Записки научных
семинаров ПОМИ
Том 408, 2012 г.

А. Ю. Зайцев

ОБ АППРОКСИМАЦИИ СВЕРТОК СОПРОВОЖДАЮЩИМИ ЗАКОНАМИ В СХЕМЕ СЕРИЙ

В статье рассматривается вопрос об аппроксимации сверток сопровождающими законами для схемы серий сумм независимых случайных векторов, удовлетворяющей условию бесконечной малости слагаемых.

Введем необходимые обозначения. Будем обозначать E_a – распределение, сосредоточенное в точке $a \in \mathbf{R}^d$, $E = E_0$. Обобщенное распределение Пуассона определяется равенством

$$e\,(\lambda F) = e^{-\lambda} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{\lambda^s F^s}{s!}, \tag{1}$$

где $\lambda \geqslant 0$, а F – некоторое вероятностное распределение. Здесь и далее произведения и степени мер понимаются в смысле свертки. Расстояние Леви между одномерными распределениями F и G определяется равенством

$$L(F,G) = \inf\big\{\varepsilon : F(x-\varepsilon) - \varepsilon \leqslant G(x) \leqslant F(x+\varepsilon) + \varepsilon \text{ при всех } x \in \mathbf{R}\big\}, \tag{2}$$

где $F(\,\cdot\,)$ – функция распределения, соответствующая распределению F. Расстояние Леви–Прохорова между распределениями F и G в некотором полном сепарабельном метрическом пространстве определяется следующим образом:

$$\pi(F,G) = \inf\big\{\varepsilon : F\{X\} \leqslant G\{X^\varepsilon\} + \varepsilon \text{ и } G\{X\} \leqslant F\{X^\varepsilon\} + \varepsilon \text{ для всех борелевских множеств } X\big\}, \tag{3}$$

где X^ε – ε-окрестность множества X. Хорошо известно, что и расстояние Леви и расстояние Леви–Прохорова метризуют слабую сходимость вероятностных распределений.

Ключевые слова: схема серий, аппроксимация, сопровождающие законы, обобщенные распределения Пуассона, суммы независимых случайных векторов.

Работа поддержана грантами РФФИ 10-01-00242 и 11-01-12104, грантом НШ-1216.2012.01 и Программой фундаментальных исследований РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

Одной и той же буквой c мы будем обозначать положительные абсолютные постоянные, которые могут быть различными даже в пределах одной формулы. Запись $A \ll B$ означает, что $A \leqslant cB$. Если соответствующая константа зависит от размерности d, мы будем использовать обозначение $A \ll_d B$. В дальнейшем $\log^* b = \max\{1, \log b\}$, при $b > 0$.

Рассмотрим классическую схему серий сумм независимых случайных величин, удовлетворяющую условию бесконечной малости слагаемых (см. [1,3,7]). Пусть $\{X_{j,k}, j = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n_j\}$, – независимые случайные величины с распределениями $F_{j,k} = \mathcal{L}(X_{j,k})$. Обозначим

$$F_j = \prod_{k=1}^{n_j} F_{j,k}, \quad j = 1, 2, \ldots, \tag{4}$$

– распределения сумм $S_j = \sum_{k=1}^{n_j} X_{j,k}$. Условие бесконечной малости слагаемых обычно формулируется следующим образом:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n_j} \mathbf{P}\big\{\, |X_{j,k}| \geqslant \tau \big\} \to 0$$

при $j \to \infty$ для любого $\tau > 0$. При каждом фиксированном j распределения слагаемых $X_{j,k}$ связаны с распределениями слагаемых $X_{m,s}$ при других $m \neq j$ только через условие бесконечной малости. Если при выполнении этого условия последовательность распределений F_j слабо сходится к некоторому вероятностному распределению D ($F_j \Rightarrow D$ при $j \to \infty$), то, согласно теореме Хинчина, распределение D безгранично делимо. Условия сходимости к заданному безгранично делимому распределению D обычно (см., например, [3, 7]) формулируются как условия, которые эквивалентны сходимости к распределению D так называемых сопровождающих безгранично делимых законов

$$D_j = \prod_{k=1}^{n_j} \big(E_{a_{j,k}}\, e\big(F_{j,k}\, E_{-a_{j,k}}\big)\big). \tag{5}$$

Распределения D_j зависят от центрирующих постоянных $a_{j,k}$, которые определяются равенством

$$a_{j,k} = \int_{|x| \leqslant \tau} x\, F_{j,k}\{dx\}. \tag{6}$$

Постоянная величина τ, участвующая в определении (6), при этом не зависит от j и k является произвольной. При различных τ числа $a_{j,k}$, вообще говоря, различны и, тем самым, различны и распределения D_j.

