Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

И. А. Ибрагимов

О ТЕОРЕМЕ ГУРЬЕ–ОЛКИНА–ЗИНГЕРА

§1. Постановка задачи и основной результат

Если ξ и η – независимые случайные величины, то, как отметил С. Н. Бернштейн [1], из независимости величин $\xi+\eta$ и $\xi-\eta$ следует, что величины ξ и η имеют нормальное распределение.

Этот результат С. Н. Бернштейна нашел глубокое обобщение в работах В. П. Скитовича [2, 3] и Г. Дармуа [4], доказавших следующий результат.

Теорема 1 (В. П. Скитович, Г. Дармуа). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – независимые случайные величины, а вещественные числа $a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n$ отличны от нуля. Рассмотрим две линейные формы*

$$L_1 = \sum_1^n a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^n b_j \xi_j.$$

Если формы L_1 и L_2 суть независимые случайные величины, то величины ξ_j имеют нормальное распределение.

В монографии [7] Ю. В. Линник поставил задачу о распространении теоремы Скитовича–Дармуа на формы

$$L_1 = \sum_1^\infty a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty b_j \xi_j$$

от счетного числа случайных величин ξ_i и наметил путь решения этой задачи. Заметим, что в силу независимости слагаемых, сходимость рядов L_i с вероятностью 1, по вероятности или сходимость распределений их частных сумм эквивалентны (см, напр., [13, гл. III, §2]).

Ключевые слова: теорема Скитовича–Дармуа, характеризационные теоремы, характеристические функции.

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ, грант 11-01-00577-а, “Ведущие научные школы”, грант НШ-1216.2012.1, и Программы фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Поэтому ниже мы всегда предполагаем, что ряды L_i сходятся с вероятностью 1. Намеченная Ю. В. Линником программа была осуществлена последовательно в работах Л. В. Мамай [9] и Б. Рамачандрана, см. [10]. В частности, Б. Рамачандран доказал следующую теорему.

Теорема 2 (Б. Рамачандран). *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые случайные величины, а вещественные числа $a_1, \dots, a_n, \dots,\ b_1, \dots, b_n, \dots$ отличны от нуля. Рассмотрим две линейные формы*

$$L_1 = \sum_1^\infty a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty b_j \xi_j.$$

Если формы L_1 и L_2 суть независимые случайные величины, а обе последовательности $\{|a_i b_i^{-1}|\}, \{|a_i^{-1} b_i|\}$ ограничены, то величины ξ_j имеют нормальное распределение.

В работе [11] автор настоящей статьи следующим образом ослабил последнее условие.

Теорема 3. *Пусть $\xi_1, \xi_2, \dots$ – независимые случайные величины, а вещественные числа $a_1, \dots, a_n, \dots,\ b_1, \dots, b_n, \dots$ отличны от нуля. Рассмотрим две линейные формы*

$$L_1 = \sum_1^\infty a_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty b_j \xi_j.$$

Если формы L_1 и L_2 суть независимые случайные величины, и хотя бы одна из последовательностей $\{|a_i b_i^{-1}|\}, \{|a_i^{-1} b_i|\}$ ограничена, то величины ξ_j имеют нормальное распределение.

Другое обобщение теоремы Дармуа–Скитовича принадлежит С. Гурье и И. Олкину [5]. Эти авторы рассмотрели линейные формы

$$L_1 = \sum_1^n A_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^n B_j \xi_j$$

d-мерных случайных векторов ξ_j с обратимыми матричными коэффициентами A_j, B_j и доказали, что независимость случайных векторов L_1, L_2 влечет нормальность распределений всех векторов ξ_j.

В монографии А. М. Кагана, Ю. В. Линника, С. Р. Рао [6] поставлена задача “распространить теорему Гурье–Олкина на счетное число случайных величин” (см. [6, гл. 14]). Эта задача была решена А. А. Зингером [12], доказавшим следующий многомерный вариант теоремы Рамачандрана.

Теорема 4 (А. А. Зингер). *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *– последовательность независимых случайных* d*-мерных векторов. Определим линейные формы* L_1, L_2 *равенствами*

$$L_1 = \sum_1^\infty A_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty B_j \xi_j, \tag{1}$$

где A_j, B_j *– вещественные неособенные квадратные матрицы. Если линейные статистики* L_1, L_2 *независимы, а обе матричные последовательности* $\{A_j B_j^{-1}\}$, $\{B_j A_j^{-1}\}$ *ограничены, то все случайные векторы* ξ_j *нормально распределены.*

Говоря об ограниченности матричной последовательности $\{C_j\}$, мы имеем в виду ограниченность относительно какой-нибудь фиксированной нормы. Для определенности положим $\|C\| = \sup_{|t|=1}(Ct, t)$. Здесь и ниже $|\cdot|, (\cdot, \cdot)$ означают евклидову норму и скалярное произведение в соответствующем евклидовом пространстве. Таким образом, в теореме речь идет об ограниченности двух числовых последовательностей $\{\|A_i B_i^{-1}\|\}$, $\{\|B_i A_i^{-1}\|\}$.

