Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

Д. Н. Запорожец, З. Каблучко

СЛУЧАЙНЫЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛИ, СМЕШАННЫЕ ОБЪЕМЫ ЭЛЛИПСОИДОВ И НУЛИ ГАУССОВСКИХ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

§1. Главные результаты

1.1. Случайный определитель и смешанный объем эллипсоидов. Рассмотрим независимые центрированные невырожденные гауссовские случайные векторы $\xi_1,\dots,\xi_k\in\mathbb{R}^d$, $k\leqslant d$, с ковариационными матрицами $\Sigma_1,\dots,\Sigma_k$ соответственно. Обозначим $\mathcal{E}_i$ эллипсоид рассеивания ξ_i:

$$\mathcal{E}_i=\{\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_d)^\top\in\mathbb{R}^d : \mathbf{x}^\top\Sigma_i^{-1}\mathbf{x}\leqslant 1\},\quad i=1,\dots,k. \tag{1}$$

Обозначим M матрицу размера $k\times d$, строками которой являются $\xi_1,\dots,\xi_k$.

Теорема. *Выполнено соотношение*

$$\mathbf{E}\sqrt{\det(MM^\top)}=\frac{(d)_k}{(2\pi)^{k/2}\kappa_{d-k}}V_d(\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_k,B,\dots,B), \tag{2}$$

где $V_d(\cdot,\dots,\cdot)$ обозначает смешанный объем d выпуклых тел в $\mathbb{R}^d$ (подробнее см.в п. 2), B – единичный шар в $\mathbb{R}^d$, $(d)_k=d(d-1)\cdot\dots\cdot(d-k+1)$ – символ Похгаммера и $\kappa_n=\pi^{n/2}/\Gamma(1+n/2)$ есть объем единичного шара в $\mathbb{R}^n$.

Левую часть (2) можно интерпретировать как средний объем k-мерного гауссовского случайного параллелотопа.

Следствие 1. *В случае $k=d$ выполнено*

$$\mathbf{E}\,|\det M|=\frac{d!}{(2\pi)^{d/2}}V_d(\mathcal{E}_1,\dots,\mathcal{E}_d).$$

Ключевые слова: гауссовский случайный определитель, матрица Уишарта, гауссовский случайный параллелотоп, смешанный объем эллипсоидов, эллипсоид рассеивания, нули гауссовских случайных полей, многогранники Ньютона, формула Каца–Райса.

Первый автор частично поддержан грантами РФФИ 10-01-00242, НШ-1216.2012.1, DFG (436 RUS 113/962/0-1 R).

В качестве другого прямого следствия мы получаем выражение для смешанного объема d произвольных эллипсоидов в $\mathbb{R}^d$.

Следствие 2. *Для произвольных эллипсоидов $\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_d$, заданных симметричными положительно определенными матрицами $\Sigma_1, ..., \Sigma_d$ так же, как и в* (1), *выполнено*

$$V_d(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_d) = \frac{1}{d!} \prod_{i=1}^{d} (\det \Sigma_i)^{-1/2} \times \int\limits_{\mathbb{R}^{d^2}} |\det(x_{ij})| \prod_{i=1}^{d} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathbf{x}_i^\top \Sigma_i^{-1} \mathbf{x}_i\right) dx_{11} \ldots dx_{dd},$$

где

$$\mathbf{x}_i = (x_{i1}, \ldots, x_{id})^\top.$$

Единственная оценка смешанного объема эллипсоидов, которая нам известна, принадлежит Барвинку [2]. Он показал, что

$$\frac{\kappa_d}{3^{(d-1)/2}} \sqrt{D_d(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_d)} \leqslant V_d(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_d) \leqslant \kappa_d \sqrt{D_d(\Sigma_1, \ldots, \Sigma_d)},$$

где $D_d(\cdot, \ldots, \cdot)$ обозначает смешанный дискриминант d симметричных матриц размера $d \times d$:

$$D_d(A_1, \ldots, A_d) = \frac{1}{d!} \frac{\partial^d}{\partial\lambda_1 \ldots \partial\lambda_d} \det(\lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_d A_d)\Big|_{\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0}.$$