Однако, если $F_j \Rightarrow D$, то и $D_j \Rightarrow D$ при $j \to \infty$, какова бы ни была величина τ. Казалось бы, отсюда следует, что распределения D_j можно считать хорошей безгранично делимой аппроксимацией для распределений F_j, если последние определены по схеме серий, удовлетворяющей условию бесконечной малости. Однако это не всегда так, по крайней мере, если точность аппроксимации оценивать в метрике Леви–Прохорова. В частности, это может быть не так, если последовательность распределений F_j не является относительно компактной (в топологии слабой сходимости). Обсуждению этого обстоятельства и посвящена данная статья.

Аппроксимация последовательностей распределений, не являющихся относительно компактными, в метрике Леви–Прохорова приобретает особый интерес в связи с недавним результатом Ю. А. Давыдова и В. И. Ротаря [2] о характеризации последовательностей распределений, сближающихся друг с другом в метрике Леви–Прохорова в терминах сближения интегралов от равномерно непрерывных ограниченных функций.

Прежде всего заметим, что условие бесконечной малости слагаемых может быть переформулировано следующим образом:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant n_j} L(F_{j,k}, E) = \varepsilon_j \to 0 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{7}$$

Такое условие близости распределения к вырожденному распределению было предложено А. Н. Колмогоровым [5, 6] при рассмотрении задачи о безгранично делимой аппроксимации сверток. Тесно связано с условием (7) условие представимости распределений $F_{j,k}$ в виде

$$F_{j,k} = (1 - p_{j,k}) U_{j,k} + p_{j,k} V_{j,k}, \tag{8}$$

где $0 \leqslant p_{j,k} \leqslant 1$, распределения $U_{j,k}$, $k = 1, \ldots, n_j$, сосредоточены на отрезках $[-\tau_j, \tau_j]$, $\tau_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots$, а $V_{j,k}$, $k = 1, \ldots, n_j$, – произвольные распределения, причем

$$\tau_j \to 0 \quad \text{и} \quad p_j = \max_{1 \leqslant k \leqslant n_j} p_{j,k} \to 0 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{9}$$

Такое условие близости распределения к вырожденному распределению было использовано И. А. Ибрагимовым и Э. Л. Пресманом [4] при рассмотрении упомянутой выше задачи А. Н. Колмогорова.

Оказалось, что естественной безгранично делимой аппроксимацией для распределений $F_j = \prod_{k=1}^{n_j} F_{j,k}$ при выполнении условий (8) и (9) являются распределения вида

$$G_j = \prod_{k=1}^{n_j} \bigl(E_{b_{j,k}}\, e\bigl(F_{j,k}\, E_{-b_{j,k}}\bigr)\bigr). \tag{10}$$

при

$$b_{j,k} = \int_{\mathbf{R}} x\, U_{j,k}\{dx\}. \tag{11}$$

Нетрудно видеть, что распределения (10) имеют вид (5), но с заменой $a_{j,k}$ на $b_{j,k}$. В работе [9] было показано, что при выполнении условий (8), (9) и (11)

$$L(F_j, G_j) \ll p_j + \tau_j\, \log^* \tau_j^{-1}. \tag{12}$$

и

$$\pi(F_j, G_j) \ll \sum_{k=1}^{n_j} p_{j,k}^2 + p_j + \tau_j\, \log^* \tau_j^{-1}. \tag{13}$$