Заметим, что теорему Зингера можно рассматривать как обобщение теоремы Рамачандрана на случай векторных величин. Ниже мы предлагаем такое усиление теоремы Зингера, которое можно рассматривать как многомерное обобщение теоремы 3.

Теорема 5. *Пусть* $\xi_1, \xi_2, \dots$ *– последовательность независимых случайных* d*-мерных векторов. Определим линейные формы* L_1, L_2 *равенствами*

$$L_1 = \sum_1^\infty A_j \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty B_j \xi_j, \tag{2}$$

где A_j, B_j *– вещественные неособенные квадратные матрицы, удовлетворяющие следующим двум условиям:*

1. *хотя бы одна из последовательностей* $\{A_j B_j^{-1}\}$, $\{A_j^{-1} B_j\}$ *ограничена;*

2. *если* $\{C_j\}$ *– это ограниченная последовательность, о которой идет речь в предыдущем условии* 1, *то числовая последовательность*

$$\|C_j\| \cdot \|C_j^{-1}\| = \|A_j B_j^{-1}\| \, \|B_j A_j^{-1}\|, \quad j = 1, 2, \dots$$

ограничена,

$$\sup_j \|C_j\| \, \|C_j^{-1}\| = M < \infty.$$

Тогда если линейные формы L_1, L_2 независимы, то все случайные векторы ξ_j имеют нормальное распределение.

Относительно круга вопросов связанных независимостью линейных статистик см. монографии А. М. Кагана, Ю. В. Линника, С. Р. Рао [6], Ю. В. Линника [7], Б. Рамачандрана [10].

§2. Вспомогательные результаты

Если $f(t)$ – характеристическая функция случайного d-мерного вектора ξ, будем говорить что $f(t)$ аналитична в области G d-мерного комплексного пространства $\mathbb{C}^d$, если она допускает аналитическое продолжение в область G.

Лемма 1. *Пусть ξ – случайный d-мерный вектор с характеристической функцией $f(t)$. Тогда*

1. *величина $|\xi|$ имеет конечные моменты порядка $2k$, где $k > 0$ – целое, в том и только том случае, если $f(t)$ непрерывно дифференцируема $2k$ раз;*
2. *величина $|\xi|$ имеет степенные моменты всех порядков в том и только том случае, если $f(t)$ бесконечно дифференцируема;*
3. *величина $|\xi|$ имеет экспоненциальные моменты $\mathbf{E}\exp\{r|\xi|\}$ порядка r, $r < \tau$, в том и только том случае, если характеристическая функция $f(t)$ аналитична в области $\{t : |t| < \tau\}$;*
4. *величина ξ имеет экспоненциальные моменты всех порядков в том и только том случае, если $f(t)$ – целая аналитическая функция t.*

Доказательство леммы 1 в размерности 1 можно найти, например, в [7, 8], переход к более высоким размерностям не вызывает дополнительных трудностей (см. также [14, §2, гл. 1]).

Лемма 2. *Пусть ξ, η – симметричные независимые случайные величины. Тогда*

$$\mathbf{E}|\xi|^p \leqslant 4\mathbf{E}|\xi+\eta|^p, \quad \mathbf{E}|\eta|^p \leqslant 4\mathbf{E}|\xi+\eta|^p, \quad p > 0; \tag{3}$$

$$\mathbf{E}e^{|\xi|} \leqslant 4\mathbf{E}e^{|\xi+\eta|}, \quad \mathbf{E}e^{|\eta|} \leqslant 4\mathbf{E}e^{|\xi+\eta|}. \tag{4}$$

Доказательство. Если ξ – случайная величина, а A – случайное событие, положим $\mathbf{E}\{\xi; A\} = \int\limits_A \xi d\mathbf{P}$. Имеем

$$\mathbf{E}|\xi+\eta|^p \geqslant \mathbf{E}\big\{|\xi+\eta|^p; \{\xi \geqslant 0\}\{\eta \geqslant 0\}\big\} > \frac{1}{2}\mathbf{E}\big\{\xi^p; \{\xi \geqslant 0\}\big\} = \frac{1}{4}\mathbf{E}|\xi|^p.$$

Аналогично

$$\mathbf{E}\{e^{|\xi+\eta|}\} \geqslant \mathbf{E}\{e^{|\xi+\eta|}; \{\xi \geqslant 0\}\{\eta \geqslant 0\}\} \geqslant \frac{1}{4}\mathbf{E}e^{\xi}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $f_1(t)$, $f_2(t)$ – характеристические функции двух случайных векторов. Пусть $f(t) = f_1(t)f_2(t)$. Если функция $f(t)$ имеет непрерывные частные производные порядка $2k$ раз, то и функции $f_1(t)$, $f_2(t)$ имеют непрерывные частные производные порядка $2k$. Если $f(t)$ – целая аналитическая функция, то и $f_1(t)$, $f_2(t)$ – целые функции.*

Лемма 3 есть очевидное следствие лемм 1 и 2.