Если $\xi_1, \ldots, \xi_k$ – независимые стандартные гауссовские векторы, то $MM^\top$ является матрицей Уишарта и (2) принимает вид (см. [5, 10])

$$\mathbf{E}\sqrt{\det(MM^\top)} = \frac{(d)_k \kappa_d}{(2\pi)^{k/2} \kappa_{d-k}}.$$

1.2. Внутренние объемы. Если $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k \in \mathbb{R}^d$, $k \leqslant d$, одинаково распределены с общей ковариационной марицей Σ и эллипсоидом рассеивания $\mathcal{E}$, то (2) принимает вид

$$\mathbf{E}\sqrt{\det(MM^\top)} = \frac{k!}{(2\pi)^{k/2}} V_k(\mathcal{E}), \tag{3}$$

где $V_k(\cdot)$ обозначает k-й *внутренний объем* выпуклого тела в $\mathbb{R}^d$:

$$V_k(K) = \frac{\binom{d}{k}}{\kappa_{d-k}} V_d(\underbrace{K, \ldots, K}_{k\ \text{раз}}, B, \ldots, B).$$

Нормализационная константа выбрана таким образом, чтобы внутренний объем $V_k(K)$ зависел только от K и не зависел от размерности объемлющего пространства. Другими словами, если $\dim K < d$, то вычисление $V_k(K)$ в $\mathbb{R}^d$ приводит к тому же результату, что и вычисление в аффинной оболочке K. В частности, если $\dim K = k$, то $V_k(K) = \mathrm{Vol}_k(K)$, k-мерный объем K.

Известно, что $V_1(K)$ пропорционален средней ширине K:

$$V_1(K) = \frac{d\kappa_d}{2\kappa_{d-1}} w(K).$$

Подставляя $k = 1$ в (3), мы получаем, что для произвольного центрированного гауссовского вектора ξ с эллипсоидом рассеивания $\mathcal{E}$ выполнено

$$\mathbf{E}\|\xi\| = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_1(\mathcal{E}). \tag{4}$$

Из личной беседы с М. А. Лифшицем авторам стало известно, что (4) является частным случаем следующего замечательного результата, принадлежащего Судакову.

1.3. Связь с результатом Судакова. Для наших целей будет достаточно следующей конечномерной версии теоремы Судакова. Результат в полной общности сформулирован в [9, предложение 14].

Предложение 1. *Для произвольного множества* $A \subset \mathbb{R}^d$ *выполнено*

$$\mathbf{E} \sup_{\mathbf{x}\in A} \langle \mathbf{x}, \eta \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_1(\mathrm{conv}(A)), \tag{5}$$

где η *является стандартным гауссовским вектором в* $\mathbb{R}^d$ *и* $\mathrm{conv}(A)$ *обозначает выпуклую оболочку* A.

Выведем (4) из (5). Рассмотрим матрицу U, такую что $\Sigma = U^{-1}(U^{-1})^\top$ и $U\xi$ является стандартным гауссовским вектором. Подставляя $A = \mathcal{E}$ и $\eta = U\xi$ в (5), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\|\xi\| = \mathbf{E} \sup_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \langle \mathbf{x}, \xi \rangle = \mathbf{E} \sup_{\|\mathbf{x}\|\leqslant 1} \langle (U^{-1})^\top \mathbf{x}, U\xi \rangle \\ = \mathbf{E} \sup_{\|U^\top \mathbf{x}\|\leqslant 1} \langle \mathbf{x}, U\xi \rangle = \mathbf{E} \sup_{\mathbf{x}\in\mathcal{E}} \langle \mathbf{x}, U\xi \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} V_1(\mathcal{E}).\end{aligned}$$

1.4. Нули гауссовских случайных полей. Рассмотрим случайное поле $X(\mathbf{t}) = (X_1(\mathbf{t}), \dots, X_k(\mathbf{t}))^\top : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$, $k \leqslant d$. Следуя Азаису и Вшебору [1], мы всегда предполагаем, что выполнены следующие условия:

(a) X гауссовское;
(b) функция $X(\cdot)$ почти наверное лежит в классе гладкости $\mathcal{C}^1$;
(c) при всех $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^d$ случайный вектор $X(\mathbf{t})$ имеет невырожденное распределение;
(d) почти наверное если $X(\mathbf{t}) = 0$, то $X'(\mathbf{t})$ (матрица Якоби $X(\mathbf{t})$) имеет полный ранг.