Если же предположить дополнительно, что распределения $V_{j,k}$ одинаковы при всех $k = 1, \ldots, n_j$, то

$$\pi(F_j, G_j) \ll p_j + \tau_j\, \log^* \tau_j^{-1}. \tag{14}$$

Доказательства неравенств (12)–(14), их обсуждение и историю вопроса можно найти также в монографии [1]. Неравенство (12) дает оптимальное по порядку решение задачи А. Н. Колмогорова [5, 6] о безгранично делимой аппроксимации сверток распределений, удовлетворяющих условию (7). Неравенства (12)–(14) оптимальны по порядку зависимости правых частей от p_j и τ_j, причем в общем случае слагаемое $\sum p_{j,k}^2$ нельзя убрать из правой части неравенства (13). Более того, в общем случае правые части неравенств (12)–(14) не могут быть существенно уменьшены, если распределения G_j заменить на любые другие безгранично делимые распределения. Таким образом, неравенства (12)–(14) можно рассматривать как количественное уточнение классической теоремы Хинчина о том, что предельное распределение для распределений F_j, построенных по схеме серий независимых случайных величин, удовлетворяющих условию бесконечной малости слагаемых, обязано быть безгранично делимым, если, конечно, оно существует. Ведь если $F_j \Rightarrow D$, то, в силу (9) и (12), имеет место и слабая сходимость $G_j \Rightarrow D$ при $j \to \infty$. Наличие предельного распределения влечет относительную компактность последовательности распределений F_j. Распределение D безгранично делимо, как предел последовательно безгранично делимых распределений. В монографии [1] условия сходимости распределений F_j к заданному безгранично делимому распределению D при $j \to \infty$ сформулированы как условия, которые эквивалентны сходимости к распределению D сопровождающих безгранично делимых законов G_j при $b_{j,k}$, определенных равенством (11).

Так что если мы изучаем $F_j = \mathcal{L}(S_j)$ при фиксированном j и интересуемся разумной безгранично делимой аппроксимацией для распределений F_j, то при выполнении условий (8) и (9) ее дают распределения G_j вида (10) при $b_{j,k}$ из (11). В то же время, если $a_{j,k}$ определены равенством (6), распределения F_j и D_j могут быть не близки в метрике Леви–Прохорова.

Пример 1. Рассмотрим в качестве простейшего примера распределения

$$F_{j,k} = (1 - j^{-1})E + j^{-1}E_1, \quad k = 1, \ldots, n_j. \tag{15}$$

Так что условия (8) и (9) выполняются при

$$U_{j,k} = E, \quad V_{j,k} = E_1, \quad p_{j,k} = p_j = j^{-1}, \quad \tau_j = 0.$$

Тогда $b_{j,k} = 0$ и распределение F_j – это биномиальное распределение с параметрами $n = n_j$ и $p = p_j = j^{-1}$. Сопровождающее безгранично делимое распределение $G_j = e(n_j\, p_j\, E_1)$ представляет собой распределение Пуассона с параметром $n_j\, p_j$. Согласно результату Ю. В. Прохорова [8], расстояние по вариации между распределениями F_j и G_j оценивается сверху величиной $c\, p_j = c\, j^{-1}$ и стремится к нулю при $j \to \infty$.

Что же касается приближающего сопровождающего безгранично делимого распределения D_j, то, как было отмечено выше, оно зависит от выбора центрирующих постоянных $a_{j,k}$. Если величины $a_{j,k}$ выбираются по формуле (6) с $\tau \geqslant 1$, то $a_{j,k} = j^{-1}$, $k = 1, \ldots, n_j$, и

$$\begin{aligned} D_j &= \prod_{k=1}^{n_j} \bigl(E_{a_{j,k}}\, e\bigl(F_{j,k}\, E_{-a_{j,k}}\bigr)\bigr) \\ &= E_{n_j j^{-1}}\, e\bigl(n_j(1 - j^{-1})\, E_{-j^{-1}}\bigr)\, e\bigl(n_j j^{-1}\, E_{1-j^{-1}}\bigr). \end{aligned} \tag{16}$$

Обозначим

$$V_j = E_{n_j j^{-1}}\, e\bigl(n_j j^{-1}\, E_{1-j^{-1}}\bigr) \quad \text{и} \quad W_j = e\bigl(n_j(1 - j^{-1})\, E_{-j^{-1}}\bigr).$$

Тогда $D_j = V_j W_j$. Очевидно, что

$$\begin{aligned} D_j\{\mathbf{Z}^{1/8}\} &= \int_{\mathbf{R}} \Big(\int_{\mathbf{R}} \mathbf{1}\{x+y \in \mathbf{Z}^{1/8}\} W_j\{dx\}\Big) V_j\{dy\} \\ &\leqslant \sup_{x\in\mathbf{R}} W_j\{\mathbf{Z}^{1/8}+x\}. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь $\mathbf{1}\{\,\cdot\,\}$ – индикаторная функция, а $\mathbf{Z}^{1/8}$ означает $1/8$-окрестность множества всех целых чисел $\mathbf{Z}$. Множество $\mathbf{Z}^{1/8}$ состоит из вещественных чисел $y \in \mathbf{R}$, представимых в виде $y = z + t$, где $z \in \mathbf{Z}$, а $|t| < 1/8$.