Лемма 4 (теорема Г. Крамера). *Пусть ξ, η – независимые случайные векторы. Если их сумма $\xi + \eta$ имеет нормальное распределение, то оба слагаемых ξ, η тоже имеют нормальное распределение.*

Лемма 5 (теорема И. Марцинкевича). *Если характеристическая функция $f(t)$ некоторого вероятностного распределения в $\mathbb{R}^d$ имеет вид $f(t) = e^{P(t)}$, где $P(t)$ – полином, то $P(t)$ полином не выше второй степени и, значит, $f(t)$ – характеристическая функция нормального распределения.*

Доказательство лемм 4, 5 для случая $d = 1$ можно найти в [7, 8]. Результаты для $d > 1$ легко следуют из одномерных результатов.

Действительно, если вектор $\xi + \eta$ имеет нормальное распределение, то для любого вектора t из $\mathbb{R}^d$ сумма независимых случайных величин (ξ, t), (η, t) имеет нормальное распределение. Из одномерного варианта теоремы Крамера следует, что при всех t величины (ξ, t) имеют нормальное распределение. Но это и означает, что вектор ξ имеет нормальное распределение. Тем самым, лемма 4 доказана для всех d.

Далее, для любого фиксированного вектора t из $\mathbb{R}^d$ характеристическая функция случайной величины $\langle \xi, t \rangle$

$$\phi(\tau) = f(\tau t) = \exp\{P(\tau t)\} = \exp\{Q(\tau)\}, \quad \tau \in \mathbb{R}^1,$$

где Q – многочлен. По теореме Марцинкевича для $d = 1$, величины (ξ, t) имеют нормальное распределение. Тем самым, и вектор ξ имеет нормальное распределение.

В заключение отметим еще, что характеристические функции вероятностных распределений обладают свойством хребтовости. Именно, если $f(t) = f(\sigma + i\tau)$ – характеристическая функция аналитическая в области $\{t : |\Im t_j| = \tau_j < r_j,\ j = 1, \dots, d\}$, то в этой области

$$|f(t)| = |f(\sigma + i\tau)| \leqslant |f(i\tau)| = |f(i\Im t)|. \tag{5}$$

Относительно хребтовых функций см. [7, 8].

Условимся ниже посредством c с индексами или без обозначать константы, т.е. количества не зависящие от параметров, участвующих в рассуждении. Одна и та же буква c может означать разные константы.

§3. Доказательство теоремы

3.1. Без потери общности можно считать, что

$$L_1 = \sum_1^\infty \xi_j, \quad L_2 = \sum_1^\infty A_j \xi_j,$$

матричная последовательность $\{A_j\}$ ограничена, $\sup_j \|A_j\| < \infty$, и матрицы A_j удовлетворяют условию 2 теоремы 5:

$$\sup_j \|A_j\| \cdot \|A_j^{-1}\| = M < \infty.$$

Обозначим $f_j(t)$ характеристическую функцию случайного вектора ξ_j. Если $l_i(t)$ – характеристические функции случайных векторов L_i, то

$$l_1(t) = \prod_1^\infty f_j(t), \quad l_2(s) = \prod_1^\infty f_j(A_j^* s).$$

В силу сходимости рядов, определяющих L_i, бесконечные произведения l_i сходятся *равномерно* на компактных подмножествах t, s; равномерно на таких множествах сходятся и ряды $\sum\limits_1^\infty |f_j(t)-1|$, $\sum\limits_1^\infty |f_j(A_j^* s)-1|$ (см, напр., [13, гл. III, §2]), в [13] рассмотрен случай сходящихся рядов $\sum \xi_j$ независимых случайных величин, но результаты и доказательства остаются в силе и для векторных величин ξ_j.

Независимость форм L_1, L_2 влечет равенство

$$\mathbf{E} e^{i(t, L_1) + i(s, L_2)} = \mathbf{E} e^{i(t, L_1)} \mathbf{E} e^{i(s, L_2)},$$

откуда в свою очередь следует основное для дальнейшего уравнение

$$\prod_1^\infty f_j(t) \cdot \prod_1^\infty f_j(A_j^* s) = \prod_1^\infty f_j(t + A_j^* s). \tag{6}$$

Ясно, что если $f_j(t)$ удовлетворяют основному уравнению (6), то симметричные характеристические функции $g_j(t) = f_j(t)f_j(-t) = |f_j(t)|^2$ удовлетворяют такому же уравнению. Если удастся доказать, что все $g_j(t)$ суть характеристические функции нормального закона, то из теоремы Крамера, леммы 4, будет следовать, что все $f_j(t)$ тоже суть характеристические функции нормального закона. Поэтому мы можем и будем предполагать, что ξ_j – симметричные случайные векторы, т.е. ξ_j и $-\xi_j$ одинаково распределены, а функции $f_j(t)$ вещественны, $f_j(t) \geqslant 0, f_j(t) = f_j(-t)$.

3.2. Докажем, что все решения основного уравнения суть гладкие строго положительные функции.

Лемма 6. *Все решения* $f_j(t)$ *основного уравнения* (6) *строго положительны,* $f_j(t) > 0$.