Тогда, почти наверное, множество уровня $X^{-1}(0)$ является $\mathcal{C}^1$-гладким многообразием размерности $d-k$, и для любого борелевского множества F мера Лебега $\mathrm{Vol}_{d-k}(X^{-1}(0) \cap F)$ корректно определена ($\mathrm{Vol}_0(\cdot)$ означает считающую меру).

В [1, с. 177] было показано, что

$$\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_{d-k}(X^{-1}(0) \cap F) = \int_F \mathbf{E}\left(\sqrt{\det\left(X'(\mathbf{t})X'(\mathbf{t})^\top\right)}\,\middle|\,X(\mathbf{t}) = 0\right) p_{X(\mathbf{t})}(0)\,d\mathbf{t}, \quad (6)$$

где $p_{X(\mathbf{t})}(\cdot)$ является плотностью распределения $X(\mathbf{t})$. Таким образом, подынтегральное выражение в (6) может быть интерпретировано как интенсивность нулей X.

В этой заметке мы рассматриваем частный случай, когда X центрировано и его координаты $X_1, \dots, X_k$ независимы. Обозначим $\mathcal{E}_i(\mathbf{t})$ эллипсоид рассеивания гауссовского вектора $\nabla[X_i(\mathbf{t})/\sqrt{\mathbf{D}X_i(\mathbf{t})}]$.

Теорема. *Пусть X является центрированным случайным полем с независимыми координатами, удовлетворяющим условиям* (a)–(d). *Тогда*

$$\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_{d-k}(X^{-1}(0) \cap F) = \frac{(d)_k}{(2\pi)^k \kappa_{d-k}} \int_F V_d(\mathcal{E}_1(\mathbf{t}), \dots, \mathcal{E}_k(\mathbf{t}), B, \dots, B)\,d\mathbf{t}. \quad (7)$$

Формула (7) связывает множества решений случайных уравнений со смешанными объемами. В случае $k = d$ она напоминает хорошо известную теорему Бернштейна о числе решений типичной системы алгебраических уравнений.

1.5. Теорема Бернштейна. Рассмотрим полином d комплексных переменных

$$f(z_1, \ldots, z_d) = \sum c_{j_1,\ldots,j_d} z_1^{j_1} \ldots z_d^{j_d}.$$

Многогранник Ньютона полинома f – это множество в $\mathbb{R}^d$, определенное следующим образом:

$$\mathrm{Nw}(f) = \mathrm{conv}\{(j_1, \ldots, j_d) \in \mathbb{Z}^d \, : \, c_{j_1,\ldots,j_d} \neq 0\}.$$

Пусть $K_1, \ldots, K_d$ являются компактными выпуклыми многогранниками в $\mathbb{R}^d$ с вершинами в $\mathbb{Z}^d$. Рассмотрим систему алгебраических уравнений

$$\begin{cases} f_1(z_1, \ldots, z_d) = 0, \\ \qquad\quad \ldots \\ f_d(z_1, \ldots, z_d) = 0, \end{cases}$$

такую что $\mathrm{Nw}(f_i) = K_i$. Д. Н. Бернштейн показал [3], что для почти всех таких систем (по отношению к мере Лебега в пространстве коэффициентов полиномов) число ненулевых решений равно

$$\mathrm{Vol}_0(f_1^{-1}(0) \cap \cdots \cap f_d^{-1}(0) \setminus \{\mathbf{0}\}) = d! V_d(K_1, \ldots, K_d).$$

§2. Необходимые сведения из геометрии

Для более подробного ознакомления с основами интегральной и выпуклой геометрии мы отсылаем читателя к [4] и [8].