Пусть U_λ – распределение Пуассона с параметром $\lambda > 0$, а ξ_λ – случайная величина с распределением U_λ. Тогда

$$\mathbf{P}\{\xi_\lambda = s\} = \frac{e^{-\lambda}\lambda^s}{s!}, \quad s = 0, 1, 2, \dots, \tag{18}$$

причем $\mathbf{E}\,\xi_\lambda = \mathbf{D}\,\xi_\lambda = \lambda$.

Для оценивания правой части (17) нам потребуется следующее элементарное свойство распределения Пуассона.

Лемма 1. *Существуют такие абсолютные положительные постоянные c_1 и c_2, что*

$$\sup_{x\in\mathbf{R}} \mathbf{P}\{\delta^{-1}\xi_\lambda \in \mathbf{Z}^{1/8}+x\} \leqslant 5/8, \quad \textit{если } \delta \geqslant c_1 \textit{ и } \lambda \geqslant c_2\,\delta^2. \tag{19}$$

Выбор постоянных $1/8$ и $5/8$ в утверждении леммы в достаточной степени произволен, важно, что это – некоторые абсолютные постоянные, причем $0 < 1/8 < 1/4$, а $5/8 < 1$.

Доказательство леммы 1. Пусть $x \in \mathbf{R}$. Множество

$$A_x = \delta\,(\mathbf{Z}^{1/8} + x)$$

представляет собой объединение открытых интервалов I_j длины $\delta/4$ с центрами в точках $\delta(j+x)$, $j \in \mathbf{Z}$. Поэтому

$$\mathbf{P}\{\xi_\lambda \in A_x\} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \mathbf{P}\{\xi_\lambda \in I_j\}. \tag{20}$$

Соответственно, множество $\mathbf{R}\setminus A_x$ состоит из замкнутых отрезков J_j длины $3\delta/4$, находящихся между интервалами, составляющими множество A_x, и

$$\mathbf{P}\{\xi_\lambda \in \mathbf{R}\setminus A_x\} = \sum_{j\in\mathbf{Z}} \mathbf{P}\{\xi_\lambda \in J_j\}. \tag{21}$$

Будем считать, что отрезки J_j занумерованы таким образом, что при любом j отрезок J_j располагается непосредственно за интервалом I_j, если двигаться по вещественной оси в направлении $+\infty$.

Очевидно, что

$$\mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda = s\bigr\} \geqslant \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda = s+1\bigr\}, \quad \text{если } s+1 \geqslant \lambda, \tag{22}$$

и

$$\mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda = s\bigr\} \geqslant \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda = s-1\bigr\}, \quad \text{если } \lambda \geqslant s. \tag{23}$$

Выбирая постоянную c_1 достаточно большой, можно обеспечить то, что количество целых точек в любом интервале I_j окажется меньше, чем количество целых точек в каждом из отрезков J_m, $m \in \mathbf{Z}$. Пусть I_k и I_{k+1} – два интервала I_j, расположенные ближе других к точке λ. Если второй и третий по близости к точке λ интервалы I_j находятся от нее на одинаковом расстоянии, для определенности берем тот из них, который расположен между λ и $+\infty$. Из (22)–(23) следует, что

$$\mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in I_j\bigr\} \leqslant \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in J_{j-1}\bigr\}, \quad \text{если } j \geqslant k+2, \tag{24}$$

$$\mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in I_j\bigr\} \leqslant \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in J_j\bigr\}, \quad \text{если } j \leqslant k-1. \tag{25}$$

Хорошо известно, что

$$\max_{k\in\mathbf{Z}} \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda = k\bigr\} \gg \lambda^{-1/2}, \quad \text{если } \lambda \geqslant 1. \tag{26}$$

Для доказательства неравенства (26) достаточно заметить, что

$$U_\lambda = U_{\lambda/n}^n \quad \text{для любого натурального } n$$

и воспользоваться неравенством Берри–Эссеена (см. [1,7]). Еще проще убедиться в справедливости (26), если применить к правой части (18) формулу Стирлинга с учетом (22)–(23).