Доказательство. В окрестности нуля характеристическая функция $l_1(t) = \prod\limits_1^\infty f_j(t)$ положительна. Пусть t_0 – какой-нибудь корень непрерывной функции $l_1(t)$ с минимальным модулем. В силу равномерной сходимости произведения $\prod f_j(t)$, t_0 есть корень какой-нибудь функции $f_k(t)$. Для всех t с $|t| < t_0$ мы имеем $\prod\limits_1^\infty f_j(t) > 0$. В силу ограниченности последовательности $\{A_j\}$ для всех малых s, скажем, $|s| < \varepsilon$, все $f_j(A_j^* s) > \frac{1}{2} > 0$. Поэтому $\prod\limits_1^\infty f_j(t) \prod\limits_1^\infty f_j(A_j^* s) > 0$ для $|t| < t_0$, $|s| < \varepsilon$. В то же время найдутся такое $t_1, |t_1| < |t_0|$, и такое s_1, $|s_1| < \varepsilon$, для которых $t_1 + A_k^* s_1 = t_0$, так что в силу основного уравнения (6)

$$\prod_1^\infty f_j(t_1) \prod_1^\infty f(A_j^* s_1) = \prod_1^\infty f_j(t_1 + A_j^* s_1) = 0.$$

Полученное противоречие доказывает лемму. □

Положим $\psi_j(t) = \ln f_j(t)$. Это – непрерывные отрицательные во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, кроме нуля, функции (мы полагаем $\ln f_j(0) = 0$). Основное уравнение (6) можно теперь записать в форме

$$\sum_1^\infty \psi_j(t) + \sum_1^\infty \psi_j(A_j^* s) = \sum_1^\infty \psi_j(t + A_j^* s). \tag{7}$$

Ряды в (7) сходятся равномерно по (t, s) на компактах.

Лемма 7. *Все решения $f_j(t)$ основного уравнения* (6) *дифференцируемы бесконечное число раз. Случайные векторы ξ_j имеют моменты всех порядков. В частности,*

$$\mathbf{E}|L_2|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{E}|A_j^*\xi|^2 = -\sum_{j=1}^{\infty} \left[\Delta f_j(A_j^* s)\right]_{s=0} < \infty, \tag{8}$$

где Δ – оператор Лапласа.

Доказательство. Умножим обе части основного уравнения (7) на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $h(t)$, $\int\limits_{\mathbb{R}^d} h(t)\,dt = 1$, и проинтегрируем по t. В силу равномерной сходимости рядов в (7)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} \sum_1^{\infty} \psi_j(t)h(t)dt + \sum_1^{\infty} \psi_j(A_j^* s) = \sum_1^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^d} \psi_j(t)h(t - A_j^* s)dt.$$

Слагаемые в правой части – бесконечно дифференцируемые функции s, причем ввиду ограниченности последовательности $\{A_j\}$ продифференцированные ряды равномерно сходятся. Таким образом, ряд $\sum\limits_1^{\infty} \psi_j(A_j^* s)$ представляет собой бесконечно дифференцируемую функцию s. Но тогда все производные имеет и характеристическая функция $l_2(s) = \prod\limits_1^{\infty} f_j(A_j^* s)$. В силу лемм 1–3 случайные величины L_2, ξ_j, $j = 1, 2, \dots$, имеют моменты всех порядков, и все характеристические функции $f_j(t)$ бесконечно дифференцируемы.

Из бесконечной дифференцируемости суммы $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s)$ следует, что $\sum_j A_j\xi_j$ имеет ограниченные моменты всех порядков, а потому (лемма 2) для любого p векторы $A_j\xi_j$ имеют конечные моменты $\mathbf{E}|A_j\xi_j|^p$, равномерно ограниченные по j. Следовательно, ряд $\sum\limits_j A_j\xi_j$ сходится во всех L_p-нормах и, в частности,

$$\mathbf{E}\Big|\sum_j A_j\xi_j\Big|^2 = \sum_j \mathbf{E}|A_j\xi_j|^2 < \infty. \tag{9}$$

Лемма доказана. □

3.3. Пусть $\Delta = \sum\limits_1^d \frac{\partial^2}{\partial s_j^2}$ – оператор Лапласа по s. Мы докажем в этом пункте, что $\Delta\Big(\sum\limits_{j=1}^\infty \psi_j(A^*s)\Big)$ – полином. Будем ниже для матрицы $A_j^*A_j$ использовать также обозначение $A_j^*A_j = D_j = \|d_{kl}^{(j)}\|$. Обозначим L_j дифференциальные операторы

$$L_j = (A_j^*A_j\nabla, \nabla) = \sum_{k,l=1}^d dc_{kl}^{(j)} \frac{\partial^2}{\partial x_k \partial x_l}.$$

Лемма 8. *Имеет место равенство*

$$\Delta\Bigg(\sum_{j=1}^\infty \psi_j(A_j^*s)\Bigg) = \sum_{j=1}^\infty \big[L_j\psi_j\big](t + A_j^*s). \tag{10}$$