2.1. Смешанные объемы. Рассмотрим произвольные выпуклые тела $K_1, \ldots, K_d \subset \mathbb{R}^d$. Минковский показал [7], что $\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_d K_d)$ при $\lambda_1, \ldots, \lambda_d \geqslant 0$ является однородным полиномом степени d с неотрицательными коэффициентами:

$$\mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_d K_d) = \sum_{i_1=1}^{d} \cdots \sum_{i_d=1}^{d} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_d} V_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}). \quad (8)$$

Коэффициенты $V_d(K_{i_1}, \ldots, K_{i_d})$ будут однозначно определены, если предположить, что они симметричны по отношению к перестановкам $K_{i_1}, \ldots, K_{i_d}$. Коэффициент $V_d(K_1, \ldots, K_d)$ называется смешанным объемом выпуклых тел $K_1, \ldots, K_d$. Другое определение смешанного объема можно получить путем дифференцирования (8):

$$V_d(K_1, \ldots, K_d) = \frac{1}{d!} \frac{\partial^d}{\partial \lambda_1 \ldots \partial \lambda_d} \mathrm{Vol}_d(\lambda_1 K_1 + \cdots + \lambda_d K_d)\big|_{\lambda_1 = \cdots = \lambda_d = 0}.$$

Для любого аффинного преобразования L выполнено

$$V_d(LK_1,\dots,LK_d) = |\det L|\cdot V_d(K_1,\dots,K_d). \tag{9}$$

Также верно следующее соотношение:

$$\int_{\mathbb{S}^{d-1}} V_{d-1}(P_{\mathbf{u}}K_1,\dots,P_{\mathbf{u}}K_{d-1})\,d\mathbf{u} = \frac{\kappa_{d-1}}{\kappa_d}V_d(K_1,\dots,K_{d-1},B), \tag{10}$$

где $d\mathbf{u}$ обозначает поверхностную меру на сфере $\mathbb{S}^{d-1}$, нормированную так, чтобы мера всей сферы была равна единице, а $P_{\mathbf{u}}$ обозначает ортогональную проекцию на линейную гиперплоскость $\mathbf{u}^{\perp}$.

2.2. Объем параллелотопов. Для произвольных $A \subset \mathbb{R}^d$ и $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$ обозначим $P_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k}A$ ортогональную проекцию A на $\mathrm{span}^{\perp}\{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k\}$ (ортогональное дополнение линейной оболочки векторов $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$). Обозначим $H_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k}$ параллелотоп, заданный векторами $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$. Известно, что

$$\mathrm{Vol}_k(H_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k}) = \sqrt{\det(AA^{\top})}, \tag{11}$$

где A – матрица, строками которой являются $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$.

Для произвольных $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^d$ и $k = 1,\dots,d-1$ выполнено

$$\mathrm{Vol}_d(H_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_d}) = \mathrm{Vol}_k(H_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k})\,\mathrm{Vol}_{d-k}(P_{\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k}H_{\mathbf{x}_{k+1},\dots,\mathbf{x}_d}). \tag{12}$$

2.3. Эллипсоиды. Существует биекция $A \mapsto \mathcal{E}$ между симметричными положительно определенными матрицами размера $d\times d$ и d-мерными невырожденными эллипсоидами с центрами в начале координат (подробнее см. в [6]):

$$\mathcal{E} = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^d : \mathbf{x}^{\top}A^{-1}\mathbf{x} \leqslant 1\}.$$

Любому невырожденному линейному преобразованию координат вида $\mathbf{x} \mapsto L\mathbf{x}$ соответствует замена соответствующей матрицы A на матрицу A_L вида

$$A_L = LAL^{\top}. \tag{13}$$

Пусть $\mathcal{E}'$ является ортогональной проекцией эллипсоида $\mathcal{E}$ на k-мерное подпространство с некоторым ортонормированным базисом $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k \in \mathbb{R}^d$. Обозначим A' матрицу размера $k\times k$, соответствующую эллипсоиду $\mathcal{E}'$ в этом базисе. Имеет место соотношение

$$A' = CAC^{\top}, \tag{14}$$

где C – матрица размера $k\times d$, строками которой являются $\mathbf{x}_1,\dots,\mathbf{x}_k$.