Из (26) следует, что

$$\max_{j\in\mathbf{Z}} \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in I_j\bigr\} \leqslant c\,\delta\,\lambda^{-1/2} \leqslant 1/8, \tag{27}$$

если постоянная c_2 достаточно велика.

Подставляя неравенства (24)–(25) в равенство (20) и пользуясь соотношениями (21) и (27), получаем

$$\mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in A_x\bigr\} \leqslant 1/4 + \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in \mathbf{R}\setminus A_x\bigr\} = 5/4 - \mathbf{P}\bigl\{\xi_\lambda \in A_x\bigr\}. \tag{28}$$

Отсюда вытекает неравенство (19). $\square$

Вернемся к оцениванию правой части (17). Нетрудно видеть, что $W_j = \mathcal{L}(-\delta_j^{-1}\,\xi_{\lambda_j})$ при

$$\delta_j = j, \quad \lambda_j = n_j(1 - j^{-1}). \tag{29}$$

Выбирая $n_j \geqslant 2\,c_2\,j^2$, и применяя лемму 1 при $\delta = \delta_j$, $\lambda = \lambda_j$, получаем, что при $j \geqslant \max\bigl\{2, c_1\bigr\}$

$$\begin{aligned} \sup_{x\in\mathbf{R}} W_j\bigl\{\mathbf{Z}^{1/8} + x\bigr\} &= \sup_{x\in\mathbf{R}} \mathbf{P}\bigl\{-\delta_j^{-1}\,\xi_{\lambda_j} \in \mathbf{Z}^{1/8} + x\bigr\} \\ &= \sup_{x\in\mathbf{R}} \mathbf{P}\bigl\{\delta_j^{-1}\,\xi_{\lambda_j} \in \mathbf{Z}^{1/8} + x\bigr\} \leqslant 5/8. \end{aligned} \tag{30}$$

Из (17) и (30) следует, что

$$D_j\bigl\{\mathbf{Z}^{1/8}\bigr\} \leqslant 5/8. \tag{31}$$

В то же время

$$F_j\bigl\{\mathbf{Z}\bigr\} = 1. \tag{32}$$

Согласно определению (3), из (31) и (32) вытекает, что

$$\pi\bigl(F_j, D_j\bigr) \geqslant 1/8. \tag{33}$$

Таким образом, расстояние Леви–Прохорова $\pi\bigl(F_j, D_j\bigr)$ не стремится к нулю при $j \to \infty$, в отличие от $\pi\bigl(F_j, G_j\bigr)$. Разумеется, это связано с тем, что последовательность распределений F_j не является относительно компактной.

Неравенства (12)–(14) и пример 1 позволяют сделать вывод о том, что в случае одинаково распределенных слагаемых распределения G_j всегда можно рассматривать как хорошую аппроксимацию для распределений F_j, в то время как распределения D_j могут быть далеки от распределений F_j в метрике Леви–Прохорова. Заметим, что в некоторых случаях $a_{j,k} = b_{j,k}$ и $D_j = G_j$. Например, если все рассматриваемые распределения симметричны. Или если в только что рассмотренном примере $\tau < 1$ и $a_{j,k} = b_{j,k} = 0$.

Важно при этом то, что распределения G_j определяются при $\tau_j \to 0$, так что неравенства (12) и (14) обеспечивают сближение распределений G_j и F_j. В то же время в определении (6) величин $a_{j,k}$ величина τ фиксирована и не зависит от j.

Другое существенное отличие $b_{j,k}$ от $a_{j,k}$ состоит в том, что даже если распределения $U_{j,k}$ и $V_{j,k}$ сосредоточены, соответственно, на отрезках $[-\tau_j, \tau_j]$ и на множествах $\mathbf{R} \setminus [-\tau_j, \tau_j]$, то при $\tau = \tau_j$ справедливо равенство $a_{j,k} = (1-p_{j,k})\, b_{j,k}$. Наличие множителя $(1-p_{j,k})$ в этом равенстве приводит к тому, что распределения D_j и F_j могут быть далеки друг от друга в метрике Леви–Прохорова даже если в определении (6) величин $a_{j,k}$ величина $\tau = \tau_j$ зависит от j и стремится к нулю при $j \to \infty$. Это показывает следующий пример 2, представляюший собой модификацию примера 1.