Доказательство. Если $f(s)$ – характеристическая функция случайного d-мерного вектора ξ с $\mathbf{E}|\xi|^2 < \infty$, то для любого множества $G \subseteq \mathbb{R}^d$

$$\sup_{s\in G}\left|\frac{\partial^2}{\partial s_k \partial s_l} \ln f(s)\right| \leqslant \sup_{s\in G}\left\{\frac{|f_{kl}''(s)|}{|f(s)|} + \frac{|f_k'(s)f_l'(s)|}{|f(s)|^2}\right\} \leqslant \mathbf{E}|\xi|^2 \sup_{s\in G}|f(s)|^{-2}.$$

Поэтому, на основании (8), ряды (7) можно почленно дважды дифференцировать по s. В частности,

$$\Delta\Bigg(\sum_{j=1}^\infty \psi_j(A_j^*s)\Bigg) = \sum_{j=1}^\infty \Delta\big(\psi_j(t + A_j^*s)\big).$$

Непосредственно проверяется, что

$$\Delta\big(\psi_j(t + A_j^*s)\big) = \big[L_j\psi_j\big](t + A_j^*s).$$

Лемма доказана. □

Лемма 9. *Имеют место неравенства:*

$$\left|\int\limits_{|t|\leqslant R} \sum_{j=1}^\infty \operatorname{tr}(D_j)\psi_j(t + A_j^*s)\,dt\right| \leqslant c(R^\gamma + |s|^\gamma), \tag{11}$$

где γ – некоторое положительное число;

$$\left|\Delta\Bigg(\sum_{j=1}^\infty \psi_j(A_j^*s)\Bigg)\right| \leqslant c\big(|s|^\gamma + 1\big); \tag{12}$$

$$\left|\int\limits_{|t|=R}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l,k=1}^{d} d_{l,k}^{(j)}\frac{\partial\psi_j}{\partial t_k}(t+A_j^*s)\cos(\nu,t_l)\,d\sigma\right| \leqslant c(|s|^{\gamma}+1)R^{\gamma}, \qquad (13)$$

где ν – внешняя нормаль к сфере $\{t:|t|=R\}$;

$$\left|\int\limits_{|t|=R}\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{l,k=1}^{d} d_{l,k}^{(j)}\psi_j(t+A_j^*s)\,t_k\cos(\nu,t_l)d\sigma\right| \leqslant c(|s|^{\gamma}+1)R^{\gamma}. \qquad (14)$$

Доказательство. 1. Пусть $g(x)$ – дважды дифференцируемая функция вещественного переменного $x\in\mathbb{R}^1$. Определим функцию $h(t)$, $t\in\mathbb{R}^d$, равенствами: $h(t))=g(|t|^2)$, если $|t|\leqslant R$, $h(t)=0$, если $|t|>R$. Для $|t|\leqslant R$

$$L_jh(t)=2g'(|t|^2)\mathrm{tr}\,((D_j)+4g''(|t|^2))(D_jt,t).$$

Умножим обе части равенства (10) на $h(t)$, проинтегрируем по t и применим к интегралам $\int\limits_{\mathbb{R}^d}L_j\psi_j(t+A_j^*s)h(t)dt$ формулу Грина (см., например, [16]). Мы получим

$$\int\limits_{|t|\leqslant R}\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(t+A_j^*s)\big(2g'(|t|^2)\mathrm{tr}\,(A_jA_j^*)+4g''(|t|^2)\big(\big|A_jt\big|^2\big)\,dt$$

$$+\int\limits_{|t|=R}\left\{\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k,l=1}^{d}d_{k,l}^{(j)}\left(g(|t|^2)\frac{\partial\psi_j(t+A_j^*s)}{\partial t_k}-\psi_j(t+A_j^*s)t_kg'(|t|^2)\right)\cos(\nu,t_l)\right\}d\sigma$$

$$=\Delta\left(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\right)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}^d}h(t)\,dt. \qquad (15)$$

2. Положим в равенстве (15) $g(x)=(R^2-x)^k$. Здесь k – достаточно большое целое число, окончательным выбором которого мы распорядимся позднее. Положим в (15) $s=0$. Мы придем к равенству

$$2k\int\limits_{|t|\leqslant R}\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(t)(R^2-|t|^2)^{k-2}\big(2(k-1)(D_jt,t)-(R^2-|t|^2)\mathrm{tr}\,(D_j)\big)\,dt$$

$$=\Delta\left(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\right)\Bigg|_{s=0}\cdot\int\limits_{|t|\leqslant R}(R^2-|t|^2)^k\,dt.$$

Из последнего соотношения следует,что

$$\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{|t|\leqslant R}(-\psi_j(t+A_j^*s))(R^2-|t)^2)^{k-2} \times\left(2(k-1)\|A_j\|^2\|A_j^{-1}\|^2\frac{\operatorname{tr}D_j}{d}|t|^2-\operatorname{tr}\,D_jR^2\right)\,dt\leqslant c_kR^{2k+d}.$$

Полагая здесь $\Psi(t)=-\sum\limits_{j=1}^{\infty}\operatorname{tr}D_j\psi_j(t)$, получим, с учетом условия 2 теоремы 5, что

$$\int\limits_{|t|\leqslant R}\Psi(t)(R^2-|t|^2)^{k-2}\left(\frac{2(k-1)}{dM^2}-|t|^2\right)dt\leqslant c_kR^{2k+d}. \tag{16}$$

Подынтегральная функция в последнем соотношении обращается в нуль на сфере $\{t:|t|=\theta R\}$, $\theta=M\sqrt{\frac{d}{2k-2}}$. Выбирая k достаточно большим, мы можем сделать θ как угодно малым. Ниже мы считаем k выбранным так, что $\theta<1/8$.

