда*

$$\mathbf{P}\left\{M_n < \rho_* n - \frac{\ln n}{2\gamma_*} + z\right\} = \exp\left\{-\frac{\exp\{-\gamma_* z\}(1+o(1))}{\sqrt{2\pi}\sigma(\gamma_*)(1-e^{-\gamma_*})}\right\}, \tag{25}$$

где $\sigma(\cdot)^2 = L''(\cdot)$, *равномерно по*[1]

$$z \in I \bigcap \left[\mathbb{Z} - \rho_* n + \frac{\ln n}{2\gamma_*}\right]$$

для любого ограниченного интервала I.

Формулу (25) можно переписать в виде

$$\mathbf{P}\{M_n < m\} = \exp\{-\exp\{-\gamma_*(m - a_n)\}(1+o(1))\}, \quad m \in \mathbb{Z}, \tag{26}$$

где

$$a_n := \rho_* n - \frac{\ln[\sqrt{2\pi n}\sigma(\gamma_*)(1-e^{-\gamma_*})]}{\gamma_*}.$$

Для каждого $a \in \mathbb{R}$ определим $\mathcal{F}^a$ – распределение на множестве целых чисел, задаваемое соотношением

$$\mathcal{F}^a((m, +\infty)) = \exp\{-\exp\{-\gamma_*(m - a)\}\}, \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Тогда $(\mathcal{F}^a)_{a\in\mathbb{R}}$ – кривая в пространстве распределений. Её естественно воспринимать как спираль, поскольку имеется 1-периодичность

[1] Иными словами, мы рассматриваем такие z, что выражение в левой части является целым числом.

с точностью до сдвига: $\mathcal{F}^{a+1}\{m+1\} = \mathcal{F}^{a}\{m\}$. Соотношение (26) показывает, что распределение с.в. M_n равномерно аппроксимируется элементом $\mathcal{F}^{a_n}$ этой спирали, а после подходящего центрирования оно аппроксимируется элементом $\mathcal{F}^{[a_n]}$ витка спирали $(\mathcal{F}^a)_{0\leqslant a<1}$. При этом любое распределение вида $(\mathcal{F}^a)_{0\leqslant a<1}$ является пределом некоторой подпоследовательности центрированных распределений M_n.

Доказательство теоремы 8, которое предполагается опубликовать отдельно, основано на одной теореме В. В. Петрова о больших уклонениях [13, дополнение 2 в §4 гл. VIII].

В качестве примера рассмотрим бернуллиевский случай. Пусть $\xi_i = B_i$ – независимые случайные величины с несимметричным распределением Бернулли, т.е.

$$\mathbf{P}(B_i = 1) = 1 - \mathbf{P}(B_i = -1) = p < 1/2 \ .$$

Положим $q = 1 - p$ и определим коэффициент сноса ρ_* уравнением (22). Нам также потребуются две дополнительные константы $\kappa := \frac{p(1-\rho_*)}{q\rho_*} \in (0,1)$ и $\beta := 2\pi\rho_*(1-\rho_*)$. Тогда результат теоремы 8 примет следующий вид.

Теорема 9. *Верно представление*

$$\mathbf{P}\left\{M_n < \rho_* n - \frac{\ln(\beta n)}{2|\ln\kappa|} + z\right\} = \exp\left\{-\frac{\kappa^z}{1-\kappa}\,(1+o(1))\right\}, \tag{27}$$

равномерно по

$$z \in I \bigcap \left[\mathbb{Z} - \rho_* n + \frac{\ln(\beta n)}{2|\ln\kappa|}\right]$$

для любого ограниченного интервала I.

Замечание. При $p \geqslant \frac{1}{2}$ ни одно из условий (i), (ii) не выполнено. Уравнение (24) не имеет решений, так что теорема 8 неприменима.

Автор глубоко признателен Z. Shi и И. Курковой за интересные обсуждения, предоставленные литературные ссылки, и, главное, за мотивацию к написанию этой заметки.

Литература

1. L. Addario-Berry, B. Reed, *Minima in branching random walks.* — Ann. Probab. **37** (2009), 1044–1079.
2. E. Aïdékon, *Convergence in law of the minimum of a branching random walk.* — Ann. Probab. (to appear). Preprint `arxiv: 1101.1810` (2011).

3. M. Bachmann, *Limit theorems for the minimal position in a branching random walk with independent logconcave displacements.* — Adv. Appl. Probab. **32** (2010), 159–176.
4. A. Bovier, I. Kurkova, *Derrida's generalized random energy models. I.: models with finitely many hierarchies.* — Ann. Inst. H. Poincaré **40** (2004), 439–480.
5. M. Bramson, *Minimal displacement of branching random walk.* — Z. Wahrsch. Theor. **45** (1978), 89–108.
6. M. Bramson, *Convergence of solutions of the Kolmogorov equation to travelling waves.* — Mem. Amer. Math. Soc. **44** (1983), No 285.
7. M. Bramson, O. Zeitouni, *Tightness for a family of recursive equations.* — Ann. Probab. **37** (2009), 615–653.
8. W. Feller, *An Introduction to Probability Theory and Its Applications.* Vol. I, 2nd ed., Wiley, New York, 1957.
9. J. M. Hammersley, *Postulates for subadditive processes.* — Ann. Probab. **2** (1974), 652–680.
10. Y. Hu, Z. Shi, *Minimal position and critical martingale convergence in branching random walks, and directed polimers on disordered trees.* — Ann. Probab. **37** (2009), 742–789.
11. S. P. Lalley, T. Selke, *A conditional limit theorem for the frontier of the branching Brownian motion.* — Ann. Probab. **15** (1983), 1052–1061.
12. S. P. Lalley, T. Selke, *Limit theorems for the frontier of a one-dimensional branching motion.* — Ann. Probab. **20** (1992), 1310–1340.
13. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.

Lifshits M. A. Cyclic behavior of maxima in a hierarchical summation scheme.

Let i.i.d. symmetric Bernoulli random variables be associated to the edges of a binary tree having n levels. To any leaf of the tree, we associate the sum of variables along the path connecting the leaf with the tree root. Let M_n denote the maximum of all such sums. We prove that, as n grows, the distributions of M_n approach some helix in the space of distributions. Each element of this helix is an accumulation point for the shifts of distributions of M_n.

С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр. 28, Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: lifts@mail.rcom.ru

Поступило 15 октября 2012 г.