§3. Доказательства теорем

3.1. Доказательство теоремы 1.1. Случай $k = d$. Будем проводить доказательство индукцией по d. Сначала предположим, что ξ_d является стандартным гауссовским вектором. Обозначим χ_d случайную величину, имеющую χ-распределение с d степенями свободы и независимую от $\xi_1, \ldots, \xi_{d-1}$. Применяя (11) и (12) с $k = 1$, мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\det M| = \mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_d(H_{\xi_1,\ldots,\xi_d}) &= \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_d(H_{\xi_1,\ldots,\xi_{d-1},\chi_d\mathbf{u}})\,d\mathbf{u} \\ &= \mathbf{E}\chi_d \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_{d-1}(P_{\mathbf{u}}H_{\xi_1,\ldots,\xi_{d-1}})\,d\mathbf{u} \\ &= \frac{d\kappa_d}{\sqrt{2\pi}\kappa_{d-1}} \int\limits_{\mathbb{S}^{d-1}} \mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_{d-1}(H_{P_{\mathbf{u}}\xi_1,\ldots,P_{\mathbf{u}}\xi_{d-1}})\,d\mathbf{u}.\end{aligned}$$

Из (14) следует, что $P_{\mathbf{u}}\xi_i$ имеет эллипсоид рассеивания $P_{\mathbf{u}}\mathcal{E}_i$. По предположению индукции

$$\mathbf{E}\,\mathrm{Vol}_{d-1}(H_{P_{\mathbf{u}}\xi_1,\ldots,P_{\mathbf{u}}\xi_{d-1}}) = \frac{(d-1)!}{(2\pi)^{(d-1)/2}} V_{d-1}(P_{\mathbf{u}}\mathcal{E}_1, \ldots, P_{\mathbf{u}}\mathcal{E}_{d-1}).$$

Объединяя два последних соотношения с (10), мы получаем

$$\mathbf{E}\,|\det M| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{d-1}, B). \tag{15}$$

Если ξ_d является произвольным невырожденным гауссовским вектором, то существует линейное преобразование L, такое что $L\xi_d$ – стандартный гауссовский вектор. Из (13) следует, что $L\mathcal{E}_i$ является эллипсоидом рассеивания $L\xi_i$ и, в частности, $L\mathcal{E}_d = B$. Применяя (15) к матрице $LM^\top$ и используя (9), мы получаем

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\det M| = |\det L|^{-1}\,\mathbf{E}\,|\det LM^\top| \\ &= \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} |\det L|^{-1} V_d(L\mathcal{E}_1, \ldots, L\mathcal{E}_{d-1}, B) \\ &= \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \ldots, \mathcal{E}_{d-1}, \mathcal{E}_d).\end{aligned}$$

3.2. Доказательство теоремы 1.1. Случай $k < d$. Рассмотрим матрицу M' размера $d \times d$, первые k строк которой образуют матрицу M, а остальные $d-k$ строк являются независимыми стандартными гауссовскими векторами $\xi_{k+1}, \dots, \xi_d$ (независимыми от M). По предыдущему случаю мы имеем

$$\mathbf{E}\,|\det M'| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_k, B, \dots, B).$$

С другой стороны, из (12) следует

$$\begin{aligned}\mathbf{E}\,|\det M'| &= \mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_d(H_{\xi_1,\dots,\xi_d})\\ &= \mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_k(H_{\xi_1,\dots,\xi_k})\,\mathrm{Vol}_{d-k}(P_{\xi_1,\dots,\xi_k} H_{\xi_{k+1},\dots,\xi_d})\\ &= \mathbf{E}\sqrt{\det(MM^\top)}\,\mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_{d-k}(H_{\eta_1,\dots,\eta_{d-k}}),\end{aligned}$$

где $\eta_1, \dots, \eta_{d-k}$ – независимые стандартные гауссовские векторы в $\mathbb{R}^{d-k}$. Опять применяя предыдущий случай, получаем

$$\mathbf{E}\ \mathrm{Vol}_{d-k}(H_{\eta_1,\dots,\eta_{d-k}}) = \frac{(d-k)!}{(2\pi)^{(d-k)/2}} \kappa_{d-k}.$$

Для завершения доказательства осталось объединить полученные три соотношения.