Из (16) следует, что

$$-R^{2k-2}\int\limits_{|t|\leqslant\theta R}\Psi(t)dt+\int\limits_{|t|>\sqrt{\theta}R}\Psi(t)\big(R^2-|t|^2\big)^{k-2}\cdot\left(\frac{|t|^2}{\theta^2}-R^2\right)dt$$

$$\leqslant-R^{2k-2}\int\limits_{|t|\leqslant\theta R}\Psi(t)dt+R^2\left(\frac{1}{\theta}-1\right)\int\limits_{|t|>\sqrt{\theta}R}\Psi(t)(R^2-|t|^2)^{k-2}dt<c_kR^{2k+d}.$$

Пусть $\mu>1$, $\mu\sqrt{\theta}<1$. Из последнего неравенства следует тогда, что

$$-R^{2k-2}\int\limits_{|t|\leqslant\theta R}\Psi(t)dt+R^{2k-2}(\theta^{-1}-1)(1-\mu^2\theta)^{2k-2} \times\int\limits_{\mu\sqrt{\theta}R>|t|>\sqrt{\theta}R}\Psi(t)dt<c_kR^{2k+d}. \tag{17}$$

Положим $H(R)=\int\limits_{|t|<R}\Psi(t)dt$. Это – монотонно возрастающая функция R. Из (17) следует, что

$$(1-\theta^{-1})(1-\mu^2\theta)\big(H(\mu\sqrt{\theta}R)-H(\sqrt{\theta}R)\big)-H(\theta R)<c_kR^{2+d}.$$

Выберем здесь $\mu = 2$. Мы найдем тогда, что

$$(1-\theta^{-1})(1-\mu^2\theta)H(2\sqrt{\theta}R) < \big[(1-\theta^{-1})(1-\mu^2\theta)+1\big]H(\sqrt{\theta}R) < R^{d+2}.$$

Из последнего соотношения следует, что функция H удовлетворяет неравенству

$$H(2T) \leqslant aH(T) + bT^{d+2}.$$

Отсюда уже несложно вывести, что

$$H(T) = -\int\limits_{|t|\leqslant T} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{tr}(A_jA_j^*)\psi_j(t)dt \leqslant cT^{\gamma}. \tag{18}$$

Последовательность $\{\|A_j\|\}$ ограничена и $\sup_j \|A_j\| < \infty$. Функции $\psi_j(t) < 0$. Поэтому из (18) следует, что для некоторого $r > 0$

$$\int\limits_{|t|\leqslant R} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{tr}(A_jA_j^*)|\psi_j(t+A_j^*s)|\,dt \leqslant \int\limits_{|t|\leqslant R+r|s|} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{tr}(A_jA_j^*)|\psi_j(t)|\,dt$$

$$\leqslant c(R+r|s|)^{\gamma} \leqslant c2^{\gamma-1}(R^{\gamma}+r^{\gamma}|s|^{\gamma}).$$

Неравенство (11) доказано.

3. Докажем неравенство (12). Положим в (15) $g(x) = (x-1)^2$, $R = 1$. Из (15) следует, что

$$4\int\limits_{|t|\leqslant 1} \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t+A_j^*s)\big(2|A_j^*t|^2 - (1-|t|^2)\operatorname{tr}(A_jA_j^*)\big)\,dt$$

$$= \Delta\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\bigg)\int\limits_{|t|\leqslant 1}(1-|t|^2)\,dt = c_d\Delta\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\bigg).$$

Левая часть последнего неравенства не превзойдет

$$3\int\limits_{|t|\leqslant 1} \sum_{j=1}^{\infty} \operatorname{tr}(A_jA_j^*)|\psi_j(t+A_j^*s)|\,dt,$$

так что на основании (11)

$$\bigg|\Delta\bigg(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\bigg)\bigg| \leqslant c(1+|s|^{\gamma}).$$

Неравенство (12) доказано.

4. Докажем неравенства (13) и (14). Положим в (15) $g(x) \equiv 1$. Из (15) следует с учетом (12), что

$$\Big| \int\limits_{|t|=R} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l,k=1}^{d} d_{l,k}^{(j)} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_k}(t + A_j^* s) \cos(\nu, t_l) d\sigma \Big|$$

$$= \Delta\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s)\Big) \mathrm{Vol}\,\{t : |t| \leqslant R\} \leqslant c(1 + |s|^{\gamma}) R^d.$$

Неравенство (13) доказано.