Пример 2. Пусть теперь

$$F_{j,k} = (1 - j^{-1}) E_{-j^{-1}} + j^{-1} E_{1-j^{-1}}, \quad k = 1, \ldots, n_j. \tag{34}$$

Так что условия (8) и (9) выполняются при

$$U_{j,k} = E_{-j^{-1}}, \quad V_{j,k} = E_{1-j^{-1}}, \quad p_{j,k} = p_j = j^{-1}, \quad \tau_j = j^{-1}.$$

Тогда $b_{j,k} = -j^{-1}$ и распределение $F_j E_{n_j j^{-1}}$ – это биномиальное распределение с параметрами n_j и j^{-1}. Так что само распределение F_j является сдвинутым на $n_j j^{-1}$ влево биномиальным распределением. Сопровождающее безгранично делимое распределение

$$G_j = E_{-n_j j^{-1}} e(n_j\, p_j\, E_1)$$

представляет собой аналогичным образом сдвинутое распределение Пуассона с параметром $n_j\, p_j$. По аналогии с примером 1, расстояние по вариации между распределениями F_j и G_j оценивается сверху величиной $c\, p_j = c\, j^{-1}$ и стремится к нулю при $j \to \infty$.

Что же касается приближающего сопровождающего безгранично делимого распределения D_j, то если величины $a_{j,k}$ выбираются по формуле (6) с $\tau = j^{-1}$, $j \geqslant 3$, то $a_{j,k} = -j^{-1}(1 - j^{-1})$, $k = 1, \ldots, n_j$, и

$$\begin{aligned} D_j &= \prod_{k=1}^{n_j} \bigl(E_{a_{j,k}}\, e\bigl(F_{j,k}\, E_{-a_{j,k}}\bigr)\bigr) \\ &= E_{-n_j j^{-1}(1-j^{-1})}\, e\bigl(n_j (1 - j^{-1})\, E_{-j^{-2}}\bigr)\, e\bigl(n_j j^{-1}\, E_{1-j^{-2}}\bigr). \end{aligned} \tag{35}$$

Выбирая $n_j \geqslant 2\, c_2\, j^4$ и действуя по аналогии с примером 1, нетрудно показать, что при $j \geqslant \max\{3, c_1\}$ расстояние Леви–Прохорова $\pi\bigl(F_j, D_j\bigr)$ отделено от нуля и, следовательно, не стремится к нулю при $j \to \infty$, в отличие от $\pi\bigl(F_j, G_j\bigr)$.

В многомерном случае ситуация практически ничем не отличается от одномерной. Пусть теперь $\{X_{j,k}, j = 1, 2, \ldots; k = 1, \ldots, n_j\}$ –

независимые d-мерные случайные векторы с распределениями $F_{j,k} = \mathcal{L}(X_{j,k})$, представимые в виде

$$F_{j,k} = (1 - p_{j,k})U_{j,k} + p_{j,k}V_{j,k}, \tag{36}$$

где $0 \leqslant p_{j,k} \leqslant 1$, распределения $U_{j,k}$, $k = 1, \ldots, n_j$, сосредоточены на евклидовых шарах B_{τ_j}, с центром в нуле и радиусами $\tau_j \geqslant 0$, $j = 1, 2, \ldots$, а $V_{j,k}$, $k = 1, \ldots, n_j$, – произвольные распределения, причем

$$\tau_j \to 0 \quad \text{и} \quad p_j = \max_{1 \leqslant k \leqslant n_j} p_{j,k} \to 0 \quad \text{при } j \to \infty. \tag{37}$$

Пусть распределения F_j и G_j определены формулами (4) и (10), где

$$b_{j,k} = \int_{\mathbf{R}^d} x\, U_{j,k}\{dx\}. \tag{38}$$

В работе автора [10] было показано, что при выполнении условий (36), (37) и (38)

$$L(F_j, G_j) \ll_d p_j + \tau_j \log^* \tau_j^{-1}. \tag{39}$$

и

$$\pi(F_j, G_j) \ll_d \sum_{k=1}^{n_j} p_{j,k}^2 + p_j + \tau_j \log^* \tau_j^{-1}. \tag{40}$$