3.3. Доказательство теоремы 1.4. Предположим сначала, что X_j имеет единичную дисперсию: $\mathbf{D}X_j(\mathbf{t}) \equiv 1$ при всех $j = 1, \dots, k$. Дифференцируя соотношение $\mathbf{E}X_j(\mathbf{t})X_j(\mathbf{t}) = 1$ по t_i, мы получаем

$$\mathbf{E}\frac{\partial X_j}{\partial t_i}(\mathbf{t})X_j(\mathbf{t}) = 0,$$

что вместе с независимостью координат X приводит к независимости $X'(\mathbf{t})$ и $X(\mathbf{t})$. Это означает, что условие $X(\mathbf{t}) = 0$ в (6) может быть опущено. Для завершения доказательства теоремы в случае $\mathbf{D}X_j(\mathbf{t}) \equiv 1$ осталось объединить (6) с (2).

Общий случай следует из того факта, что нули $X_j/\sqrt{\mathbf{D}X_j}$ совпадают с нулями X_j.

Благодарности. Авторы признательны М. А. Лифшицу за то, что он обратил их внимание на результат Судакова, а также А. И. Барвинку за полезную дискуссию.

Литература

1. J. M. Azaïs, M. Wschebor, *Level sets and extrema of random processes and fields.* Wiley, 2009.
2. A. Barvinok, *Computing mixed discriminants, mixed volumes, and permanents.* — Discrete Comput. Geom. **18**, No. 2 (1997), 205–237.
3. Д. Н. Бернштейн, *Число корней системы уравнений.* — Функц. анализ и его прил. **9**, No. 3 (1975), 183–185.
4. Ю. Д. Бураго, В. А. Залгаллер, *Геометрические неравенства.* Наука, 1980.
5. N. R. Goodman, *The distribution of the determinant of a complex Wishart distributed matrix.* — Ann. Math. Statist. **34**, No. 1 (1963), 178–180.
6. W. C. Karl, G. C. Verghese, A. S. Willsky, *Reconstructing ellipsoids from projections.* — CVGIP: Graphical Model and Image Processing **56**, No. 2 (1994), 124–139.
7. H. Minkowski, *Theorie der konvexen Körper, insbesondere Begründung ihres Oberflächenbegriffs.* — In: Gesammelte Abhandlungen **2** (1911), pp. 131–229.
8. R. Schneider, W. Weil, *Stochastic and Integral Geometry.* Springer–Verlag, 2008.
9. В. Н. Судаков, *Геометрические проблемы теории бесконечномерных вероятностных распределений.* — Труды МИАН **141** (1976), 3–191.
10. S. S. Wilks, *Moment-generating operators for determinants of product moments in samples from a normal system* — Ann. Math. **35**, No. 2 (1934), 312–340.

Zaporozhets D. N., Kabluchko Z. Random determinants, mixed volumes of ellipsoids, and zeros of Gaussian random fields.

Consider a $d \times d$ matrix M whose rows are independent centered non-degenerate Gaussian vectors $\xi_1, \dots, \xi_d$ with covariance matrices $\Sigma_1, \dots, \Sigma_d$. Denote by $\mathcal{E}_i$ the location-dispersion ellipsoid of ξ_i : $\mathcal{E}_i = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}^\top \Sigma_i^{-1} \mathbf{x} \leqslant 1\}$. We show that

$$\mathbb{E}\,|\det M| = \frac{d!}{(2\pi)^{d/2}} V_d(\mathcal{E}_1, \dots, \mathcal{E}_d),$$

where $V_d(\cdot, \dots, \cdot)$ denotes the *mixed volume*. We also generalize this result to the case of rectangular matrices. As a direct corollary we get an analytic expression for the mixed volume of d arbitrary ellipsoids in $\mathbb{R}^d$.

As another application, we consider a smooth centered non-degenerate Gaussian random field $X = (X_1, \dots, X_k)^\top : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^k$. Using the Kac–Rice formula, we obtain the geometric interpretation of the intensity of zeros of X in terms of the mixed volume of location-dispersion ellipsoids of the gradients of $X_i/\sqrt{\mathbf{Var} X_i}$. This relates the zero sets of equations to the

mixed volumes in a way which resembles the well-known Bernstein theorem on the number of solutions of a typical system of algebraic equations.

Санкт-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, 191023
Санкт-Петербург, Россия
E-mail: zap1979@gmail.com

Institute of Stochastics,
Ulm University, Helmholtzstr. 18,
89069 Ulm, Germany
E-mail: zakhar.kabluchko@uni-ulm.de

Поступило 10 октября 2012 г.