Положим теперь в (15) $g(x) = R^2 - x$. Мы получим, что

$$-2 \int\limits_{|t|\leqslant R} \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\,(A_j A_j^*) \psi_j(t + A_j^* s)\, dt$$

$$+ \int\limits_{|t|=R} \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{l,k=1}^{d} d_{l,k}^{(j)} \frac{\partial \psi_j}{\partial t_k}(t + A_j^* s) \cos(\nu, t_l) d\sigma = c_d \Delta\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s)\Big) R^{d+2}.$$

Отсюда и из неравенств (11), (12) следует неравенство (14). Лемма доказана. □

Лемма 10. *Функция* $p(s) = \Delta\big(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s)\big)$ *– полином.*

Доказательство. Докажем сперва, что $p(s)$ аналитически продолжается во все комплексное пространство $\mathbb{C}^d$ до целой аналитической функции. Положим в равенстве (15) $g(x) = g_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^d}{(2\pi)^{d/2}} e^{-\frac{\varepsilon^2 x}{2}}$, $\varepsilon > 0$. Из неравенств леммы 9 следует, что

$$\frac{\varepsilon^d}{(2\pi)^{d/2}} \int\limits_{|t|\leqslant R} \Big\{ 2\varepsilon^2 \sum_{j=1}^{\infty} \mathrm{tr}\,(A_j A_j^*) \psi_j(t + A_j^* s)\, dt$$

$$+4\varepsilon^4 \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(t + A_j^* s) |A_j t|^2 e^{-\frac{|\varepsilon t|^2}{2}} \Big\} dt + O(R^{\gamma} e^{-R^2/4}) = \Delta\Big(\sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s)\Big).$$

Неравенство (11) позволяет перейти в последнем равенстве к пределу, когда $R \to \infty$, так что

$$\Delta\biggl(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\biggr) = \frac{\varepsilon^d}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\biggl\{2\varepsilon^2\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{tr}\,(A_jA_j^*)\psi_j(t+A_j^*s) - 4\varepsilon^4\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(t+A_j^*s)|A_jt|^2\biggr\}e^{-\frac{\varepsilon^2|t|^2}{2}}\,dt$$

$$= \frac{\varepsilon^2}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{j=1}^{\infty}\mathrm{tr}\,(A_jA_j^*)\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi_j(t)\exp\{-\frac{\varepsilon^2}{2}|t-A_j^*s|^2\}\,dt$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{d/2}}\sum_{j=1}^{\infty}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi_j(t)\bigl(A_jA_j^*(t-A_j^*s),(t-A_j^*s)\bigr)\exp\Bigl\{-\frac{1}{2}|t-A_j^*s|^2\Bigr\}\,dt.$$

Функции

$$\exp\Bigl\{-\frac{\varepsilon^2}{2}|t-A_j^*s|^2\Bigr\} = \exp\Bigl\{-\frac{\varepsilon^2|t|^2}{2}-\frac{\varepsilon^2}{2}\sum_{k,l=1}^{d}d_{kl}^{(j)}s_ks_l+\varepsilon^2(t,A_j^*s)\Bigr\}$$

суть целые аналитические функции s. Целыми функциями s будут и функции

$$a_j(s) = 2\varepsilon^2\frac{\varepsilon^d\mathrm{tr}\,(A_jA_j^*)}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi_j(t)\exp\Bigl\{-\frac{\varepsilon^2}{2}|t-A_j^*s|^2\Bigr\}\,dt,$$

$$b_j(s)=4\varepsilon^4\frac{\varepsilon^d}{(2\pi)^{d/2}}\int\limits_{\mathbb{R}^d}\psi_j(t)\exp\Bigl\{-\frac{\varepsilon^2}{2}|t-A_j^*s|^2\Bigr\}(A_jA_j^*(t-A_j^*s),(t-A_j^*s))\,dt.$$

В силу ограниченности последовательности $\{\|A_j\|\}$ и неравенства (11) ряды $\sum_j a_j(s), \sum_j b_j(s)$ сходятся равномерно на компактных подмножествах $\mathbb{C}^d$ и, следовательно, являются целыми аналитическими функциями s. Таким образом, функция

$$p(s) = \Delta\biggl(\sum_{j=1}^{\infty}\psi_j(A_j^*s)\biggr) = \sum_{1}^{\infty}a_j(s)+\sum_{1}^{\infty}b_j(s), \quad s\in\mathbb{C}^d,$$

допускает продолжение до целой аналитической функции s.