Если же предположить дополнительно, что распределения $V_{j,k}$ одинаковы при всех $k = 1, \ldots, n_j$, то

$$\pi(F_j, G_j) \ll_d p_j + \tau_j \log^* \tau_j^{-1}. \tag{41}$$

Многомерный аналог расстояния Леви определяется так же, как расстояние Леви–Прохорова, только борелевские множества следует заменить на параллелепипеды.

Если дополнительно к условию бесконечной малости слагаемых (37) предположить, что

$$\sum_{k=1}^{n_j} p_{j,k}^2 \to 0 \quad \text{при } j \to \infty,$$

то $\pi\bigl(F_j, G_j\bigr)$ стремится к нулю. Если же распределения $V_{j,k}$ одинаковы при всех $k = 1, \ldots, n_j$, то для стремления $\pi\bigl(F_j, G_j\bigr)$ к нулю никаких дополнительных предположений не требуется.

В [11] можно найти вытекающие из оценок расстояния Леви–Прохорова (40) и (41) оценки точности сильной аппроксимации соответствующих случайных векторов.

Ю. А. Давыдов и В. И. Ротарь [2] установили, в частности, что последовательности d-мерных распределений сближаются друг с другом в метрике Леви–Прохорова тогда и только тогда, когда сближаются интегралы по этим распределениям от равномерно непрерывных ограниченных функций. Ясно, что рассмотренные выше распределения F_j и G_j из схемы серий, удовлетворяющей условию бесконечной малости слагаемых, дают большое количество содержательных примеров последовательностей сближающихся распределений, в том числе – не являющихся относительно компактными.

Литература

1. Т. В. Арак, А. Ю. Зайцев, *Равномерные предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* — Труды МИАН **174**, 1986.
2. Y. Davydov, V. Rotar, *On asymptotic proximity of distributions.* — J. Theoret. Probab. **22**, No. 1 (2009), 82–98.
3. Б. В. Гнеденко, А. Н. Колмогоров. *Предельные распределения для сумм независимых случайных величин.* — ГИТТЛ, М., 1949.
4. И. А. Ибрагимов, Э. Л. Пресман, *О сближении распределений сумм независимых случайных величин с сопровождающими законами.* — Теория вероятн. и ее примен. **18** (1973), 753–766.
5. А. Н. Колмогоров, *Некоторые работы последних лет в области теории вероятностей.* — Вестник МГУ **7**, No. 10 (1953), 29–38.
6. А. Н. Колмогоров, *Две равномерные предельные теоремы для сумм независимых слагаемых.* — Теория вероятн. и ее примен. **1** (1956), 426–436.
7. В. В. Петров, *Суммы независимых случайных величин.* Наука, М., 1972.
8. Ю. В. Прохоров, *Асимптотическое поведение биномиального распределения.* — Успехи матем. наук **8**, No. 3 (1953), 135–142.
9. А. Ю. Зайцев, Т. В. Арак, *О скорости сходимости во второй равномерной предельной теореме Колмогорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **28** (1983), 333–353.
10. А. Ю. Зайцев, *Многомерный вариант второй равномерной предельной теоремы Колмогорова.* — Теория вероятн. и ее примен. **34** (1989), 128–151.
11. A. Yu. Zaitsev, *Estimates for the strong approximation in multidimensional central limit theorem.* — In: Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III. Invited lectures (Beijing, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, pp. 107–116.

Zaitsev A. Yu. On the approximation of convolutions by accompanying laws in the scheme of series.

The problem of the approximation of convolutions by accompanying laws in the scheme of series satisfying the infinitesimality condition is considered. It is shown that the quality of approximation depends essentially on the choice of centering constants.

С.-Петербургское отделение
Математического института
им. В. А. Стеклова РАН,
Фонтанка 27, Санкт-Петербург 191023
и С.-Петербургский
государственный университет,
Университетский пр., 28,
Петродворец,
Санкт-Петербург 198504, Россия
E-mail: zaitsev@pdmi.ras.ru

Поступило 2 ноября 2012 г.