Покажем теперь, что для $s \in \mathbb{C}^d$

$$|p(s)| \leqslant c(1+|s|)^{\gamma}. \tag{19}$$

Пусть $s = x + iy$, $x, y \in \mathbb{R}^d$. Тогда

$$|a_j(s)| \leqslant \frac{\varepsilon^d \mathrm{tr}\,(A_j A_j^*)}{(2\pi)^{d/2}} e^{\frac{\varepsilon^2 |t|^2}{2} |A_j^* y|^2} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^d} |\psi_j(t + A_j^* x)| e^{-\frac{\varepsilon^2 |t|^2}{2}}\, dt,$$

и из (11) легко следует в силу ограниченности $\sup\limits_j \|A_j\|$, что

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) \right| \leqslant c(|x|^2 + \varepsilon^{-2})^{\gamma/2} \cdot e^{c\varepsilon^2 |y|^2}.$$

Полагая здесь $\varepsilon = |y|^{-1}$, придем к неравенству

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} a_j(s) \right| \leqslant c(1 + |s|^{\gamma}).$$

Аналогично и

$$\left| \sum_{j=1}^{\infty} b_j(s) \right| \leqslant c(1 + |s|^{\gamma}).$$

Тем самым, неравенство (19) доказано. По теореме Лиувилля, из (19) следует, что $p(s)$ есть полином степени не выше γ.

Окончание доказательства. Функция $u(s) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s)$ удовлетворяет уравнению

$$\Delta(u(s)) = p(s), \tag{20}$$

где $p(s)$ – полином степени N. Непосредственно проверяется, что среди решений последнего уравнения есть полиномиальное решение степени не выше $N + 2$, скажем $q(s) = \sum\limits_{\nu} q_\nu s^\nu$. Для проверки достаточно подобрать коэффициенты q_ν, исходя из соотношений

$$\sum_{\nu} q_\nu \Delta(s^\nu) = p(s) = \sum_{\nu} p_\nu s^\nu.$$

Тогда

$$u(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \psi_j(A_j^* s) = q(s) + G(s), \tag{21}$$

где $G(s)$ – гармоническая функция. Функции $\psi_j(A_j^* s)$ отрицательны, так что $\max\limits_{|s|=R} G(s) \leqslant \max\limits_{|s|=R} q(s) \leqslant cR^{d+2}$. По теореме Лиувилля для гармонических функций, удовлетворяющая последнему неравенству гармоническая функция есть гармонический полином (см., например, [15, с. 53, примеры]).

Итак, мы показали, что характеристическая функция

$$l_2(s) = \exp\left\{ \sum_j \psi_j(A_j^* s) \right\} = e^{P(s)},$$

где $P(s) = q(s) + G(s)$ – полином. По теореме Марцинкевича (лемма 5) $l_2(s)$ – характеристическая функция нормального распределения, а тогда по теореме Крамера (лемма 4) и все $f_j(A_j^* s)$, а, значит, и все $f_j(t)$ суть характеристические функции нормальных распределений. Теорема доказана. □

Я признателен А. И. Назарову и Н. В. Смородиной за ряд полезных замечаний. В частности, А. И. Назарову принадлежит более удачная, чем авторская, формулировка основной теоремы.

Литература

1. С. Н. Бернштейн, *Об одном свойстве, характеризующем закон Гаусса.* — Труды Ленингр. политехн. ин-та **3** (1941), 21–22.
2. В. П. Скитович, *Об одном свойстве нормального распределения.* — Докл. АН СССР **89**, No. 2 (1953), 217–219.
3. В. П. Скитович, *Линейные формы от независимых случайных величин и нормальный закон распределения.* — Изв. АН СССР, сер. мат. **18**, No. 2 (1954), 185–200.
4. G. Darmois, *Analise général des liasons stochastiques.* — Rev. Inst. Intern. Stat. **21** (1953), 2–8.
5. S. Ghurye, I. Olkin, *A characterization of the multivariate normal distribution.* — Ann. Math. Statist. **33** (1962), No. 2, 533–541.
6. А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао, *Характеризационные задачи математической статистикию.* Наука, М., 1952.
7. Ю. В. Линник, *Разложение вероятностных законов.* Изд. ЛГУ, 1960.
8. Ю. В. Линник, И. В. Островский, *Разложения случайных величин и векторов.* Наука, М., 1972.
9. Л. В. Мамай, *К теории характеристических функций.* — Вестн. Ленингр. ун-та **1** (1960), 85–99.
10. Б. Рамачандран, *Теория характеристических функций.* Наука, М., 1975.

11. И. А. Ибрагимов, *О теореме Скитовича–Дармуа.* — Теория вероятн. и ее примен. **57**, вып. 3 (2012).
12. А. А. Зингер, *О характеризации многомерного нормального закона независимостью линейных статистик.* — Теория вероятн. и ее примен. **24**, вып. 2 (1979), 381–385.
13. Дж. Дуб, *Вероятностные процессы.* ИЛ, М., 1956.
14. И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Введение в теорию случайных процессов.* Наука, М., 1965.
15. У. Хейман, П. Кеннеди, *Субгармонические функции.* Мир, М., 1980.
16. С. Г. Михлин, *Линейные уравнения в частных производных.* Высшая школа, М., 1977.

Ibragimov I. A. On Ghurye–Olkin–Zinger theorem.

A generalization of Ghurye–Olkin–Zinger characterization theorem is proved.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
и Санкт-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28, Петродворец,
198504 Санкт-Петербург, Россия
E-mail: ibr32@pdmi.ru

Поступило 5 октября 2012 г.